

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- |     | ۱                                   | ۲                                   | ۳                                   | ۴                                   |
|-----|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱-  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲-  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳-  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۴-  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۵-  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۶-  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۷-  | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۸-  | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۹-  | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۰- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۱- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۲- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۳- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۴- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۵- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۶- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۷- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۸- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۱۹- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۰- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۱- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۲- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۳- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۴- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۵- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۶- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۷- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۸- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۲۹- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۱- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۲- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۳- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۴- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۵- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۶- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۷- | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۸- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |
| ۳۹- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۰- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/>            | <input checked="" type="checkbox"/> |

- |     | ۱                                   | ۲                        | ۳                        | ۴                                   |
|-----|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| ۴۱- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۲- | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۳- | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            |





۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ -2x^2 + ax - 21 \end{cases} \quad \begin{aligned} x \geq \frac{5}{2} &\Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow y \geq -\frac{1}{4} \\ x < \frac{5}{2} &\Rightarrow y < g\left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow y < \frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \end{aligned}$$

$g(x)$

ابتدا خود سهمی در فاصله  $\left(-\infty, \frac{5}{2}\right)$  باید وارون پذیر باشد پس:

$$\frac{5}{2} \leq x_S \Rightarrow \frac{5}{2} \leq \frac{-a}{-4} \Rightarrow a \geq 10$$

از طرفی برد هر دو ضابطه نباید اشتراکی داشته باشند. بنابراین:

$$\frac{5}{2}a - \frac{67}{2} \leq -\frac{1}{4} \Rightarrow 10a - 134 \leq -1$$

$$10a \leq 133 \Rightarrow a \leq 13/3$$

$$10 \leq a \leq 13/3$$

شرط وارون پذیر تابع  $f$ :پس بزرگترین مقدار صحیح  $a = 13$ 

$$f^{-1}(-3): -2x^2 + 13x - 21 = -3 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$$

$$\begin{cases} x = 2 \checkmark \\ \text{یا} \\ x = \frac{9}{2} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

چون  $x < \frac{5}{2}$ 

$$f \circ g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(g\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = f(2) = 4$$

$$g\left(-\frac{1}{3}\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} - f\left(-\frac{1}{3}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right]\right) = f(1) = 2$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{mx - 1}$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$5y - 10x = 12 \xrightarrow{y = 7/2} x = 2/4 \Rightarrow \begin{aligned} (2/4, 7/2) &\in f^{-1} \\ (7/2, 2/4) &\in f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2/4 = \sqrt{7/2} \sqrt{7/2 m - 1}$$

$$2/4 \times 2/4 = 7/2 (7/2 m - 1)$$

$$0/8 = 7/2 m - 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4} \Rightarrow f(16) = 4\sqrt{3}$$



$$\text{ضابطه اول: } R_1 = \left[\frac{13}{2}, +\infty\right)$$

۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{ضابطه دوم: } -x^2 + 2mx + 2 = -(x - m)^2 + m^2 + 2$$

باید رأس سهمی  $(x = m)$  داخل بازه  $x > -\frac{3}{2}$  نباشد، پس:

$$m^2 + 2 \leq \frac{13}{2} \rightarrow m \leq -\frac{3}{2} \rightarrow m = -2 \Rightarrow y_2 = -(x + 2)^2 + 6$$

$$f^{-1}(-19) \Rightarrow -(x + 2)^2 + 6 = -19 \Rightarrow (x + 2)^2 = 25 \xrightarrow{x > -\frac{3}{2}} x = 3$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta' + 1 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-a}{2a} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 2x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha', \beta' = -2, \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha, \beta = -\frac{3}{2}, 2 \Rightarrow \frac{b}{2} = \alpha\beta = -3 \Rightarrow b = -6$$

$$\left[\frac{ab}{4}\right] = \left[\frac{-6}{4}\right] = -2$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f\left(-\frac{5}{4}\right) = 2\left[-\frac{5}{4}\right] - \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{5}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{5}{4}$$

$$f\left(-\frac{7}{4}\right) = 2\left[-\frac{7}{4}\right] - \left(-\frac{7}{4}\right) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$\text{gof}\left(-\frac{5}{4}\right) = g\left(f\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = g\left(-\frac{7}{4}\right) = f\left(\left[-\frac{7}{4} + f\left(-\frac{7}{4}\right)\right]\right) = f\left(\left[-\frac{7}{4} - \frac{7}{4} + \frac{7}{4}\right]\right) = f(-6) = -6$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-\frac{f(x)}{f(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{f(x)}{f(x+2)} \leq 0$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 1$$

$$f(x+2) = 0 \Rightarrow x+2 = -2, 0, 1 \Rightarrow x = -4, -2, -1$$

X	-4	-2	-1	0	1	
	+	-	-	+	-	+

$$\xrightarrow{\in \mathbb{Z}} = 0, 1, -3$$



۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$10 = 12 - x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 10) \in f^{-1} \Leftrightarrow (10, 2) \in f$$

$$y = 12 - x \xrightarrow{\text{وارون}} y = 12 - x \Rightarrow 12 - x = \sqrt{x - 2} \sqrt{mx - 1} \xrightarrow{x = 10}$$

$$2 = \sqrt{10 - 2} \sqrt{10m - 1} \Rightarrow 4 = 10 - 2\sqrt{10m - 1} \Rightarrow \sqrt{10m - 1} = 3 \Rightarrow m = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 2} \sqrt{x - 1} \Rightarrow f(m + 2) = f(5) = 1$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & ; x \leq 0 \\ -x + 2 & ; x \geq 0 \end{cases}, g(x) = -2x - 2; f(f(-2)) = f(6) = -4$$

$$x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = -x + 2; g(f^{-1}(-2)) = g(4) = -10; g(f^{-1}(-2)) + f(f(-2)) = -14$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{1 + |x|} = \frac{3}{7} \xrightarrow{x < 0} \frac{x}{1 - x} = \frac{3}{7} \Rightarrow 7x = -3 + 3x \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \Rightarrow g\left(-\frac{3}{7}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{x}{1 + |x|} = \frac{5}{9} \xrightarrow{x > 0} \frac{x}{x + 1} = \frac{5}{9} \Rightarrow 9x = 5x + 5 \Rightarrow 4x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow g\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \frac{1}{2}$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow x - 3 = 2y \Rightarrow x = 2y + 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x + 3 \xrightarrow{-6} g(x) = 2x - 3$$

$$\begin{cases} y = \frac{x - 3}{2} \\ y = 2x - 3 \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 = \frac{x - 3}{2} \Rightarrow A: \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow OA = \sqrt{2}$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = \frac{x + 2}{2x - 1} \Rightarrow 2yx - y = x + 2 \Rightarrow x(2y - 1) = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y + 2}{2y - 1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{2x - 1} = f(x)$$

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f \circ f(x) = x$$

$$f^{-1} \circ f^{-1} \circ f^{-1}(x) = f \circ (f \circ f)(x) = f(x) \xrightarrow{x = 4} f(4) = \frac{4 + 2}{8 - 1} = \frac{6}{7}$$



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = (\sqrt{x} - 1)^2 \xrightarrow{x \geq 1} \sqrt{y} = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y} + 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = (\sqrt{x} + 1)^2$$

$$g(g(1)) = g(4) = 9$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

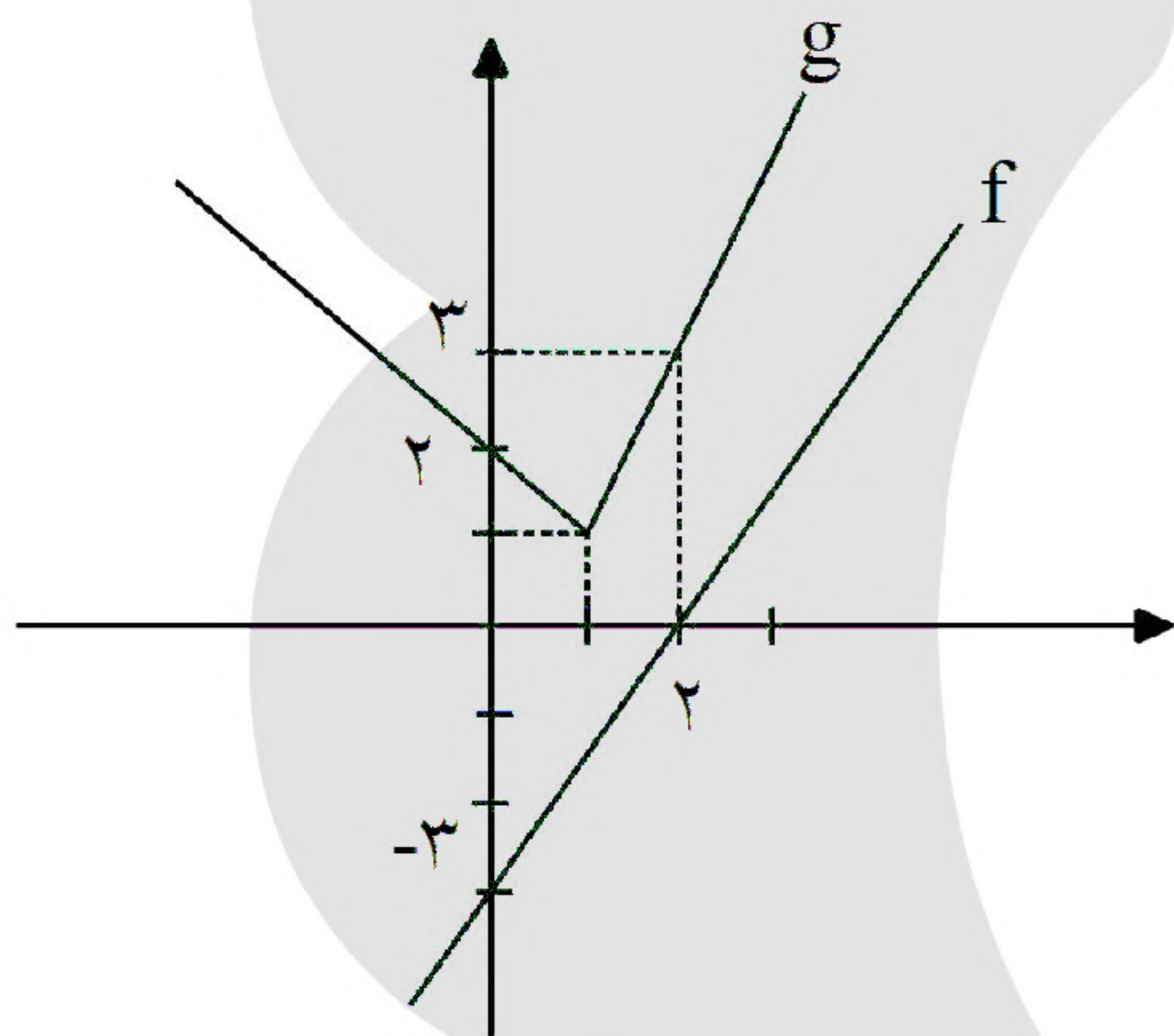
۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$g(f(g(x+2))) = 0 \xrightarrow{\text{با توجه به نمودار}} f(g(x+2)) = 2$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2}g(x+2) - 1 \right| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}g(x+2) - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} g(x+2) = -2 \\ \text{یا} \\ g(x+2) = 6 \end{cases}$$

انتقال افقی، تعداد ریشه‌ها را تغییر نمی‌دهد و با توجه به نمودار که تابع  $g$  با دامنه  $\mathbb{R}$  اکیداً صعودی است. هر کدام از معادلات بالا یک جواب دارد.

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$g \circ g(0) = g(2) = 3$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x - 3$$

$$f^{-1}(-2) = ? \Rightarrow f(?) = -2$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - 3 = -2 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = ?$$

$$x < 1 \Rightarrow g(x) = -x + 2 \Rightarrow g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{حکم} = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y(-2) = 24 - 4 - 11 = 9 \Rightarrow (-2, 9) \in f \Rightarrow (9, -2) \in f^{-1}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-2 < \frac{1-3x}{x+1} < 0 \xrightarrow{+1} -1 < \frac{2-2x}{x+1} < 1$$

$$\Rightarrow \left| \frac{2-2x}{x+1} \right| < 1 \Rightarrow |2x-2| < |x+1| \Rightarrow (2x-2)^2 < (x+1)^2 \Rightarrow (2x-2)^2 - (x+1)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (2x-2-x-1)(2x-2+x+1) < 0 \Rightarrow (x-3)(3x-1) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < x < 3 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[ \frac{x}{2} \right] = 0 \text{ یا } 1$$



۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع داده شده اکیداً صعودی است، پس وارون خود را روی خط  $y = x$  قطع می‌کند.

$$x^3 + 3x - 12 = x \Rightarrow x^3 + 2x - 12 = 0$$

داریم:

$x = 2$  جواب معادله بالا است:

$$x^3 + 2x - 12 = (x - 2)(x^2 + 2x + 6) = 0$$

$\Delta < 0$

پس  $x = 2$  تنها جواب حقیقی معادله مذکور است. یعنی نقطه تقاطع تابع داده شده با وارونش  $(2, 2)$  است. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات  $2\sqrt{2}$  است.

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = |x + 1| - 3|x - 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7 & ; x < -1 \\ 4x - 5 & ; -1 \leq x < 2 \\ -2x + 7 & ; x \geq 2 \end{cases}$$

تابع روی بازه  $[2, +\infty)$  نزولی است:

$$f(x) = -2x + 7 ; x \geq 2 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}(x - 7) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2} ; x \leq 3$$

$$g(2x) = 5x^2 + 11 \Rightarrow g(x) = \frac{5x^2}{4} + 11$$

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مینیم آن ۱۱ است و اگر ۷ واحد هم به سمت راست برود باز همان است.

$$f^{-1}(-1) = -2 \Rightarrow f(-2) = -1 \Rightarrow -8 + 2 + 1 \neq -1$$

گزینه ۱:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8} \Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}$$

گزینه ۲:

$$\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{-1}{3} < x \leq 2 \Rightarrow -1 < 3x \leq 6$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$[3x] = -1, 0, 1, \dots, 6$$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2})}{3(\sqrt{2}) - \sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(f(\sqrt{2})) = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

از داخلی ترین تابع شروع می کنیم:

$$f(f(f(\sqrt{2}))) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

راه دوم:

نکته: در تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$  اگر  $d = -a$  داریم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow fof(x) = x$$

$$(fofof)(\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس:

$$f(x) = x^2 \sqrt{x^2} = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x \leq 0 \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تابع پایینی نزولی است پس باید وارون این قسمت را بیابید. چون دامنه این قسمت  $x \leq 0$  است پس برد  $y \geq 0$  است. در تابع وارون جای دامنه و برد باید عوض شود.

$$y = -x^3 \Rightarrow -y = x^3 \Rightarrow -\sqrt[3]{-y} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x} \quad \text{و } x \geq 0$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع اکیداً صعودی است، پس وارون خود را روی خط  $y = x$  قطع می کند.

$$\sqrt{x+3} - 1 = x \Rightarrow \sqrt{x+3} = x+1$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ میرسانیم}} x^2 + 2x + 1 = x + 3 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{ق ق } x = 1 \\ \text{غ ق ق } x = -2 \end{cases}$$

$$M(1, 1) \Rightarrow MO = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} \Rightarrow MO = \sqrt{2}$$





۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ضابطه‌های fog و gof را به دست می‌آوریم:

$$fog = \begin{cases} -1 & ; x < -\sqrt{2} \text{ یا } x > \sqrt{2} \\ 1 - x^2 & ; -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$gof = \begin{cases} 0 & ; x < -1 \\ 1 - x^2 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; x > 1 \end{cases}$$

$$(gof - fog)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; -\sqrt{2} \leq x \leq -1 \text{ یا } 1 \leq x \leq \sqrt{2} \\ 0 & ; \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پس داریم:

بیشترین مقدار این تابع به ازای  $x = \pm\sqrt{2}$  و برابر ۱ به دست می‌آید.

۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قرینه  $y = 2 + \sqrt{x-1}$  نسبت به خط  $y = x$  تابع وارون آن است.

$$y = 2 + \sqrt{x-1} \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} y^2 - 4y + 4 = x - 1$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{واحد در جهت } x \text{ مثبت}} y = (x - 2 - 2)^2 + 1 \xrightarrow{\text{واحد در جهت } y \text{ منفی}} g(x) = (x - 4)^2 + 1 - 3$$

$$\Rightarrow g(x) = (x - 4)^2 - 2 \Rightarrow g(4) = (4 - 4)^2 - 2 = -2$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 \lfloor 3x \rfloor - 1) = -1 \Rightarrow \text{گزینه ۳ نادرست است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (2 \lfloor 3x \rfloor - 1) = 1 \Rightarrow \text{گزینه‌های ۱ و ۴ نادرست هستند.}$$

بنابراین با حذف گزینه‌های ۱ و ۳ و ۴، گزینه ۲ درست است.

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ترکیب توابع و مفهوم وارون یک تابع داریم:

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(-9) = f^{-1}(g^{-1}(-9))$$

$$g^{-1}(-9) = b \Rightarrow g(b) = -9 \Rightarrow \frac{3-b}{2} = -9 \Rightarrow b = 21$$

$$f^{-1}(21) = \alpha \Rightarrow f(\alpha) = 21 \Rightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 9 = 21 \xrightarrow{x \geq 2} \alpha = 6$$



۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

روش اول: نیمساز ناحیه دوم  $y = -x$  است بنابراین نقطه موردنظر در تابع وارون برابر است با: (چون در ربع دوم است باید  $a$  منفی باشد)

$$(a, -a) \in f^{-1} \Rightarrow (-a, a) \in f \Rightarrow f(-a) = a$$

$$\Rightarrow -a + \frac{1}{2a} = a \Rightarrow \frac{1}{2a} = 2a \Rightarrow 2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} & \text{قق} \\ a = -\frac{1}{2} & \text{قق} \end{cases}$$

روش دوم:

$$f^{-1}(x) = -x \quad f(x) = x - \frac{1}{2x}$$

بد  $x = -2$

$$f^{-1}(-1) = 1 \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - 1$$

$x = -\frac{1}{2}$

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{خوب} = -\frac{1}{2}$$

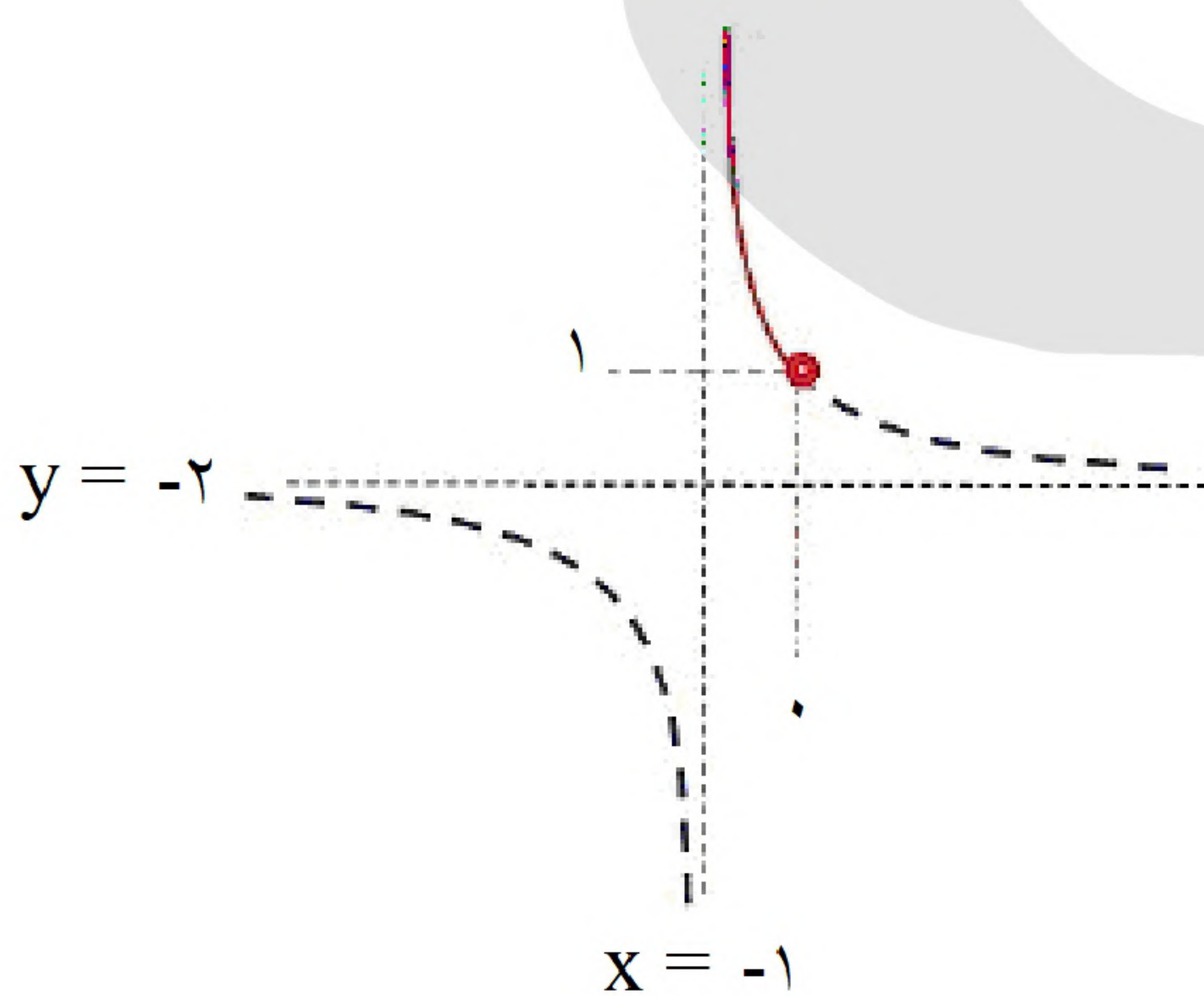
$$x + 2\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$x + 2\sqrt{x} = 15 \Rightarrow x = 9$$

$$g(3) + g(15) = 1 + 9 = 10$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$0 \leq x - [x] < 1 \xrightarrow{\times (-1)} -1 < [x] - x \leq 0$$

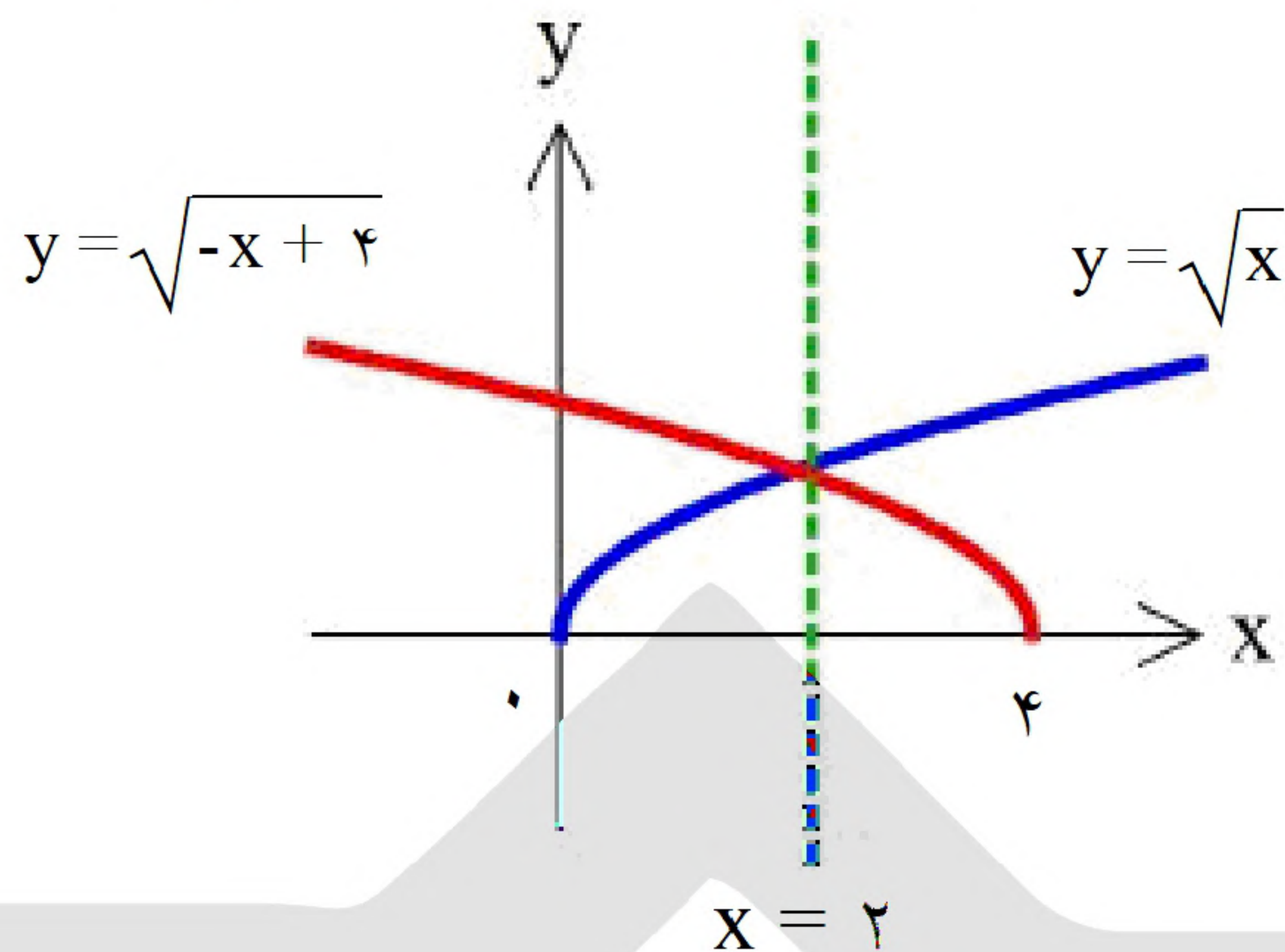
$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} (-1, 0], \quad x \neq -1 \xrightarrow{g} \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\text{اشتراک } (-1, 0] \xrightarrow{g} [1, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{-2x + 1}{x + 1}$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باید به جای  $x$ ،  $x - 4$  قرار دهیم (۴ واحد به طرف راست) و سپس حاصل را قرینه کنیم (قرینه نسبت به محور  $y$  ها). دو نمودار  $y = \sqrt{x}$  و  $y = \sqrt{-(x - 4)}$  را رسم می‌کنیم.



$$f^{-1}(20) = ?$$

$$x + \sqrt{x} = 20 \Rightarrow \sqrt{x} = 20 - x \Rightarrow x^2 - 41x + 400 = 0$$

$$(x - 25)(x - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 16 & \text{ق ق} \\ x = 25 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$g^{-1}(16) = ?$$

$$\frac{9x + 6}{1 - x} = 16 \Rightarrow 16 - 16x = 9x + 6 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}(x) = -x \Rightarrow f(-x) = x$$

$$-x + \frac{2}{x} = x \Rightarrow \frac{2}{x} = 2x \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نیمساز ناحیه چهارم  $y = -x$  است.

دامنه  $x < 0$  است پس  $x = -1$  قابل قبول است.

$$(-1, 1) \in f \Rightarrow (1, -1) \in f^{-1}$$

پس طول تقاطع  $x = 1$  است.

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  $x$  و  $y$  آن با  $g(x)$  معکوس است.

$$f(x) = x + \sqrt{x} \Rightarrow g(6) \Rightarrow f(x) = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 6) \in f \Rightarrow g(6) = 4$$

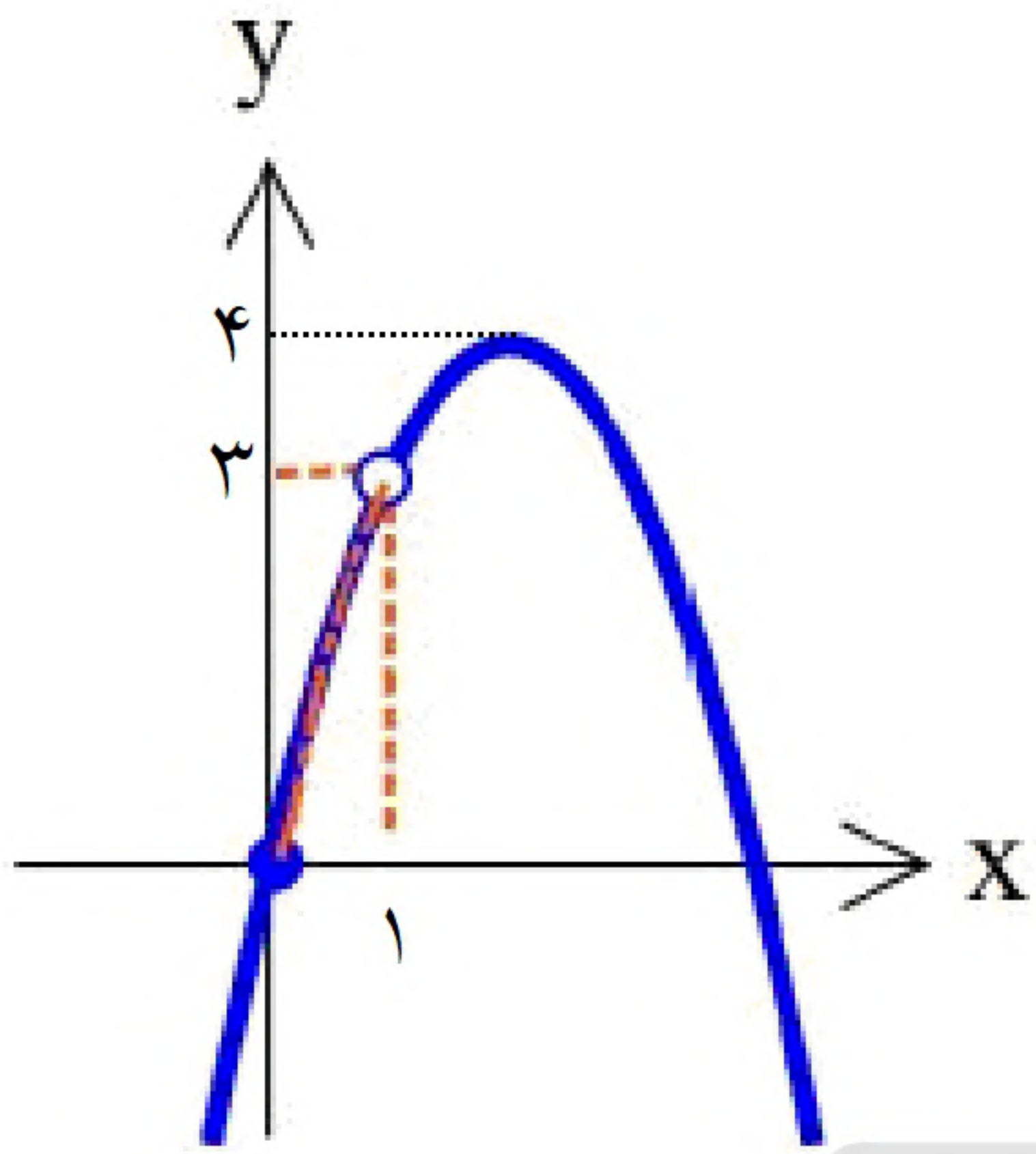
$$g(12) \Rightarrow f(x) = 12 \Rightarrow x + \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow (9, 12) \in f \Rightarrow g(12) = 9$$

$$g(6) + g(12) = 13$$



«بانک سوال مؤسسه یاوران دانش»

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



باید صدق کند  $R_{f(x)} = D_{g(x)}$

$$R_{f(x)} = \{x \mid 0 \leq 2x - [2x] < 1\} \Rightarrow \begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = -1 + 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow R_f = [0, 3)$$

g در این بازه صعودی است

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$12 \Rightarrow x \rightarrow x - 12 \text{ واحد در جهت مثبت محور } x \text{ ها}$$

$$2 \Rightarrow y \rightarrow y + 2 \text{ واحد در جهت مثبت محور } y \text{ ها}$$

$$\sqrt{x - 12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x - 12} \geq 0 \Rightarrow x \geq 12$$

دامنه جواب

$$\sqrt{x - 12} = \sqrt{x} - 2 \Rightarrow x - 12 = x - 4\sqrt{x} + 4 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 16 \Rightarrow \sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16$$

$$x = 16 \Rightarrow y = 4$$

$$A(16, 4), B(0, 0) \Rightarrow AB = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{2^8 + 2^4} = \sqrt{2^4(2^4 + 1)} = 4\sqrt{17}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 1} \Rightarrow \begin{cases} 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \\ x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1 \end{cases}$$

$$D_f = [-3, 1) \cup (1, 3]$$

$$(k - 2, 3k + 2) \subset D_f \Rightarrow \begin{cases} \text{اشتراک ندارد} \\ \begin{cases} k - 2 \geq 1 \Rightarrow k \geq 3 \\ 3k + 2 \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{1}{3} \end{cases} \\ \text{یا} \\ \begin{cases} 3k + 2 \leq 1 \Rightarrow k \leq -\frac{1}{3} \Rightarrow k \in [-1, -\frac{1}{3}] \\ k - 2 \geq -3 \Rightarrow k \geq -1 \end{cases} \end{cases}$$

بهترین گزینه، گزینه ۴ است.



۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \quad \left. \vphantom{g^{-1}} \right\} g^{-1} \text{ of } = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

$$\Rightarrow (g^{-1} \text{ of } f) = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

$$R = \{2, -1\}$$

۴۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$(g^{-1} \text{ of } f^{-1})(\lambda) = g^{-1}(f^{-1}(\lambda))$$

$$f(x) = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}x = \lambda + 4 \Rightarrow x = \frac{5}{2}(\lambda + 4) \Rightarrow f^{-1}(\lambda) = \frac{5}{2}(\lambda + 4)$$

$$g(x) = 30 \Rightarrow x^3 + x = 30 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow g^{-1}(30) = 3$$

۴۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. کافی است عرض محل برخورد  $f$  با وارون  $g^{-1}$  را به دست آوریم:

$$g(x) = \frac{x-9}{2} = y \Rightarrow x-9 = 2y \Rightarrow x = 2y+9 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g^{-1}(x) = 2x+9 \\ f(x) = x^2 - 2x - 3, x \geq 1 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 2x + 9 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{قق} \\ x = -2 & \text{غقق} \end{cases} \Rightarrow y = 2(6) + 9 = 21$$

۴۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\} \Rightarrow \text{gof}^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\} \Rightarrow \frac{g}{\text{gof}^{-1}} = \left\{ \left(5, \frac{6}{3}\right), \left(4, \frac{2}{1}\right) \right\} = \{(5, 2), (4, 2)\}$$