

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha, \beta > 0$$

راه ۱:

$$(\alpha = \beta \text{ حالت تساوی}) \alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$(x^2 + 2) + \frac{9}{x^2 + 2} \geq 6 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow f(k) = f(4) = 16/5$$

راه ۲:

$$x^2 + 2 = t; t \geq 2$$

$$y = t - 2 + \frac{9}{t} \Rightarrow t^2 - (2 + y)t + 9 = 0$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow (2 + y)^2 - 36 \geq 0 \xrightarrow{y + 2 > 0} 2 + y \geq 6 \Rightarrow y \geq 4 \Rightarrow f(4) = 16/5$$

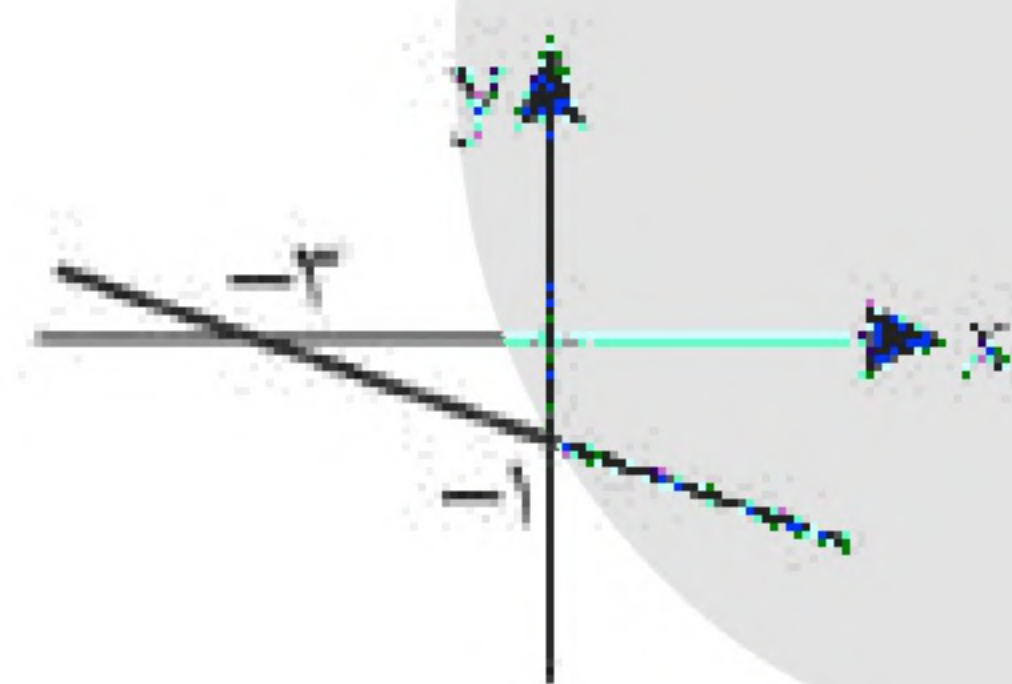
(در حالت $x^2 + 2 = 3$ حالت $y = 4$ برقرار است.)

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x + h$$

$$\frac{f^{-1}(-2) = 3}{f(3) = -2} \rightarrow -2 = -\frac{1}{3} \times 3 + h \Rightarrow h = -1 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x - 1$$

مطابق شکل، $f(x)$ از ناحیه اول نمی‌گذرد:



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با رسم نمودار تابع $f(x)$ متوجه می‌شویم که این تابع یک‌به‌یک است.

$$-4 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -x + a - 3 \\ g(x) = b(x + 4) + 3 = bx + 4b + 3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{f(x) = g(x)} \begin{cases} b = -1 \\ a - 3 = 4b + 3 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

$$g(a) = g(2) = -|2| + 3 = -3$$

$$f(b) = f(-1) = 1 + 2 - 3 = 0 \Rightarrow g(2) + f(-1) = -3$$



۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = (x+1)^2(x+3)^2 = (x^2 + 4x + 3)^2$$

x - 2 و x + 2 را در تابع f جایگزین می‌کنیم:

$$f(2-x) = (x^2 - 4x + 4 + 8 - 4x + 3)^2 = (x^2 - 8x + 15)^2$$

$$f(x+2) = (x^2 + 4x + 4 + 4x + 8 + 3)^2 = (x^2 + 8x + 15)^2$$

$$f(2-x) - f(x+2) \stackrel{\text{اتحاد مزدوج}}{=} (x^2 - 8x + 15 + x^2 + 8x + 15) \times (x^2 - 8x + 15 - x^2 - 8x - 15)$$

$$\Rightarrow \text{حاصل نهایی} = 2(x^2 + 15)(-16x) = -32x(x^2 + 15)$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با استفاده از اتحاد $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ تابع f را ساده می‌کنیم.

$$f(x) = (x-2)^3 - x^3 + 4x = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - x^3 + 4x$$

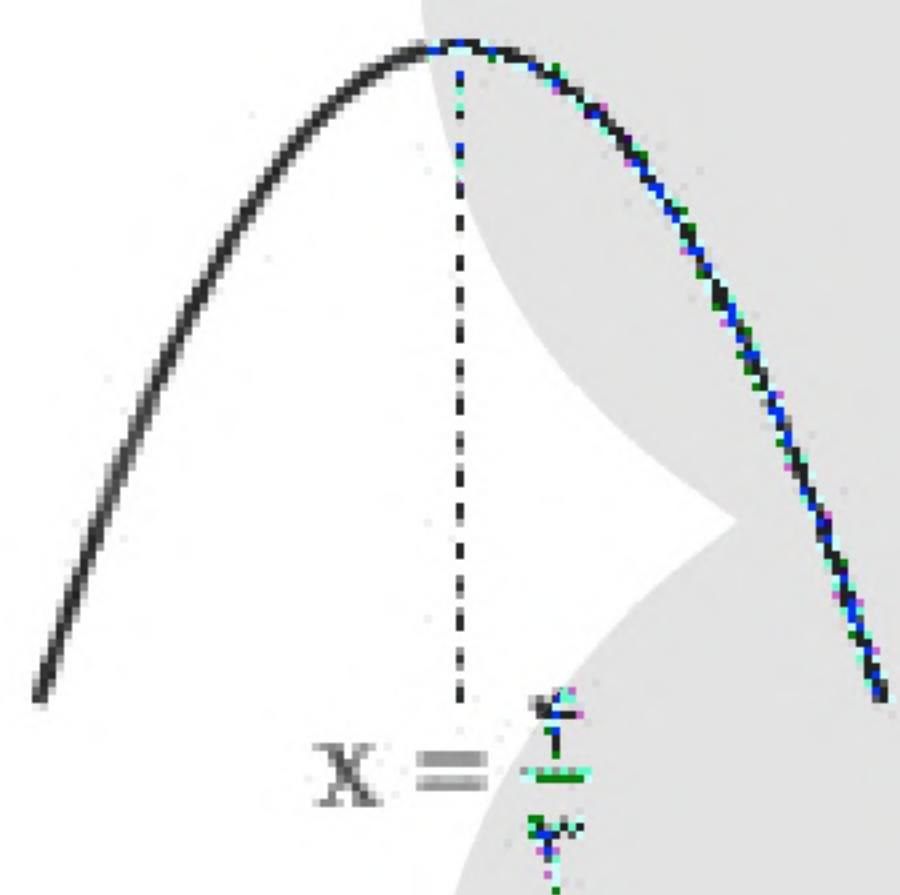
$$f(x) = -6x^2 + 16x - 8$$

طول رأس سهمی مقابل را می‌یابیم.

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = -\frac{16}{2(-6)} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

بنابراین در بازه $(-\infty, a]$ که تابع f وارون‌پذیر (یک به یک) است، حداکثر a همان طول رأس سهمی است.

$$\Rightarrow a_{\max} = \frac{4}{3}$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$D_h = D_f = \mathbb{R} - \{3\} \text{ و برای هر } x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$h(x) = \frac{5x^2 - 15x}{x-3} = \frac{5x(x-3)}{x-3} = 5x = f(x)$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f(1000) = \frac{1000}{999} \Rightarrow fof(1000)$$

$$= f\left(\frac{1000}{999}\right) = \frac{\frac{1000}{999}}{\frac{1000}{999} - 1} = 1000 \Rightarrow fofof(1000) = fof(1000) = 1000$$



۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

وارون خط، یعنی $y = x - 3$ را با نمودار خود تابع $f \circ f$ قطع می‌دهیم.

$$f \circ f(x) = x - 3 \Rightarrow \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 1}{\frac{2x+1}{x-1} - 1} = x - 3 \Rightarrow \frac{5x+1}{x+2} = x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -7$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

عملیات جبری بین دو تابع، در X های مشترک بر روی Y های دو تابع اعمال می‌شود، پس:

$$f = \{(2, -1), (3, 4), (0, 6)\}, g = \{(-2, 4), (3, -9), (0, -2)\}$$

$$D_f \cap D_g = \{3, 0\}$$

$$2f + g = \{(3, 2 \times 4 + (-9)), (0, 2 \times 6 + (-2))\} = \{(3, -1), (0, 10)\}$$

$$2f + g \text{ برد} = \{-1, 10\} \Rightarrow \text{حاصل ضرب اعضا} = -1 \times 10 = -10$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شرط این که دامنه تابع برابر R باشد این است که عبارت زیر رادیکال در مخرج کسر همواره مثبت باشد یعنی باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$2 - m > 0 \Rightarrow m < 2 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 8 - 4(2 - m)(m - 1) < 0 \Rightarrow 8 - 4(2m - 2 - m^2 + m) < 0$$

$$\Rightarrow 8 - 12m + 4m^2 + 8 < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12m + 16 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 3m + 4 < 0 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = \emptyset \quad (2)$$

زیرا در عبارت $m^2 - 3m + 4$ شرط $\Delta < 0$ و $a > 0$ برقرار است و بنابراین این عبارت همواره مثبت است:

$$(1), (2) \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

پس به ازای هیچ مقدار m مکان ندارد دامنه تابع f برابر R باشد.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = v \Rightarrow f^{-1}(a) = g(v) = 5 \Rightarrow a = f(5) = 2$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x + 3 \end{cases} \Rightarrow g(x) - f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$$

وارون $g - f$ برابر $-2x + 2$ است. این ضابطه با $f(-2x)$ برابر است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

گزاره «الف» صحیح است زیرا توابعی که از مجموعه A به مجموعه B می‌توان نوشت به طوری که $f(b) = 4$ باشد، به صورت $f = \{(a, 0), (b, 4), (c, 0)\}$ خواهند بود که در این صورت مؤلفه دوم زوج‌های مرتب $(a, 0)$ و $(c, 0)$ هر یک می‌توانند ۵ حالت داشته باشند که در نتیجه تعداد توابع مطلوب برابر است با: $5 \times 5 = 25$.

گزاره «ب» صحیح است زیرا:

$$(v, m^2) \in A, (v, m+2) \in A \Rightarrow m+2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m = 2, m = -1$$

$m = -1 \Rightarrow A = \{(v, 1), (4, 1), (-2, -1), (v, 1), (-1, 6), (-2, 5)\}$ تابع نیست

$m = 2 \Rightarrow A = \{(v, 4), (4, 1), (-2, 2), (v, 4), (2, 6), (1, 5)\}$ تابع است

پس رابطه A فقط به ازای $m = 2$ تابع است.

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$۱) f(2) = g(2) \Rightarrow 3 + 2^{2a+b} = 5 \Rightarrow 2a+b=1$$

$$۲) f^{-1} \circ g(1) = 3 \Rightarrow g(1) = g(3) \Rightarrow 11 = 3 + 2^{3a+b} \Rightarrow 3a+b=3$$

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} \begin{cases} 2a+b=1 \\ 3a+b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow a-b=5$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون می‌خواهیم نقطه‌ی تلاقی تابع f^{-1} را با محور y ها تعیین کنیم، یعنی $f^{-1}(0)$ موردنظر است. طبق تعریف تابع وارون خواهیم داشت:

$$f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

$$f^{-1}(0) = a \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow a^4 + 2a^3 + a^2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow a^3(a+2) + (a-2)(a+2) = 0 \Rightarrow (a+2)(a^3 + a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (a+2)(a-1)(a^2 + a + 2) = 0 \xrightarrow[\text{دامنه تابع}]{\text{با توجه به}} \begin{cases} a=1 \text{ صحیح} \\ a=-2 \text{ غلط} \end{cases}$$

توجه شود که عبارت $a^3 + a - 2$ که مجموع ضرایب آن برابر صفر است، با تقسیم بر $(a-1)$ تجزیه می‌شود.



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دامنه‌ی تابع f برابر با $R - \{3\}$ می‌باشد. چون مخرج کسر $g(x)$ یک عبارت درجه ۲ می‌باشد ولی دامنه‌ی آن همان $R - \{3\}$ می‌باشد پس مخرج کسر به فرم $(x-3)^2$ می‌باشد. داریم:

$$x^2 + ax + b = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = 9 \end{cases}$$

حال برای برد تابع h داریم:

$$h(x) = -6x^2 + 9x + 3$$

$$S \begin{cases} \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4} \\ \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-153}{-24} = \frac{51}{8} \Rightarrow R_h = (-\infty, \frac{51}{8}] \end{cases}$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برد توابع درجه دوم به شکل کلی $y = ax^2 + bx + c$ وقتی $a < 0$ است، به صورت $(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}]$ است، پس برد

تابع $y = -6x^2 + 8x + 11$ به صورت زیر است:

$$(-\infty, \frac{4ac - b^2}{4a}] = (-\infty, \frac{-328}{-24}] = (-\infty, 13/66]$$

ولی چون زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، پس برد تابع به صورت $R_f = [0, \sqrt{13/66}]$ است که اعداد صحیح ۰، ۱، ۲ و ۳ در برد این تابع قرار دارند یعنی برد تابع شامل ۴ عدد صحیح است.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

اول $f^{-1}(3)$ را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = 3 \Rightarrow \frac{2x+1}{3} = 3 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow f^{-1}(3) = 4$$

$$g \circ f^{-1}(3) = g(f^{-1}(3)) = g(4)$$

حالا $g(4)$ را پیدا می‌کنیم:

$$\sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x-3 = 16 \Rightarrow x = 19$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ است پس:

$$f(x) = \frac{1}{[x] + [-x]} = \frac{1}{-1} = -1 \quad D_f = R - \mathbb{Z}$$

باید گزینه‌ای را انتخاب کنیم که دامنه‌اش $R - \mathbb{Z}$ و مقدار تابع هم همواره -۱ باشد. گزینه (۴) این ویژگی را دارد.



۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
ابتدا معادله‌ی توابع f و g را می‌نویسیم:

$$A(-۴, ۰) \quad B(۰, ۳)$$

$$m_{AB} = \frac{۳-۰}{۰-(-۴)} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow y - ۳ = \frac{۳}{۴}(x - ۰) \Rightarrow f(x) = \frac{۳}{۴}x + ۳$$

$$C\left(۰, \frac{۱}{۲}\right) \quad D(۱, ۰)$$

$$m_{CD} = \frac{\frac{۱}{۲}-۰}{۰-۱} = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x - ۱) \Rightarrow g(x) = -\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{۳}{۴}x + ۳\right)\left(-\frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۲}\right) = -\frac{۳}{۸}x^2 - \frac{۹}{۸}x + \frac{۳}{۲}$$

$$\max(f \cdot g)(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{۴\left(\frac{۳}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۸}\right) - \frac{۸۱}{۶۴}}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{-\frac{۹}{۴} - \frac{۸۱}{۶۴}}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۷۵}{۳۲}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f \circ f = \{(۲, ۳), (۳, -۱), (۰, ۱)\}$$

$$f^2 = \{(۱, ۱), (۲, ۰), (۳, ۱), (۰, ۹)\}$$

$$y = f \circ f + f^2 = \{(۲, ۳), (۳, ۰), (۰, ۱۰)\}$$

$$R_y = \{۳, ۰, ۱۰\} \Rightarrow \text{جمع اعضا} = ۱۳$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{\sqrt{۵-x}}{x-۲} \Rightarrow D_f = (-\infty, ۲) \cup (۲, ۵]$$

$$g = \{(-۴, ۳), (-۱, ۰), (۰, \sqrt{۵}), (۲, ۷), (۴, ۹), (۵, -۳), (۷, -۲)\}$$

$$D_g = \{-۴, -۱, ۰, ۲, ۴, ۵, ۷\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = ۰\} = \{-۴, ۰, ۴, ۵\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-۴, \frac{۳}{-۶ \times ۳}\right), \left(۰, \frac{\sqrt{۵}}{-۲ \times \sqrt{۵}}\right), \left(۴, \frac{۱}{۲ \times ۹}\right), (۵, ۰) \right\}$$

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left(-۴, -\frac{۱}{۶}\right), \left(۰, -\frac{۱}{۲}\right), \left(۴, \frac{۱}{۱۸}\right), (۵, ۰) \right\}$$

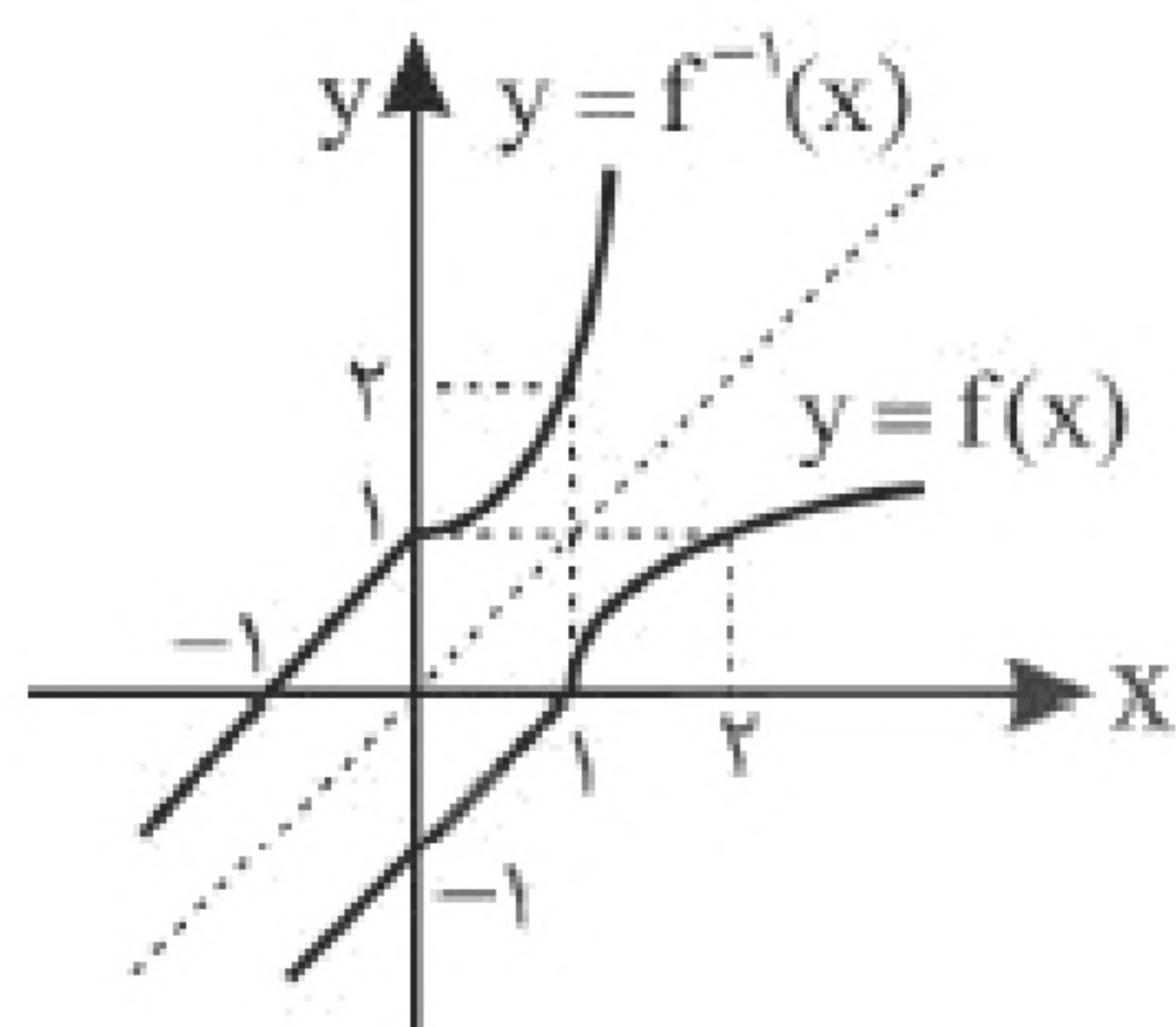
$$\frac{f}{g} \text{ مجموع اعضای برد تابع} = \left(-\frac{۱}{۶}\right) + \left(-\frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۱۸}\right) + (۰) = -\frac{۱۱}{۱۸}$$



۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو است:

قرینه‌ی نمودار $y = f(x)$ نسبت به خط $y = x$ ، نمودار $y = f^{-1}(x)$ است.



۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اگر مخرج کسر را تجزیه کنیم باید اعداد ۰ و ۱ و $\frac{2}{3}$ ریشه‌های مخرج باشند داریم:

$$x(ax^2 - 5x + 2) \xrightarrow{x=1} a - 5 + 2 = 0 \Rightarrow a = 3$$

پس داریم:

$$f(x) = \frac{x(3x - 5)}{x(x - 1)(3x - 2)}$$

$$f(-1) = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

$$f(-2) = \frac{-11}{24}$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

$$f(3) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(2x - 1) = \sqrt{4x^2 - 4x} \Rightarrow f(2x - 1) = \sqrt{(4x^2 - 4x + 1) - 1}$$

$$= \sqrt{(2x - 1)^2 - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر $(a, b) \in f$ باشد، آنگاه $(b, a) \in f^{-1}$ است. پس گزینه‌ای صحیح است که اگر جای طول و عرض آن را عوض کنیم در f صدق کند.

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2) \in f \Rightarrow (2, 1) \in f^{-1}$$



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

برای گزینه‌های ۱ و ۲ و ۴ مثال نقض ارائه می‌کنیم:

(۱) $(-۱, -۱)$ و $(۱, -۱)$

(۲) $(-۱, ۲)$ و $(۱, ۲)$

(۴) $(\frac{۱}{۲}, ۰)$ و $(۰, ۰)$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

عبارت زیر رادیکال یعنی $\frac{x^2+1}{3-|x-1|}$ باید همواره نامنفی باشد، صورت این کسر همواره مثبت است. پس باید شرط آن را بررسی کنیم که عبارت زیر رادیکال در مخرج مثبت و مخالف صفر باشد.

$$3 - |x - 1| > 0$$

برای حل نامعادله‌ی فوق، ۲ حالت در نظر می‌گیریم. اول اینکه عبارت قدرمطلق مثبت باشد:

$$\begin{aligned} 1) \quad |x-1| = x-1 \Rightarrow x \geq 1 \quad & \xrightarrow{|x-1|=x-1} 3 - |x-1| = 3 - (x-1) \\ & = 3 - x + 1 = 4 - x \Rightarrow 4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \Rightarrow 1 \leq x < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad |x-1| = -(x-1) \Rightarrow x < 1 \quad & \xrightarrow{|x-1|=-(x-1)} 3 - |x-1| = 3 + (x-1) = 2 + x \\ 2 + x > 0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow -2 < x < 1 \end{aligned}$$

با اجتماع ۲ بازه‌ی بالا $-2 < x < 4$ به دست می‌آید.

اگر می‌خواهید اینگونه تست‌ها را سریع‌تر حل کنید، به نکته‌ی زیر توجه کنید:
نکته: اگر c عدد حقیقی و مثبت باشد، داریم:

$$|x| < c \Rightarrow -c < x < c, \quad |x| > c \Rightarrow x > c \text{ یا } x < -c$$

حالا با استفاده از این نکته نامعادله را خیلی راحت‌تر حل می‌کنیم:

$$3 - |x - 1| > 0 \Rightarrow |x - 1| < 3$$

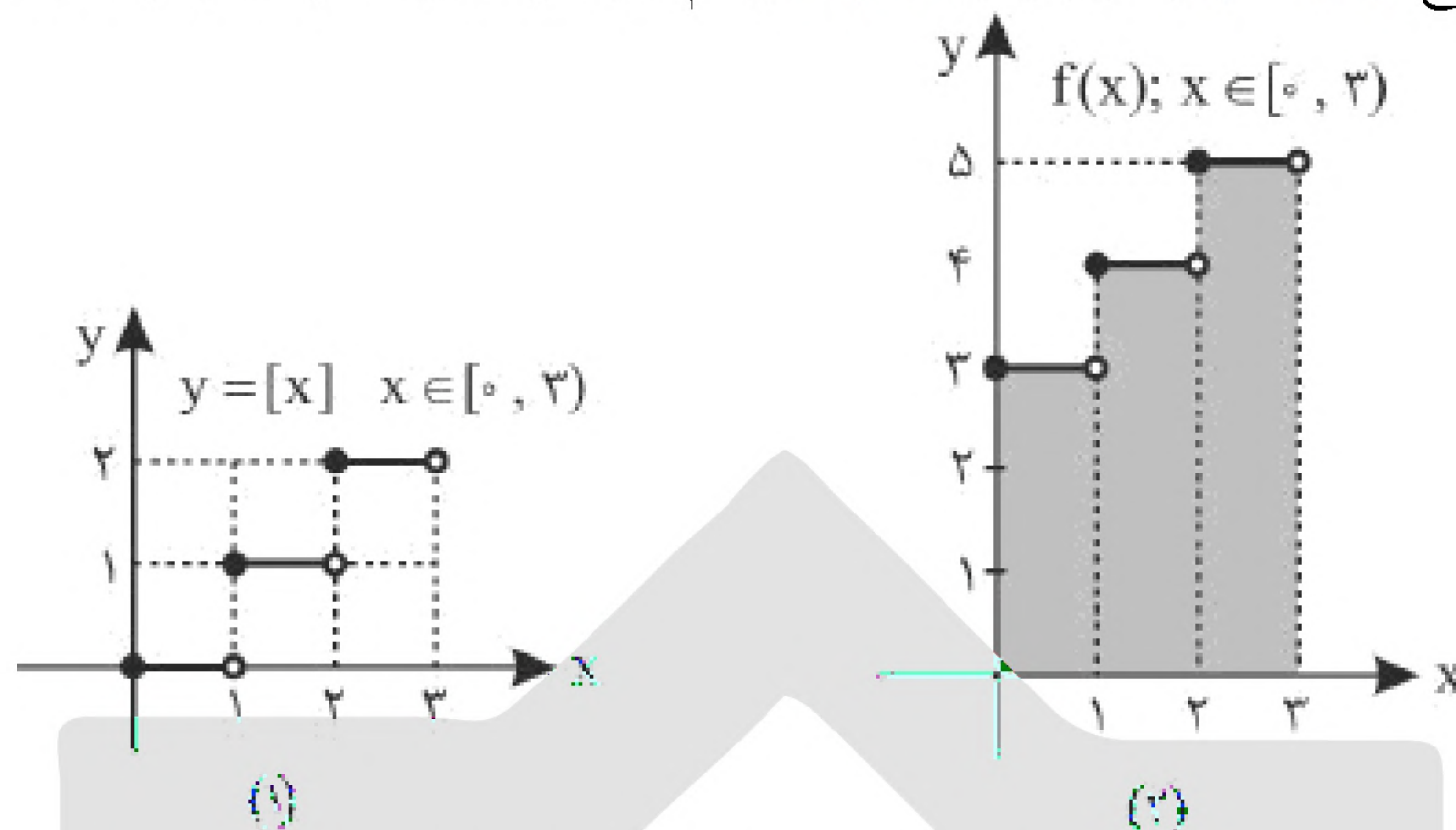
$$\xrightarrow{\text{طبق نکته}} -3 < x - 1 < 3 \xrightarrow{+1} -2 < x < 4$$



۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = [x + 3] = [x] + 3$$

پس کافی است نمودار تابع $y = [x]$ را در بازه $[0, 3)$ رسم کنید و آن را ۳ واحد به بالا انتقال دهیم:



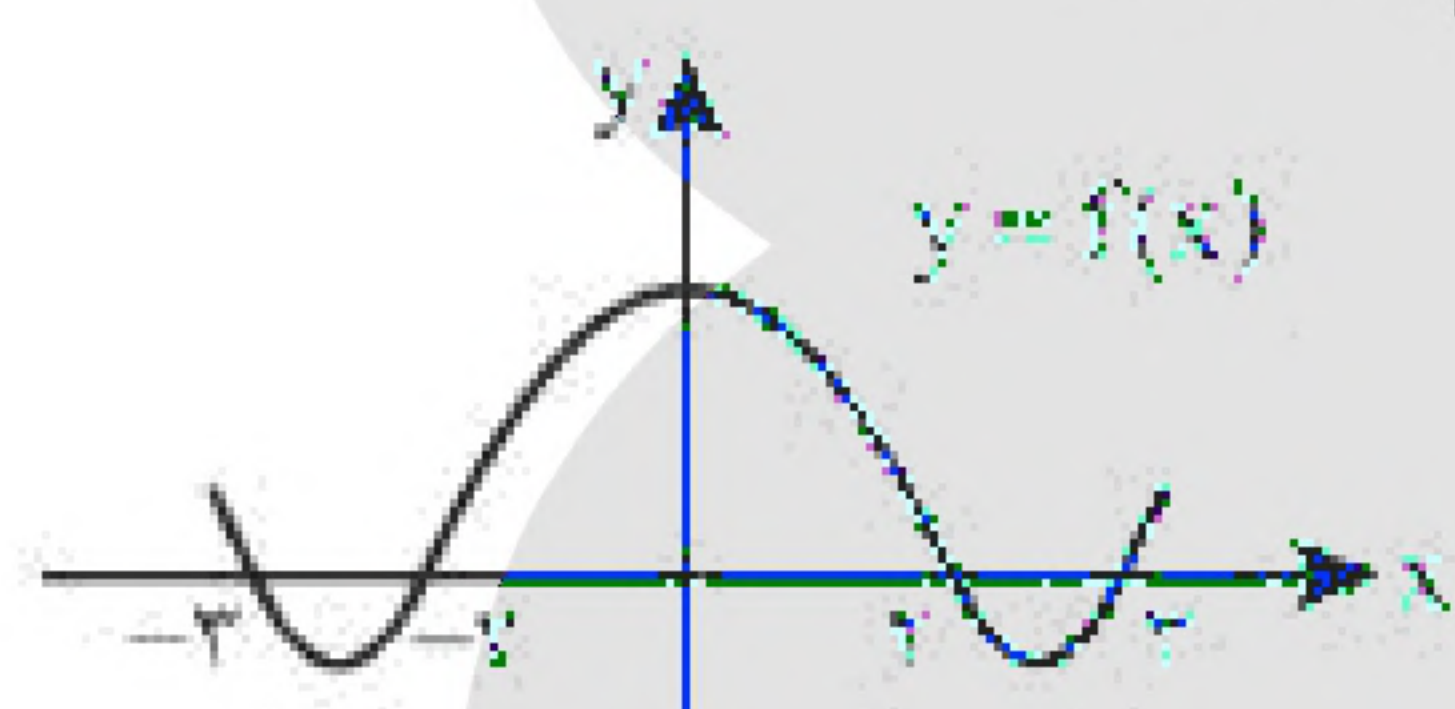
مساحت قسمت هاشور خورده در نمودار شماره (۲)، پاسخ مسئله است که برابر است با:

$$3 \times 1 + 4 \times 1 + 5 \times 1 = 12$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با رسم نمودار تابع $y = f(x)$ و رسم جدول تعیین علامت عبارت زیر رادیکال خواهیم داشت:



$$g(x) = \sqrt{(x + 2)f(x)} \Rightarrow (x + 2)f(x) \geq 0$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x + 2	-	0	+	+	+	+	+
f(x)	+	0	-	-	0	+	+
(x + 2)f(x)	-	0	+	+	0	+	+

$$D_g = [-3, 2] \cup [3, +\infty)$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نقاط برخورد روی نیمساز ناحیه اول و سوم است.

$$f(-1) = -1 \Rightarrow \frac{-1 + a}{-1 + b} = -1 \Rightarrow -1 + a = 1 - b \Rightarrow a + b = 2$$

$$f(4) = 4 \Rightarrow \frac{4 + a}{4 + b} = 4 \Rightarrow 4 + a = 16 + 4b \Rightarrow a - 4b = 12$$

بنابراین $a = 4$ و $b = -2$ ، پس $a - b = 6$.



۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$-2 \leq x < 1 \Rightarrow -4 \leq 2x < 2 \Rightarrow -3 \leq 2x + 1 < 3$$

پس دامنه $f(x)$ برابر $[-3, 3]$ است. حالا دامنه $f(\sqrt{x})$ را می‌خواهیم:

$$-3 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 9$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$g \circ f(x) = x^2 + 8x + 2$$

$$f(x) = t \Rightarrow g(t) = (2t - 2)^2 + 8(2t - 2) + 2 = 4t^2 + 8t - 10$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = x^3 - 2x\sqrt{x} + 1$$

$$f(1) = 0 \Rightarrow (1, 0) \in f \Rightarrow (0, 1) \in f^{-1}$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2f + 1 = \{(-1, 5), (3, 9), (2, -3), (0, 3)\}$$

$$f^2 - f = \{(-1, 2), (3, 12), (2, 6), (0, 0)\}$$

$$\frac{2f + 1}{f^2 - f} = \left\{ \left(-1, \frac{5}{2}\right), \left(3, \frac{3}{4}\right), \left(2, -\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$\text{حاصل ضرب مقادیر برد} : \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{16}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$$

$$\frac{1}{x-4} + \frac{1}{x+4} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-4} = \frac{-1}{x+4} \Rightarrow x+4 = -x+4$$

$$\Rightarrow x = -x \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس تابع به ازای ۵ عدد $\{0, \pm 3, \pm 4\}$ تعریف نمی‌شود.

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 3x - 2|x - 1| \Rightarrow f(2) = 6 - 2 = 4 \xrightarrow[\text{تابع یک به یک}]{f(a)=f(2)} a = 2$$

$$\Rightarrow f(b) = 3 \xrightarrow[\text{تابع یک به یک}]{f(b)=f(1)} b = 1$$



۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$y = f(x)g(x) = (x+1)(x-3)(3-[x]); -2 \leq x < 0$$

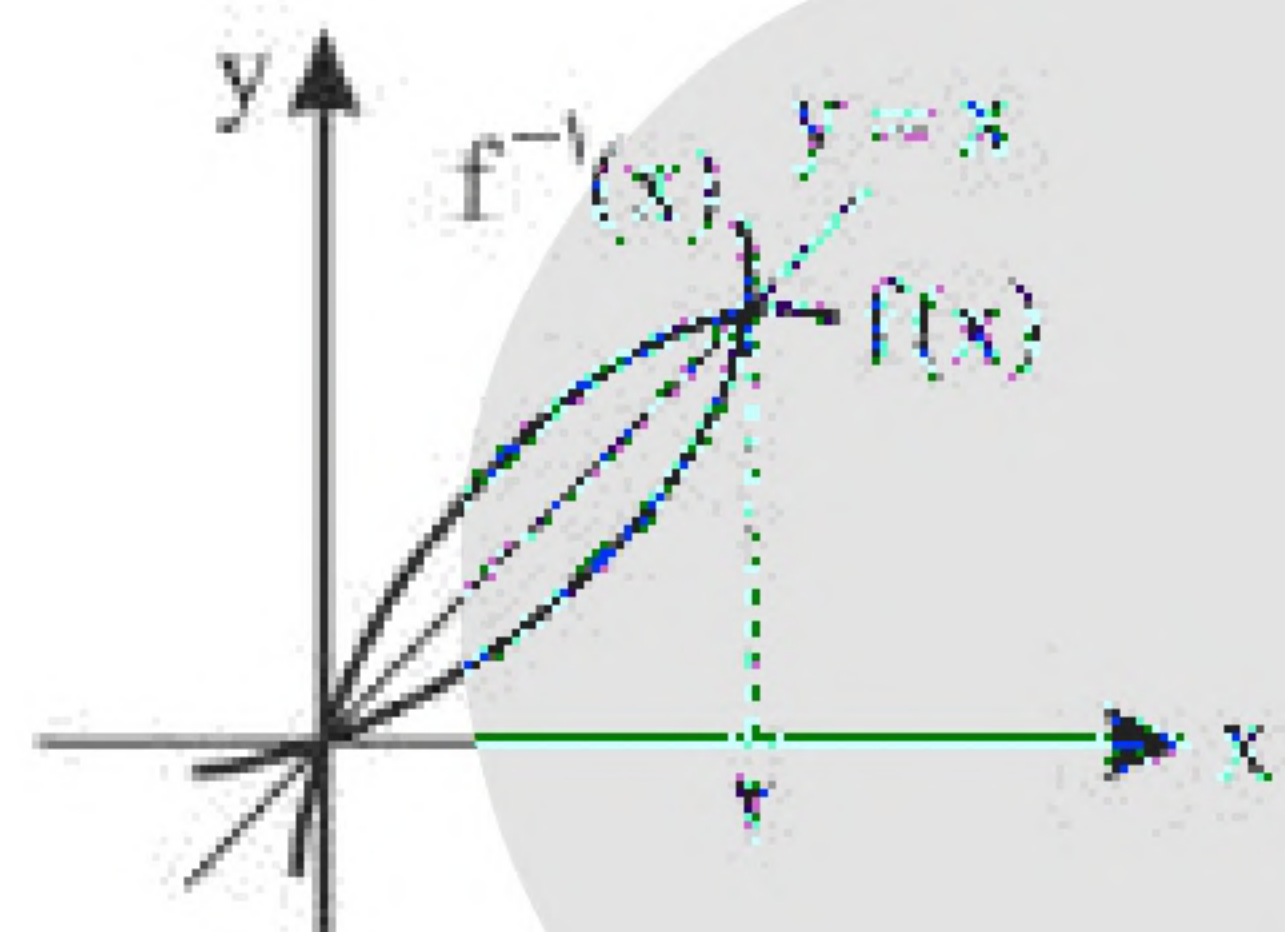
$$\begin{cases} -2 \leq x < -1 \Rightarrow y = (x+1)(x-3) \times 5 \Rightarrow y(-1) < y \leq y(-2) \Rightarrow 0 < y \leq 25 \\ -1 \leq x < 0 \Rightarrow y = (x+1)(x-3) \times 4 \Rightarrow y(0) < y \leq y(-1) \Rightarrow -12 < y \leq 0 \end{cases}$$

$$R_{\text{foy}} = (-12, 25]$$

دقت کنید در هر ۲ سهمی رأس خارج بازه داده شده است پس می‌توانیم ابتدا و انتهای بازه را قرار دهیم و در هر بازه، برد را به دست آوریم.

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است. به کمک نمودار $f^{-1}(x)$ می‌توانیم $x - f^{-1}(x)$ را تعیین علامت کنیم:



$$\text{شرط دامنه: } x f^{-1}(x) - x^2 \geq 0 \Rightarrow x(f^{-1}(x) - x) \geq 0$$

x	x	$f^{-1}(x) - x$	$x(f^{-1}(x) - x)$
$x < 2$	$x < 2$	$-$	$-$
$2 < x < 4$	$2 < x < 4$	$+$	$+$
$x > 4$	$x > 4$	$-$	$-$

$$\text{دامنه: } x \in [2, +\infty) \cup \{0\}$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ضلع مربع را a در نظر می‌گیریم. داریم:

$$x = 4a \Rightarrow a = \frac{x}{4}$$

$$y = a^2 \Rightarrow y = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{16}$$