

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۴۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۴ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۶ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |



$$\text{Log } 5 = 1 - \text{Log } 2 = 1 - 0.3 = 0.7$$

۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\text{Log } \frac{5}{3}\right)x^2 + (\text{Log } 9)x - \text{Log } 15 = 0$$

$$\Rightarrow (\text{Log } 5 - \text{Log } 3)x^2 + (2\text{Log } 3)x - (\text{Log } 5 + \text{Log } 3) = 0$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\text{Log } 5 + \text{Log } 3}{\text{Log } 5 - \text{Log } 3} = -\frac{0.7 + 0.4}{0.7 - 0.4} = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 = \frac{14}{3}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر هفته ۱۲/۵ درصد از دست می‌دهد و ۸۷/۵ درصد باقی ماند یعنی $\frac{1}{8}$ ماده اولیه

باقی مانده است. از طرفی $\text{Log } \frac{1}{3} = \frac{10}{16}$ و $\text{Log } \frac{1}{6} = \frac{10}{6}$ است.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n A = \frac{1}{6}A \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{6}$$

$$\text{Log } \left(\frac{1}{3}\right)^n = \text{Log } \frac{1}{6} = -\text{Log } \frac{1}{3}$$

$$n(\text{Log } \frac{1}{3} - 3\text{Log } \frac{1}{3}) = -\text{Log } \frac{1}{6} \Rightarrow n\left(\frac{10}{6} - \frac{30}{16}\right) = -\frac{10}{6} \Rightarrow n = 8 \Rightarrow \text{هفته} \Rightarrow 56 \text{ روز}$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log } 2 \simeq 0.3 \Rightarrow \text{Log } 5 = 1 - \text{Log } 2 \simeq 0.7$$

$$\text{Log } 3 \simeq 0.4 \Rightarrow \text{Log } 6 = \text{Log } 2 + \text{Log } 3 \simeq 0.7$$

$$x^2 (\text{Log } 30) + 2x(\text{Log } 6) - \text{Log } \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow (\text{Log } 5 + \text{Log } 6)x^2 + (2\text{Log } 6)x + (\text{Log } 6 - \text{Log } 5)$$

= 0

$$\xrightarrow{a + c = b} x = -1, \frac{\text{Log } 5 - \text{Log } 6}{\text{Log } 5 + \text{Log } 6} \simeq \xrightarrow{\text{تفاضل}} \simeq |-1 - 0| = 1$$



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{9}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{A(t)}{A_0} = \frac{1}{6} \Rightarrow n(3 \log 2 - 2 \log 3) = -(\log 2 + \log 3)$$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 3 + \log 2}{2 \log 3 - 3 \log 2} = \frac{\log_2 3 + 1}{2 \log_2 3 - 3}$$

از طرفی از دو تساوی داده شده داریم:

$$\log_2 3 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} = \frac{2/4}{1/4} = \frac{12}{7} \Rightarrow n = \frac{\frac{12}{7} + 1}{\frac{24}{7} - 3} = \frac{19}{3}$$

یعنی در $\frac{19}{3}$ ساعت یا ۳۸۰ دقیقه نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = x \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{(2^x)^2 - 1}{2^x}}{\frac{(2^x)^2 + 1}{2^x}} \Rightarrow 2(2^x)^2 - 2 = (2^x)^2 + 1$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 = 3 \Rightarrow 2^x = \sqrt{3} \xrightarrow{\log_2} \log_2 2^x = \log_2 \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2 \sqrt{3}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\log_9 b = 1 + \log_3 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 b = \log_3 3 + \log_3 5 \Rightarrow \log_3 b = 2 \log_3 3 + 2 \log_3 5$$

$$\Rightarrow \log_3 b = \log_3 3^2 + \log_3 5^2 \Rightarrow \log_3 b = \log_3 15^2 \Rightarrow b = 15^2$$

$$\log_{15} \sqrt{b} = \log_{15} \sqrt{15^2} = \log_{15} 15 = 1$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3^x = 0.216 \xrightarrow{\text{Log}_3} \text{Log}_3 3^x = \text{Log}_3 \frac{3^3}{5} \Rightarrow x = 3 - 3 \text{Log}_3 5 \Rightarrow \text{Log}_3 5 = \frac{3-x}{3}$$

$$5^y = 675 \xrightarrow{\text{Log}_5} \text{Log}_5 5^y = \text{Log}_5 5^2 \times 3^3 \Rightarrow y = \text{Log}_5 5^2 \times 3^3 \Rightarrow y = 2 + 3 \text{Log}_5 3$$

$$y = 2 + 3 \left(\frac{3}{3-x} \right) \Rightarrow y = \frac{15-2x}{3-x} \Rightarrow y = \frac{2x-15}{x-3}$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$8^{-\frac{2}{3}m} \times 4^{-n} + 4^{-m} \times 8^{-\frac{2}{3}n} > \frac{1}{128} \Rightarrow 2^{-2m-2n} + 2^{-2m-2n} > 2^{-7} \Rightarrow 2(2^{-2m-2n}) > 2^{-7}$$

$$\Rightarrow 2^{-2m-2n} > 2^{-8} \Rightarrow -2m-2n > -8 \Rightarrow m+n < 4 \Rightarrow (m, n) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$

$$\text{Max}(m^3 + n^2) = 2^3 + 1^2 = 8 + 1 = 9$$

$$\text{Log}_n^m = a \Rightarrow \frac{\text{Log } m}{\text{Log } n} = a$$

$$b = \text{Log}_{mn}^{m^2 n} = \frac{2 \text{Log } m + \text{Log } n}{\text{Log } m + \text{Log } n} = \frac{2a+1}{a+1} = 1 + \frac{a}{a+1} = 1/0.00 \Rightarrow [b] = 1$$

تذکر: برای حل تستی، می‌توانیم $m = n$ در نظر بگیریم و به راحتی به جواب برسیم.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. به علت وجود $\text{Log}_{\frac{1}{2}} x$ باید $x > 0$ پس برای اینکه زیر رادیکال منفی نشود، باید:

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} x > 0 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} x > \text{Log}_{\frac{1}{2}} 1 \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{\cap} 0 < x < 1$$

این بازه شامل هیچ عدد صحیحی نمی‌شود.



۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$b = -8, c = 4, \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \alpha\beta^2 \cdot \alpha^2\beta \xrightarrow{\div \alpha\beta} \alpha + \beta = \alpha^2\beta^2 \Rightarrow S = P^2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{-c^2}{b} = \frac{-16}{-8} = 2$$

$$\Rightarrow \text{Log} \sqrt[2]{a} = \text{Log} \sqrt[2]{2} = 2$$

تذکر:

بهتر بود در صورت سؤال عنوان می‌شد: «اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای که ریشه‌های آن $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ است، برابر باشند» که ابهام سؤال کمتر می‌شد.

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$g(1) = 4 \Rightarrow (1, 4) \in f \Rightarrow f(1) = 2 + 2^{b-a} = 4 \Rightarrow b - a = 1 \quad (1)$$

$$f^{-1}(1, 0) = -1 \Rightarrow f(-1) = 1, 0 \Rightarrow 2 + 2^{b+a} = 1, 0 \Rightarrow 2^{b+a} = 8 \Rightarrow b + a = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} b = 2, a = 1 \Rightarrow 2b - a = 3$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g^{-1}(f^{-1}(0)) = \alpha \Rightarrow f^{-1}(0) = g(\alpha) \Rightarrow 0 = f(g(\alpha))$$

$$2x - 5 = 1 \Rightarrow x = 3 \quad (\text{Log } 1 = 0)$$

در تابع f ، $f(3) = 0$ است زیرا:

$$\Rightarrow g(\alpha) = 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha - 4} \Rightarrow 3 - \alpha = \sqrt{2\alpha - 4} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\alpha < 3} \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 2\alpha - 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha = -13 \Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 16 = (\alpha - 4)^2 = 3 \Rightarrow \alpha = 4 - \sqrt{3}$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow 1 = \sqrt[3]{\frac{a}{2^{\frac{1}{2}}} + b} \Rightarrow \frac{a}{2^{\frac{1}{2}}} + b = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = -b \Rightarrow a = -2b \quad (1)$$

$$f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{2^{5a} + b} = 2^3 \Rightarrow 2^{5a} + b = 2^9 \Rightarrow 5a + b = 9$$

$$\xrightarrow{(1)} -10b + b = 9 \Rightarrow b = -1, a = 2 \Rightarrow a - b = 3$$



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} b = \frac{2}{3} \left(1 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 \right) \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} b = \frac{2}{3} \text{Log}_{\frac{1}{2}} 6$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} b = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow b = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{Log} (3b - 1) = \text{Log}_{\frac{1}{2}} (3 \times 3^{\frac{2}{3}} - 1) = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 10 = 2$$

یادآوری: $\frac{m}{n} \text{Log}_b a = \text{Log}_{b^{\frac{n}{m}}} a^m$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین رابطه $a^2 + 9b^2 = 10ab$ را با ab جمع می‌کنیم.

$$\Rightarrow a^2 + 6ab + 9b^2 = 16ab \Rightarrow (a + 3b)^2 = 16ab \Rightarrow \left(\frac{a + 3b}{4} \right)^2 = ab$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم:

$$\Rightarrow \text{Log} \left(\frac{a + 3b}{4} \right)^2 = \text{Log} ab \Rightarrow 2 \text{Log} \left(\frac{a + 3b}{4} \right) = \text{Log} a + \text{Log} b$$

این یعنی $\text{Log} \frac{a + 3b}{4}$ واسطه حسابی $\text{Log} a$ و $\text{Log} b$ است.

$$\left. \begin{aligned} (0, 0) &\Rightarrow a + b = 0 \\ (-1, -1) &\Rightarrow a + 2b = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 1, b = -1$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} 18 = m \Rightarrow \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 18}{\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}} = m \Rightarrow \frac{2 \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 + 1}{3} = m \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 = \frac{3m - 1}{2}$$

$$\text{Log}_{\frac{1}{4}} 12 = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 12}{\text{Log}_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}} = \frac{\text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 + 2}{2} = \frac{\frac{3m - 1}{2} + 2}{2} = \frac{3m + 3}{4} = \frac{3}{4}(m + 1)$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $5^x = 10 \Rightarrow 5^x = 5 \times 2 \Rightarrow 5^{x-1} = 2 \Rightarrow 5 = 2^{\frac{1}{x-1}}$

$$2^{f(x)} = 20 = 2^2 \times 5 = 2^2 \times 2^{\frac{1}{x-1}} = 2^{2 + \frac{1}{x-1}} = 2^{\frac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$$

راه دوم:

$$5^x = 10 \Rightarrow x = \log_5 10 = \log_5 2 + \log_5 5 = \log_5 2 + 1 \Rightarrow \log_5 2 = x - 1$$

$$2^{f(x)} = 20 \Rightarrow f(x) = \log_2 20 = \frac{\log_5 20}{\log_5 2} = \frac{\log_5 2 + \log_5 10}{\log_5 2} = \frac{x-1 + x}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $2 \log_x a + \frac{1}{2} \log_a x = 2 \Rightarrow \log_a x = A$

$$\frac{2}{A} + \frac{1}{2} A = 2 \xrightarrow{\times 2A} 4 + A^2 - 4A = 0 \Rightarrow A^2 - 4A + 4 = 0$$

$$(A-2)^2 = 0 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow \log_a x = 2 \Rightarrow a^2 = x \Rightarrow a = 3$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۲ واحد در جهت منفی y ها $y = 2 \frac{(x+3) + |x+3|}{x+3 + |x+3|}$ $\xrightarrow{3 \text{ واحد در جهت منفی محور } x}$ $y = 2 \frac{x+|x|}{x+|x|}$

$y = 2 \frac{x+3+|x+3|}{x+3+|x+3|} - 2 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2 = 2^1 \Rightarrow x+3+|x+3| = 1$

$\begin{cases} x \geq -3 \Rightarrow 2(x+3) = 1 \Rightarrow x = -2/5 \\ x < -3 \Rightarrow (x+3) - (x+3) = 1 \Rightarrow 0 = 1 \text{ غ ق ق} \end{cases}$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x$

$|x^2 - 2| > x \Rightarrow x^2 - 2 = x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$ ✓ غ ق ق

$2 - x^2 = x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2) = 0$ ✓ غ ق ق

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ضابطه تابع را به صورت دیگری خواهیم نوشت:

$$f(x) = \text{Log}_{\frac{1}{2}} (12 + \sqrt{[x]} - [x])^{-1} \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} (12 + \sqrt{[x]} - [x])^{-1} = \text{Log}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-1}$$

در نوشتن ضابطه‌ی اخیر، از تغییر متغیر $t = \sqrt{[x]}$ استفاده کرده‌ایم و عبارت درجه دوم حاصل را به صورت مربع کامل نوشته‌ایم. حال داریم:

$$\text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 < f(x) < \text{Log}_{\frac{1}{2}} 5 \Rightarrow \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 < \text{Log}_{\frac{1}{2}} \left(\frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-1} < \text{Log}_{\frac{1}{2}} 5$$

$$\Rightarrow 6 < \frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 < 10 \Rightarrow \frac{9}{4} < \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{25}{4} \Rightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{[x]} - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt{[x]} < 3 \Rightarrow 4 < [x] < 9 \Rightarrow 5 \leq x < 9$$

یعنی دامنه‌ی تابع بازه‌ی $(5, 9)$ بوده است.

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا حدود تغییرات تابع $y = -\sqrt{5\sin^2 x - 1}$ را می‌یابیم:

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 5\sin^2 x - 1 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq -\sqrt{5\sin^2 x - 1} \leq 0 \Rightarrow -2 \leq y \leq 0 \Rightarrow R_f = \left[-2, 0 \right]$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{5}{4}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$4^x + 15 = 2^{(x+3)} = 2^3 \times 2^x = 8 \times 2^x \Rightarrow 4^x - 8 \times 2^x + 15 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 - 8 \times 2^x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x - 5)(2^x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 5 \Rightarrow x_1 = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 5 \\ 2^x = 3 \Rightarrow x_2 = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع جواب ها} : x_1 + x_2 = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 5 + \text{Log}_{\frac{1}{2}} 3 = \text{Log}_{\frac{1}{2}} 15$$



۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می دانیم $\text{Log} \frac{x}{y} = \frac{1}{\text{Log} \frac{y}{x}}$ است، پس تساوی داده شده به صورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{\text{Log} \frac{a}{c}} + \frac{1}{\text{Log} \frac{b}{c}} = \frac{\text{Log} \frac{a}{c} + \text{Log} \frac{b}{c}}{\text{Log} \frac{a}{c} \cdot \text{Log} \frac{b}{c}} = \frac{\text{Log} \frac{ab}{c}}{\text{Log} \frac{a}{c} \cdot \text{Log} \frac{b}{c}} = 1 \Rightarrow \text{Log} \frac{a}{c} \cdot \text{Log} \frac{b}{c} = \text{Log} (ab)$$

$$\text{Log} \frac{y}{x} - 2 \text{Log} \frac{x}{y} = 1$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

باید $\text{Log} \frac{y}{x}$ را برابر A و $\text{Log} \frac{x}{y}$ را برابر $\frac{1}{A}$ قرار دهیم:

$$A - \frac{2}{A} = 1 \Rightarrow A^2 - 2 = A \Rightarrow A^2 - A - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -1 \Rightarrow \text{Log} \frac{y}{x} = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{x} \\ A = 2 \Rightarrow \text{Log} \frac{y}{x} = 2 \Rightarrow y = x^2 \end{cases}$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{2^x\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8\right)} = 52 \Rightarrow \frac{3^x(364)}{2^x\left(\frac{63}{2}\right)} = \frac{1}{52} \Rightarrow \frac{3^x(7)}{2^x\left(\frac{63}{4}\right)} = 1 \Rightarrow \frac{3^x \times 28}{2^x \times 63} = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = 2$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت جلوی لگاریتم باید بزرگتر از صفر باشد و عبارت درون رادیکال مخرج باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد و در نهایت از مجموعه جواب‌های به دست آمده، اشتراک می‌گیریم.

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < -1 & (1) \\ x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$$

روش دوم:

در این روش از روش حذف گزینه استفاده می‌کنیم.

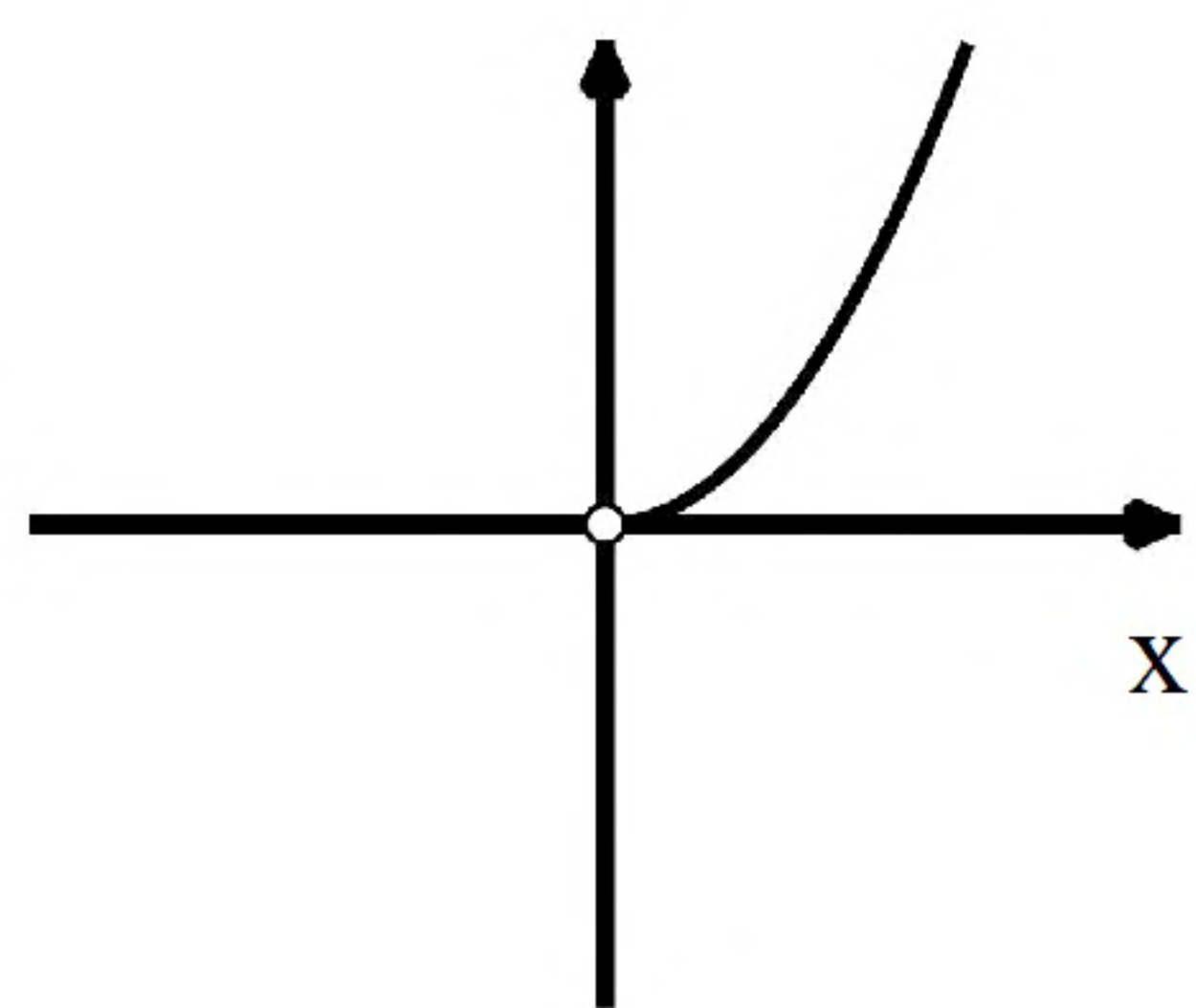
$$x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{\text{Log}(-2)}{\sqrt{-1+1}} \Rightarrow \text{نادرست} \Rightarrow \text{گزینه‌های ۲ و ۴ غلط هستند.}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{\text{Log}(0)}{\sqrt{4-1+1}} \Rightarrow \text{نادرست} \Rightarrow \text{گزینه ۳ غلط است.}$$

بنابراین با حذف گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴، گزینه ۱ درست است.



۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\text{Log}_9^x \xrightarrow{x > 0} \text{Log}_3^9 = x^2$$

$$\frac{1}{6 + \sqrt{|x|} - |x|} > 0$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-|x| + \sqrt{|x|} + 6 > 0, \sqrt{|x|} = t \Rightarrow -t^2 + t + 6 > 0 \Rightarrow t^2 - t - 6 < 0$$

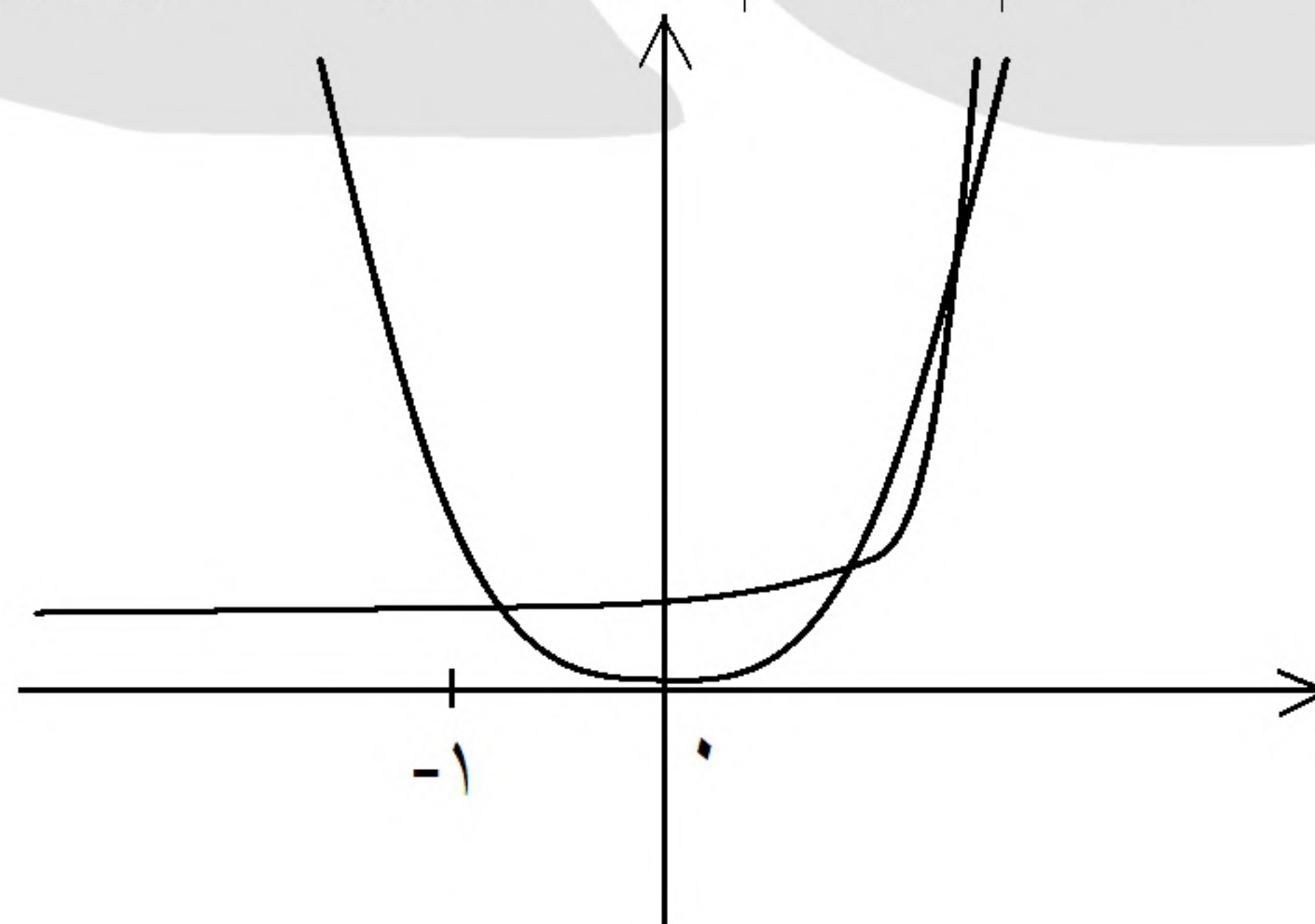
$$\Rightarrow (t - 3)(t + 2) < 0 \Rightarrow -2 < t < 3$$

$$-2 < \sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow \sqrt{|x|} < 3 \Rightarrow |x| < 9 \Rightarrow -9 < x < 9$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \left(\text{Log}_{21}^3\right)^2 + \text{Log}_{21}^{147} \text{Log}_{21}^{1323} &= \left(\text{Log}_{21}^3\right)^2 + \text{Log}_{21}^{147} \text{Log}_{21}^{9 \times 147} \\ &= \left(\text{Log}_{21}^3\right)^2 + \text{Log}_{21}^{147} \left(\text{Log}_{21}^9 + \text{Log}_{21}^{147}\right) \xrightarrow{\text{Log}_{21}^3 = x \text{ و } \text{Log}_{21}^{147} = y} \\ &= x^2 + y(2x + y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = \text{Log}_{21}^{3 \times 147} = \left(\text{Log}_{21}^{21^2}\right)^2 = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نمودارها را رسم می‌کنیم و به روش هندسی بررسی می‌کنیم.



با توجه به نمودار در بازه $[-1, 0]$ در یک نقطه متقاطع هستند.



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. A_0 مقدار اولیه و هر بار ۴ درصد از آن کاسته می‌شود، بنابراین داریم:

$$f(t) = A_0 (1 - 0.04)^t \Rightarrow f(t) = A_0 (0.96)^t \xrightarrow{f(t) = \frac{1}{3}A_0} \frac{1}{3}A_0 = A_0 (0.96)^t$$

از طرفین لگاریتم می‌گیریم. داریم:

$$\text{Log} \frac{1}{3} = \text{Log} (0.96)^t \Rightarrow -\text{Log} 3 = (\text{Log} 96 - \text{Log} 100)t \Rightarrow t = \frac{-\text{Log} 3}{5\text{Log} 2 + \text{Log} 3 - 2} = \frac{-0.48}{-0.02} = 24$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(2) = x \Rightarrow f(x) = 2 \Rightarrow 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \xrightarrow{2^x = A} \frac{A - \frac{1}{A}}{2} = 2 \Rightarrow \frac{A^2 - 1}{A} = 4$$

$$\Rightarrow A^2 - 4A - 1 = 0$$

$$A = 2 + \sqrt{5} \text{ ق ق } \Rightarrow 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \text{Log}_2 (2 + \sqrt{5}) \Rightarrow f^{-1}(2) = \text{Log}_2 (2 + \sqrt{5})$$

$$A = 2 - \sqrt{5} \text{ غ ق ق}$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع از نقاط $A(0, -6)$ و $B\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ می‌گذرد.

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$$

$$A(0, -6) \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b = -6 \Rightarrow 3^{-b} = 3 \Rightarrow b = -1$$

$$B\left(\frac{1}{3}, 0\right) \Rightarrow -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{a}{3}-1} = 0 \Rightarrow (3)^{1-\frac{a}{3}} = 3^2 \Rightarrow 1 - \frac{a}{3} = 2 \Rightarrow -\frac{a}{3} = 1 \Rightarrow a = -3$$

$$f(x) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1} \Rightarrow f(2) = -9 + 243 = 234$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

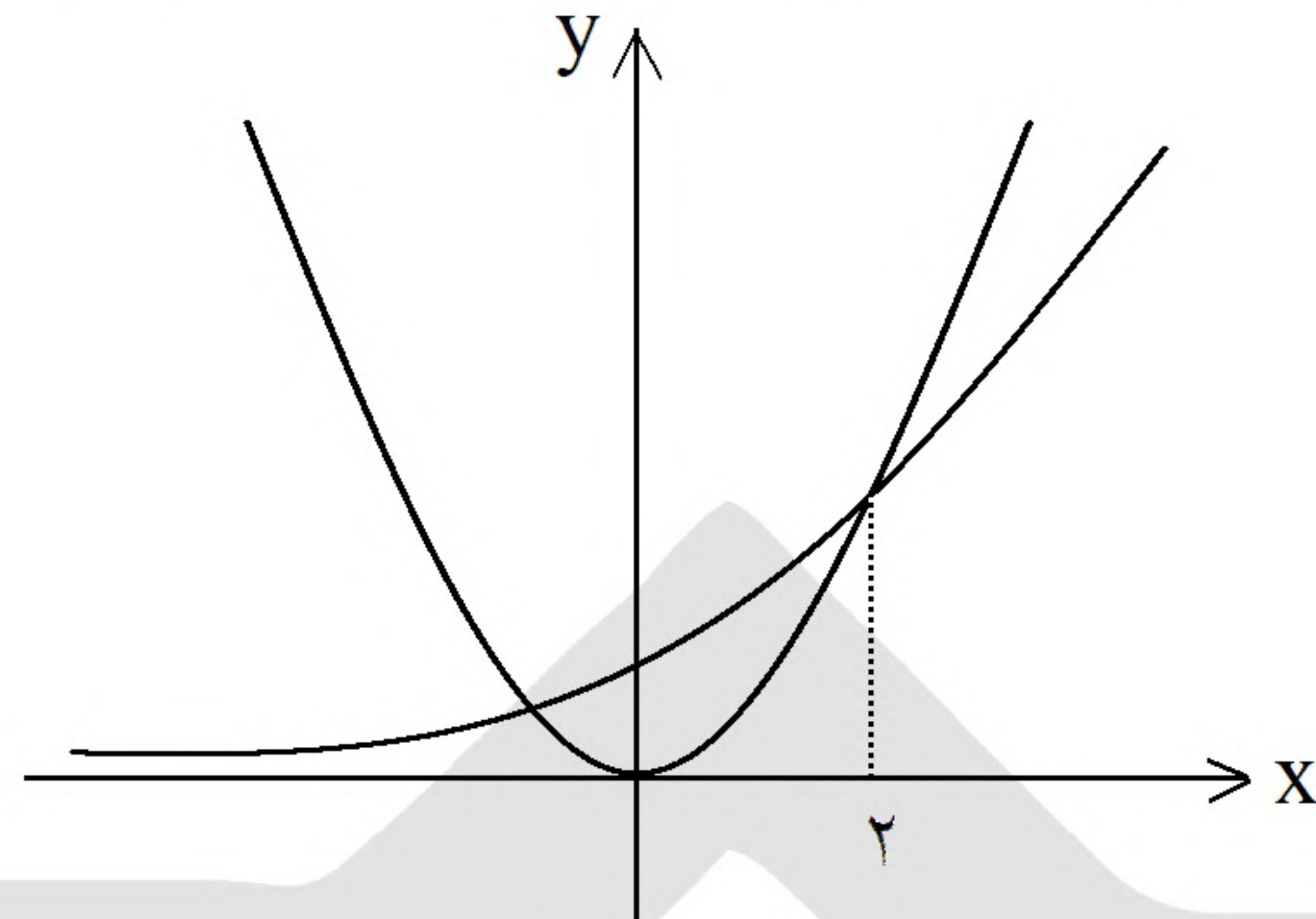
$$\text{Log}_{18}^8 = \frac{\text{Log}_3^8}{\text{Log}_3^{18}} = \frac{3\text{Log}_3^2}{2\text{Log}_3^3 + \text{Log}_3^2} = \frac{\frac{15}{8}}{2 + \frac{5}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به روش هندسی بررسی می‌کنیم.

نمودارهای $y = 2^x$ و $y = x^2$ را رسم می‌کنیم. $2^x - x^2 = 0 \Rightarrow 2^x = x^2 \Rightarrow$



بنابراین در بازه $[0, 1]$ نقطه تلاقی ندارند، در نتیجه فاقد ریشه است.

۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وقتی ۱۰ درصد کم شود، یعنی ۹۰ درصد باقی می‌ماند پس:

$$24 \times \left(\frac{90}{100}\right)^t = 8 \Rightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^t = \frac{1}{3}$$

$$t(\text{Log } 9 - \text{Log } 10) = (-\text{Log } 3)$$

$$t = \frac{-0/48}{2 \times 0/48 - 1} = 12$$

$$t = 12 \times 30 = 360$$

از طرفین لگاریم می‌گیریم داریم:

پس ۱۲ ماه طول می‌کشد این اتفاق بیفتد. یعنی:

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} = 2 \Rightarrow 2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Rightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\times t} t^2 + 1 = 4t \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2 (2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{t = 2^x} \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \text{Log}_2 (2 + \sqrt{3}) \\ 2^x = 2 - \sqrt{3} < 0 \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(0, -2) \in f \Rightarrow -2 = -4 + 2^b \Rightarrow 2^b = 2 \Rightarrow b = 1$$

$$\left(-\frac{1}{3}, 0\right) \in f \Rightarrow 0 = -4 + 2^{-\frac{1}{3}a + 1} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{3}a + 1} = 4 \Rightarrow -\frac{1}{3}a + 1 = 2 \Rightarrow a = -3$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^{-\frac{5}{3}(-3) + 1} = -4 + 2^6 = -4 + 64 = 60$$



۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\log_4 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 = 1/8 \Rightarrow \log_2 3 = 1/6$$

$$\log_{12} 6 = \frac{\log_2 6}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3 + 2 \log_2 2} = \frac{1/6 + 1}{1/6 + 2} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{13}{18}$$

۴۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3^{Ax+B} & f(1) &= g(1) \Rightarrow 3^{A+B} = 1 = 3^0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=1, B=-1 \\ g(x) &= x^2 & f(3) &= g(3) \Rightarrow 3^{3A+B} = 3^2 \Rightarrow 3A+B=2 \\ f(x) &= 3^{x-1} \Rightarrow f(0) &= 3^{-1} &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

۴۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = -1 + \log_b(2x+a)$$

$$D_f = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow -1 + \log_b(2(2) + (-1)) = 0 \Rightarrow \log_b 3 = 1$$

$$b=3 \Rightarrow y = -1 + \log_3(2x-1) = 1 \Rightarrow \log_3(2x-1) = 2 \Rightarrow 2x-1 = 9 \Rightarrow x = 5$$

۴۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 3^{x^2-2} &= (3^4)^x = 3^{4x} \Rightarrow x^2-2 = 4x \Rightarrow x^2-4x-2=0 \xrightarrow{+6} x^2-4x+4=6 \\ \Rightarrow (x-2)^2 &= 6 \Rightarrow x-2 = \sqrt{6} \\ \log_6(x-2) &= \log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

۴۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} D_f &= (-1, +\infty) \\ \Rightarrow y &= -\log_7(x+1) = \log_7(x+1)^{-1} \end{aligned}$$

و f تابعی نزولی است



۴۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{125}{8}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{8}{125}\right)^{-x^2} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-3x^2} \Rightarrow 2x-1 = -3x^2 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ ق ق ق} \\ \text{یا} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\log_8(9x+1) = \log_8 4 = \log_8 \frac{2^2}{2^3} = \frac{2}{3}$$

۴۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{Ax+B}$$

$$g(x) = x^2 - x$$

$$f(1) = g(1) \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{A+B} = 0 \Rightarrow 2^{-A-B} = 2^1 \Rightarrow -A-B = 1$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2A+B} = 2 \Rightarrow 2^{-2A-B} = 2^2 \Rightarrow -2A-B = 2 \Rightarrow -A = 1$$

$$\Rightarrow A = -1, B = 0$$

$$f(x) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \Rightarrow f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -2 + 8 = 6$$