

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی که $a+d=0$ باشد، توابع f و f^{-1}

با هم برابر بوده و نمودارهای آنها بر هم منطبق می‌شود، به عبارتی نمودار ب نسبت به خط $y=x$ متقارن خواهد بود.

پس در اینجا داریم: $a+d=0 \Rightarrow m^2+2m-15=0 \Rightarrow m=-5, 3$

به ازای $m=3$ تابع هموگرافیک فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$f(x) = \frac{9x+9}{-9x-9} = \frac{9(x+1)}{-9(x+1)} = -1 \quad (x \neq -1)$$

در واقع چون $ad-bc=0$ می‌شود، تابع هموگرافیک به صورت تابع ثابت درمی‌آید و وارون‌پذیر نمی‌شود که با فرض سؤال در تناقض است.

پس فقط $m=-5$ قابل قبول است.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع درجه دو هرگز بر روی R یک به یک و وارون‌پذیر نیست. یعنی این تابع نمی‌تواند درجه دو باشد:

$$m+4=0 \Rightarrow m=-4$$

بنابراین با تابع خطی $f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k$ طرفیم.

می‌دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط $y=x$ قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب -1 که خودش و وارونش برابر بوده و بی‌شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی $(-1, 7)$ است که روی خط $y=x$ نیست، نتیجه می‌گیریم این تابع خطی دارای شیب -1 بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در $(-1, 7)$ وارونش را قطع می‌کند. پس:

$$\text{شیب خط} : -1 \Rightarrow n+1 = -1 \Rightarrow n = -2$$

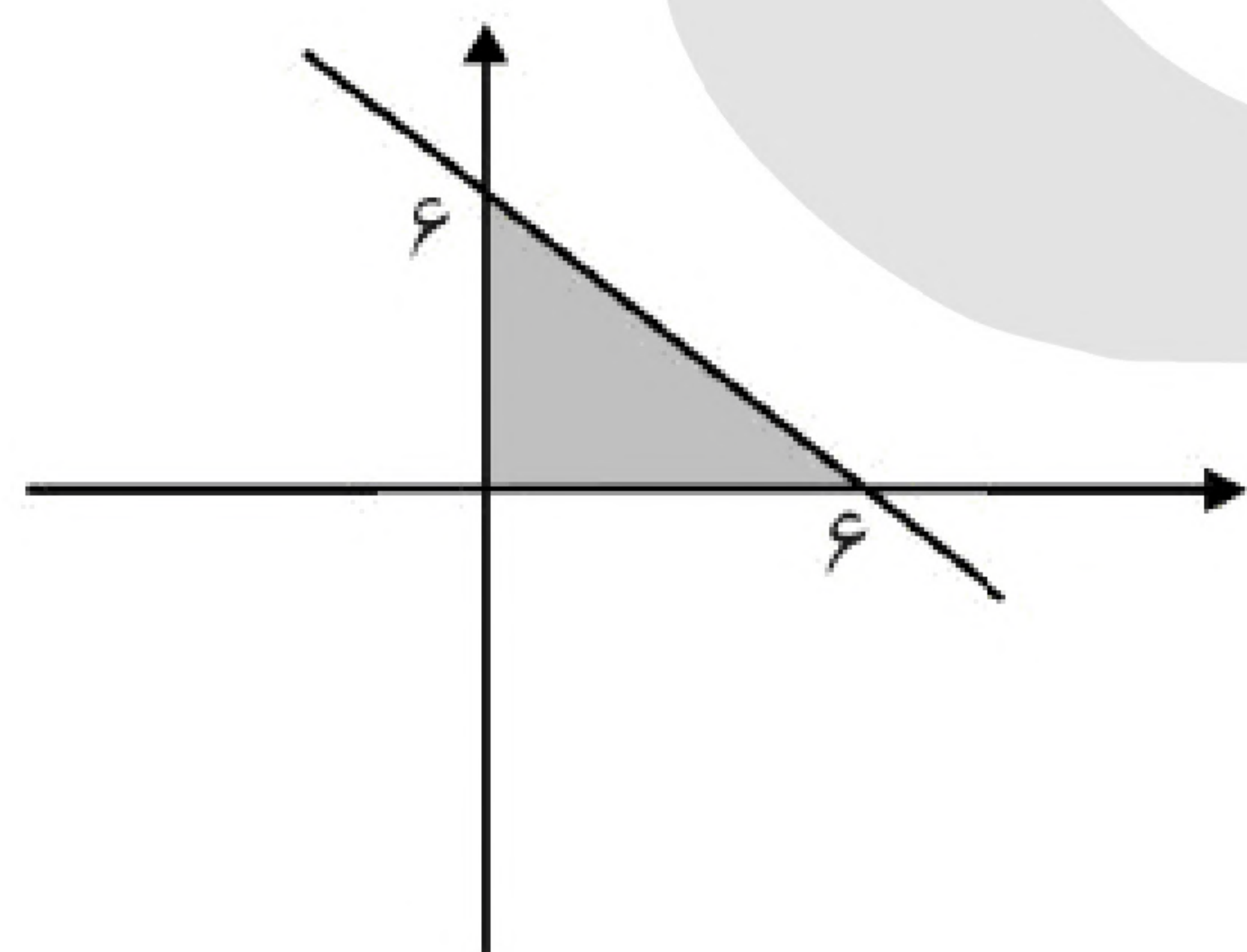
$$f(x) = (n+1)x - 4 - n + 2k \xrightarrow{n=-2} -x - 4 - (-2) + 2k \Rightarrow f(x) = -x - 2 + 2k$$

$$7 = -(-1) - 2 + 2k \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$$

حالا نقطه $(-1, 7)$ را در آن صدق می‌دهیم:

$$f(x) = -x - 2 + 2k \xrightarrow{k=4} -x - 2 + 8 \Rightarrow f(x) = -x + 6$$

چون f و f^{-1} با هم برابرند، پس:



$$f^{-1}(x) = -x + 6$$

$$S = \frac{6 \times 6}{2} = 18$$



۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون f همان است، پس $f(0) = 0$ یعنی:

$$3x^2 - [x] = [-x] + 4x \Rightarrow 3x^2 - 4x = [x] + [-x]$$

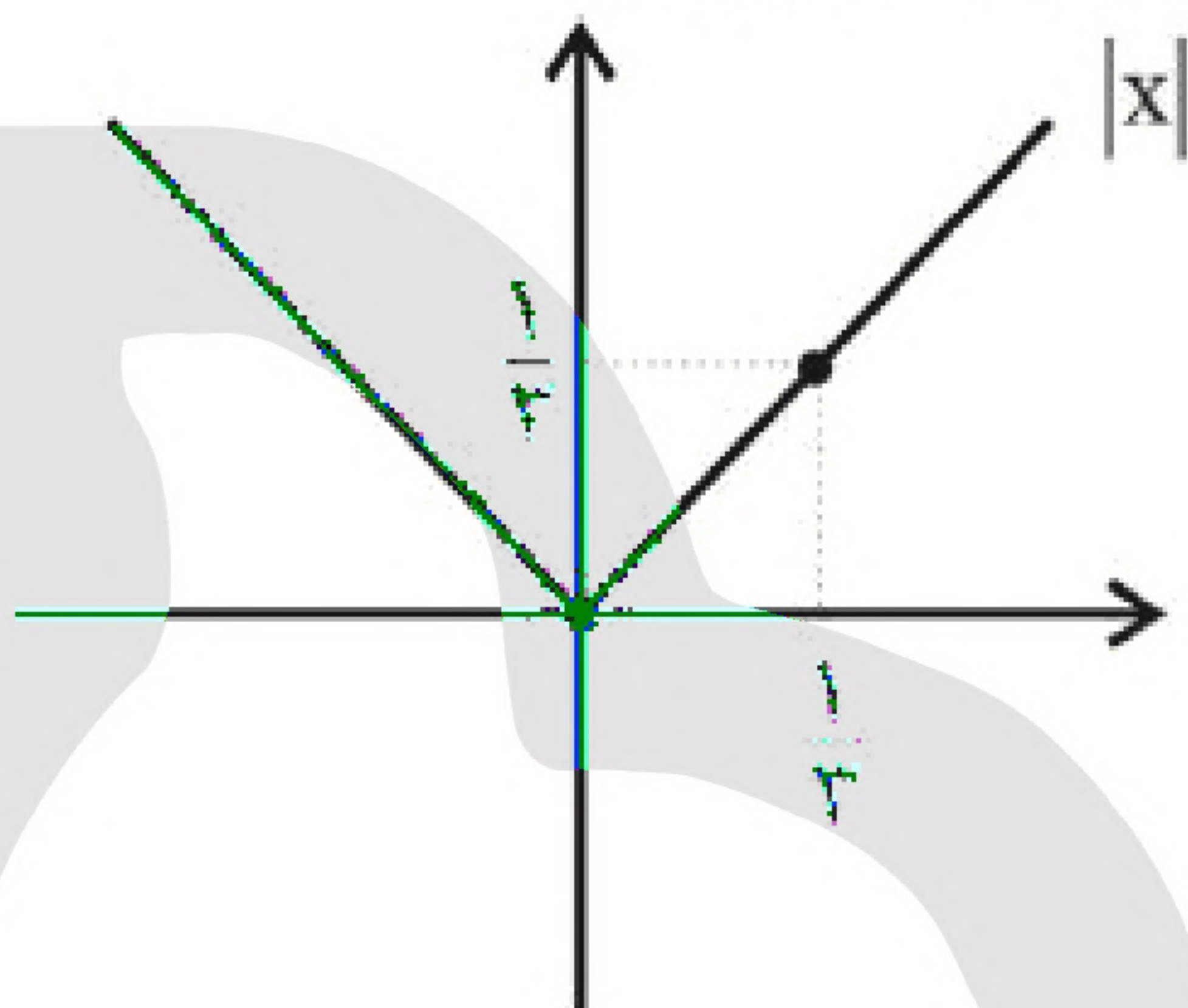
تابع $y = [x] + [-x]$ تابع معروفی است که به ازای اعداد صحیح، خروجی صفر و به ازای اعداد غیر صحیح، خروجی ۱- می‌دهد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x \in \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 0 \\ \frac{4}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$x \notin \mathbb{Z}: 3x^2 - 4x = -1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{3} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

در واقع تابع f ، یک تابع همانی دو عضوی به صورت $f = \left\{ (0, 0), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$ است و با توجه به نمودارهای

زیر، دو تلاقی در همین دو نقطه با نمودار $g(x) = |x|$ دارد:





۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f'(x)g(x) + \frac{1}{g(x)} = g'(x)f(x) + \frac{1}{f(x)} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{f'(x)g'(x) + 1}{g(x)}$$

$$= \frac{g'(x)f'(x) + 1}{f(x)} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} f''(x)g'(x) + f(x) = g''(x)f'(x) + g(x)$$

$$\Rightarrow f''(x)g'(x) - g''(x)f'(x) + f(x) - g(x) = 0$$

$$\Rightarrow f'(x)g'(x)(f(x) - g(x)) + (f(x) - g(x)) = 0 \Rightarrow (f(x) - g(x))(f'(x)g'(x) + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \\ f'(x)g'(x) + 1 = 0 \Rightarrow (f(x)g(x))' = -1 \end{cases}$$

پس توابع f و g باید برابر باشند.

از آنجا که نقطه مرکزی $g(x)$ ، $x = 2$ است، پس ریشه قدرمطلق $f(x)$ هم $x = 2$ و لذا $m = -2$ است پس:

$$f(x) = x + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} & x \geq 2 \\ dx + e & x < 2 \end{cases}$$

حالا از مقایسه این تابع با $g(x)$ داریم:

$$\text{اولا: } \frac{ax^2 + bx - 4}{x + c} = 2x - 2 \Rightarrow ax^2 + bx - 4 = 2x^2 + (2c - 2)x - 2c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2c - 2 \\ -4 = -2c \Rightarrow c = 2 \Rightarrow b = 2 \end{cases}$$

$$\text{ثانیا: } dx + e = 2 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 2 \end{cases}$$

حالا باید طول پاره‌خطی که سهمی $h(x) = 2x^2 + 2x - 2$ بر روی محور x ها جدا می‌کند را به دست بیاوریم. منظور از آن، همان فاصله بین صفرهای تابع $h(x)$ یا در واقع همان تفاضل ریشه‌ها در معادله $h(x) = 0$ است:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{(2)^2 - 4(2)(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$$



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

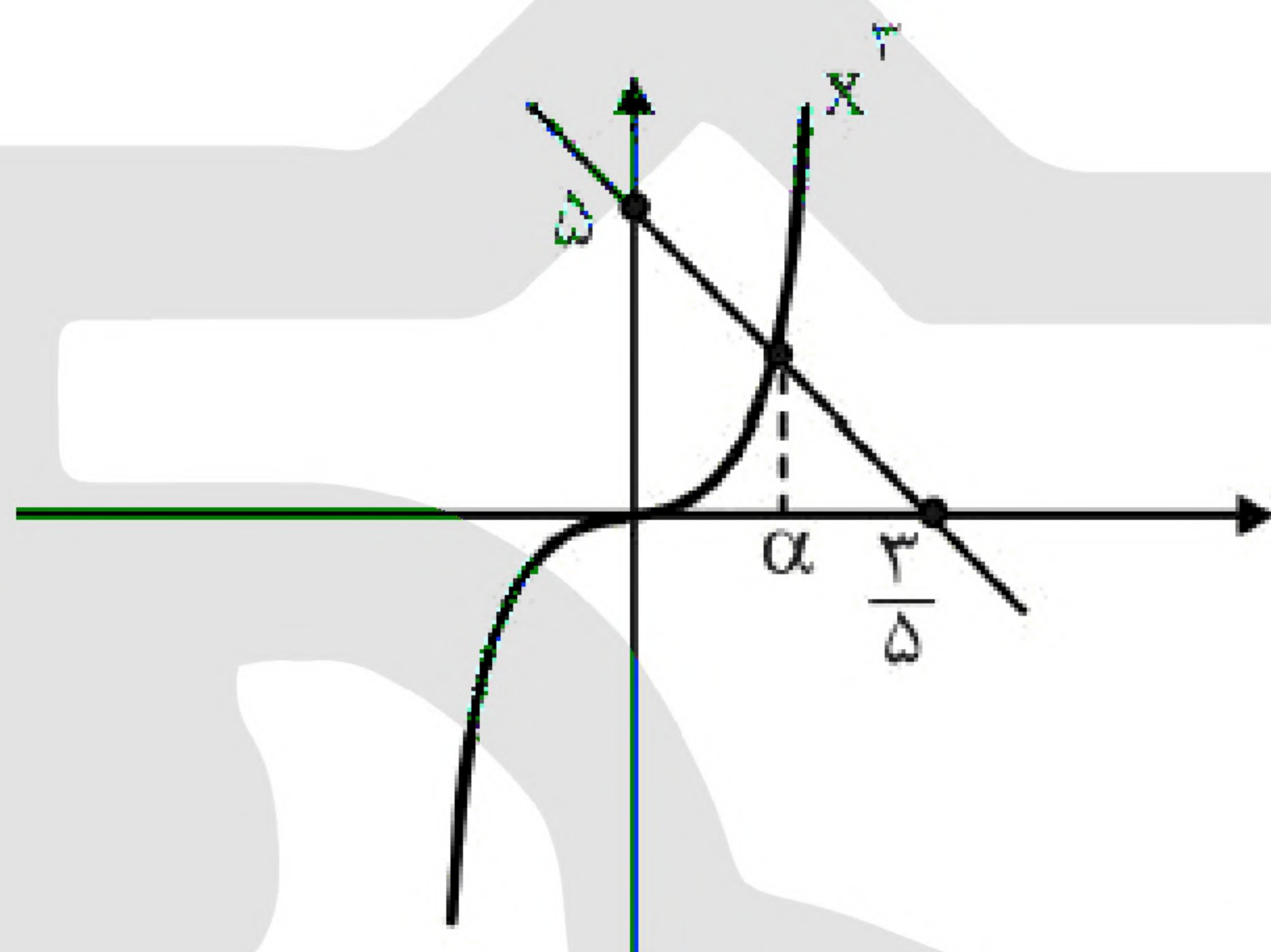
$$f \circ f(x) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(f(x)) = 1 - 3f^2(x) \Rightarrow f(x) = 1 - 3x^2$$

$$h(g(x)) = h(x-1) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + (2x - 2) + 1 \\ = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

حالا معادله $h(g(x)) = f(x)$ را حل می‌کنیم:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^3 + 5x - 3 = 0 \Rightarrow x^3 = -5x + 3$$

برای حل این معادله، به روش هندسی عمل می‌کنیم، نمودارهای دو طرف معادله را رسم کرده و محل تلاقی را پیدا می‌کنیم:



واضح است که α در بازه $(0, \frac{3}{5})$ قرار دارد.

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(1, 2)(-2, 3)(-1, 4)\} \Rightarrow g = \{(-2, 2)(-1, -2)\} \Rightarrow g^{-1} = \{(2, -2)(-2, -1)\}$$

$$f \circ g = \{(-2, -1)(-1, 8)\} \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ 3 - 2g = -1 \qquad 4 - 2g = 8 \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ g = 2 \qquad \qquad g = -2$$

$$f \circ g^{-1} = \{(2, 3)(-2, 4)\}$$

$$f \circ g^{-1} \text{ برد} = \{3, 4\} \Rightarrow f \circ g^{-1} \text{ حاصل ضرب اعضای برد} = 3 \times 4 = 12$$

$$f^{-1} : (3, 2) \Rightarrow f : (2, 3), f(x) = x^3 - x + 2K - 23$$

$$3 = 2^3 - 2 + 2K - 23$$

$$K = 10 \Rightarrow f(x) = x^3 - x - 3$$

$$f(3) - f(-3) = (27 - 3 - 3) - (-27 + 3 - 3) = 48$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f^{-1}_{(r,r)} \leftrightarrow f_{(r,r)} \Rightarrow r = r^r - r + rK - 17 \Rightarrow \boxed{K = 7}$$

$$\boxed{f(x) = x^r - x - 3}$$

$$f(7) - f(-7) = 3 - (-9) = 12$$

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$(0, -2) \in g \Rightarrow -2 = c$$

$$(2, 0) \in g \Rightarrow 4a + 2b - 2 = 0$$

$$x_1 = -\frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \left. \vphantom{\begin{matrix} 4a + 2b - 2 = 0 \\ x_1 = -\frac{b}{2a} = 0 \end{matrix}} \right\} g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}, D_g = [0, +\infty), D_f = (-\infty, 0)$$

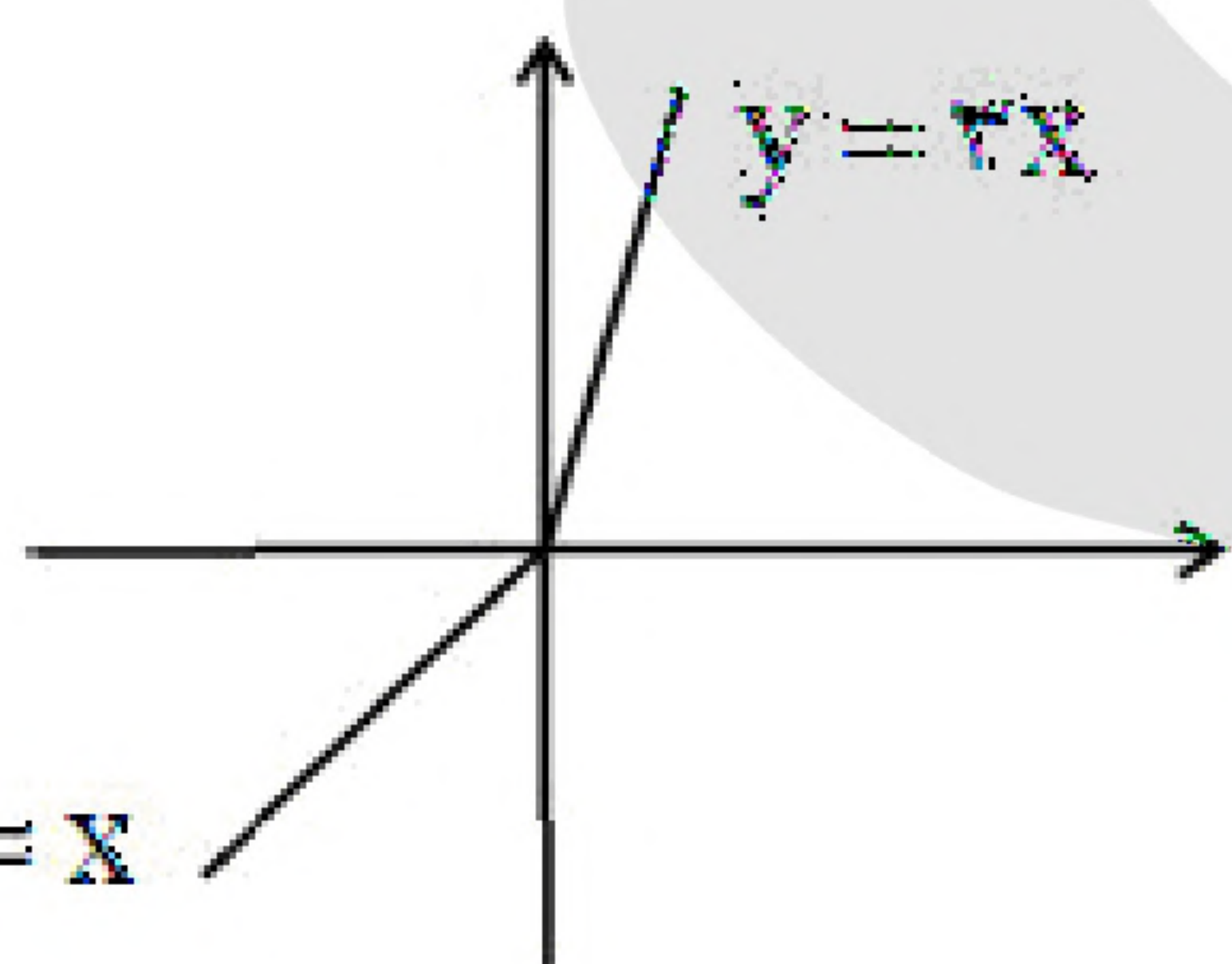
$$D_{f \circ g} = \left\{ [0, +\infty) \mid \frac{1}{2}x^2 - 2 \in (-\infty, 0) \right\}$$

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$

$$D_{f \circ g} = \{[0, +\infty) \cap (-2, 2)\} = [0, 2)$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

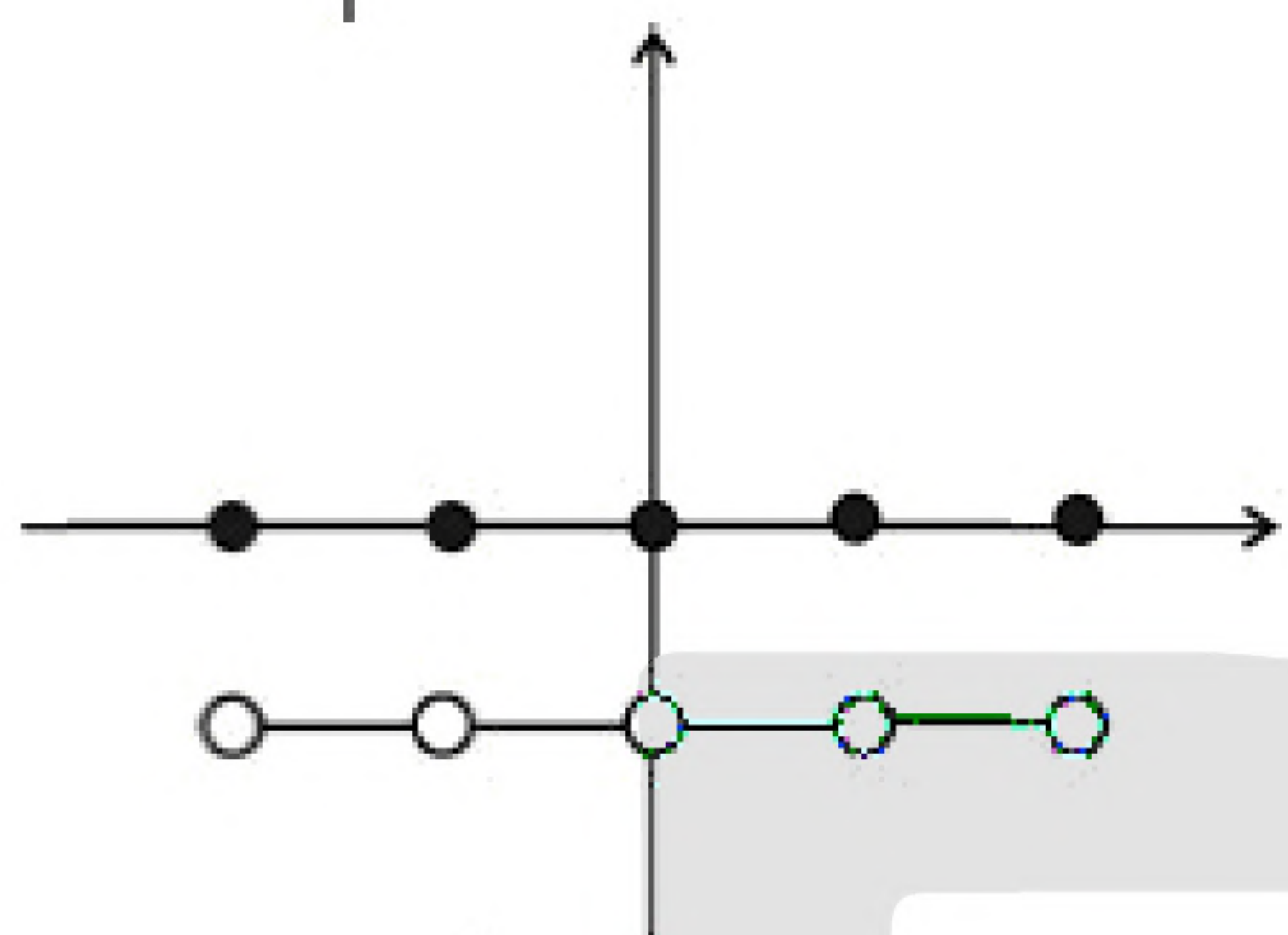
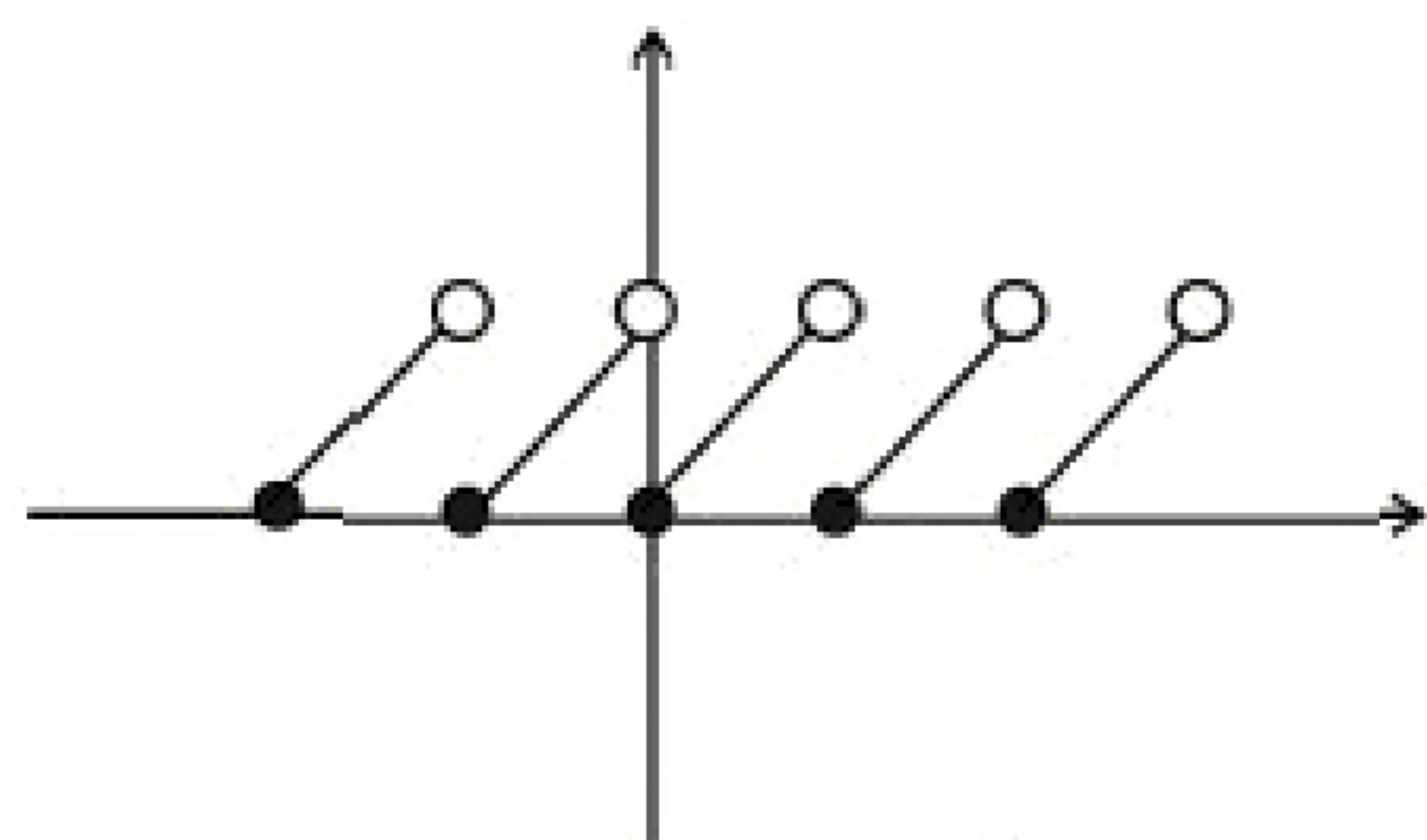


یک به یک است

$$y = |x| + 2x = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

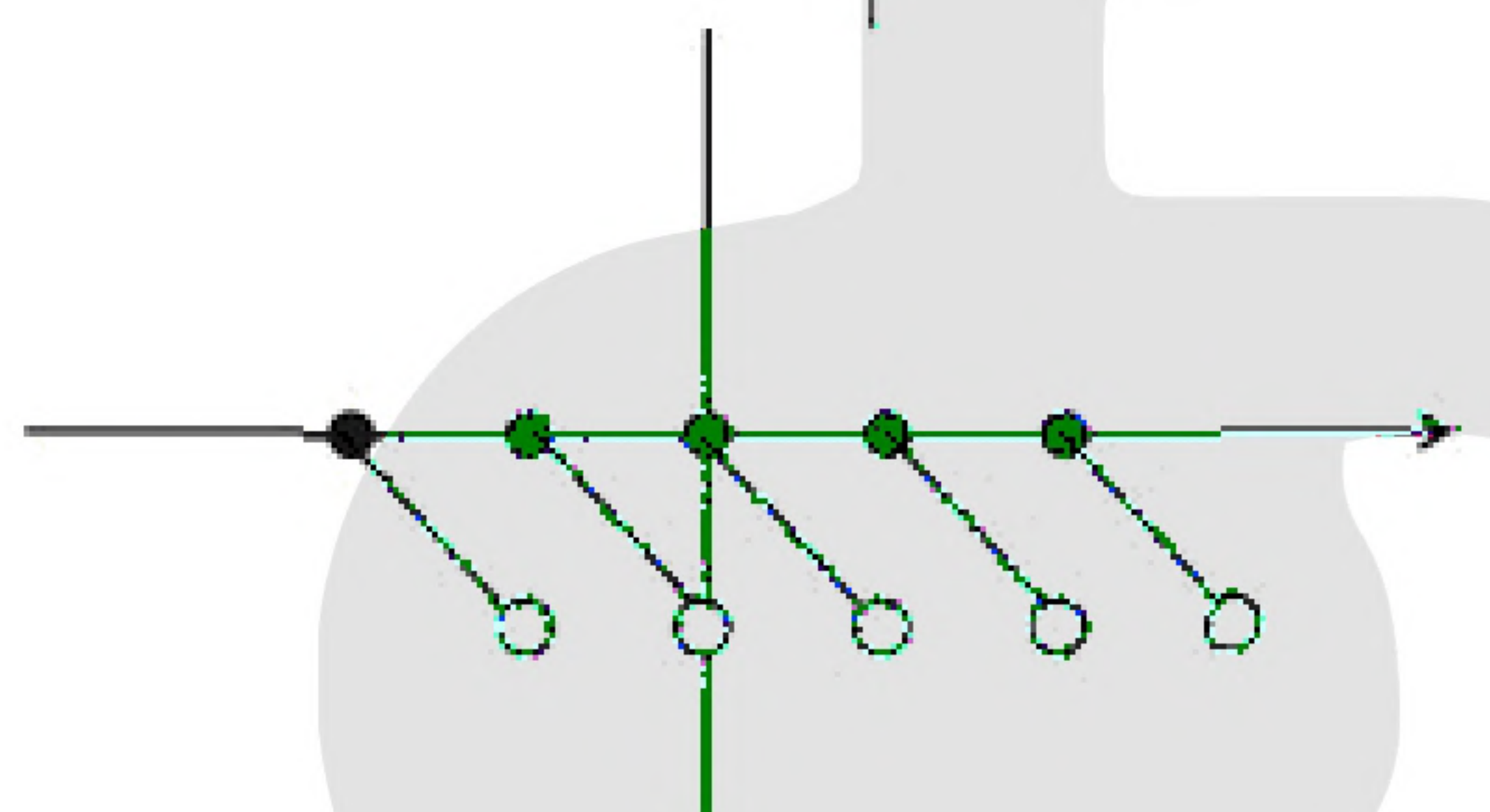


$$f(x) = x - [x] \Rightarrow \begin{cases} x - [x] = 0, & x \in \mathbb{Z} \\ 0 < x - [x] < 1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(x) = [x] + [-x] \Rightarrow [x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f - g)(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1 < [x] - x < 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(f \times g)(x) = [x] - x$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \frac{(3x+1)(x-2)}{x-2} \Rightarrow f(x) = 3x+1, D_f = \mathbb{R} - \{2\} \xrightarrow{x=2} y=7$$

$$\Rightarrow R_f = \mathbb{R} - \{7\} \Rightarrow D_{f^{-1}} = R_f = \mathbb{R} - \{7\}$$

$$R - \{7\} \text{ با دامنه } f \text{ : پیدا کردن وارون } y = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \times \frac{x-7}{x-7}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 8x + 7}{3x - 21}$$

$$\begin{cases} a = -8 \\ b = 7 \\ c = -21 \end{cases} \text{ با مقایسه در صورت سؤال}$$

$$f^{-1}(2b - a - c) = f^{-1}(14 + 8 + 21) = f^{-1}(43) = 14$$



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 + \sqrt{x-1})^2} = 1 + \sqrt{x-1}, x \geq 1$$

$$g(x) = \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1 - \sqrt{x-1})^2} = 1 - \sqrt{x-1}$$

$$1 - \sqrt{x-1} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} \leq 1 \Rightarrow x-1 \leq 1 \Rightarrow x \leq 2$$

$$f(x) + g(x) = 1 + \sqrt{x-1} + 1 - \sqrt{x-1} = 2$$

$$y = 4x^2 - 4x + 1 - 3, x \leq 0 \Rightarrow y \geq -3$$

$$y = (2x-1)^2 - 3$$

$$(2x-1)^2 = y+3 \Rightarrow 2x-1 = \begin{cases} \sqrt{y+3} & \text{قق غ} \\ -\sqrt{y+3} & \text{قق ق} \end{cases}$$

$$2x = 1 - \sqrt{y+3} \Rightarrow x = \frac{1 - \sqrt{y+3}}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{x+3}}{2} \quad x \geq -3$$

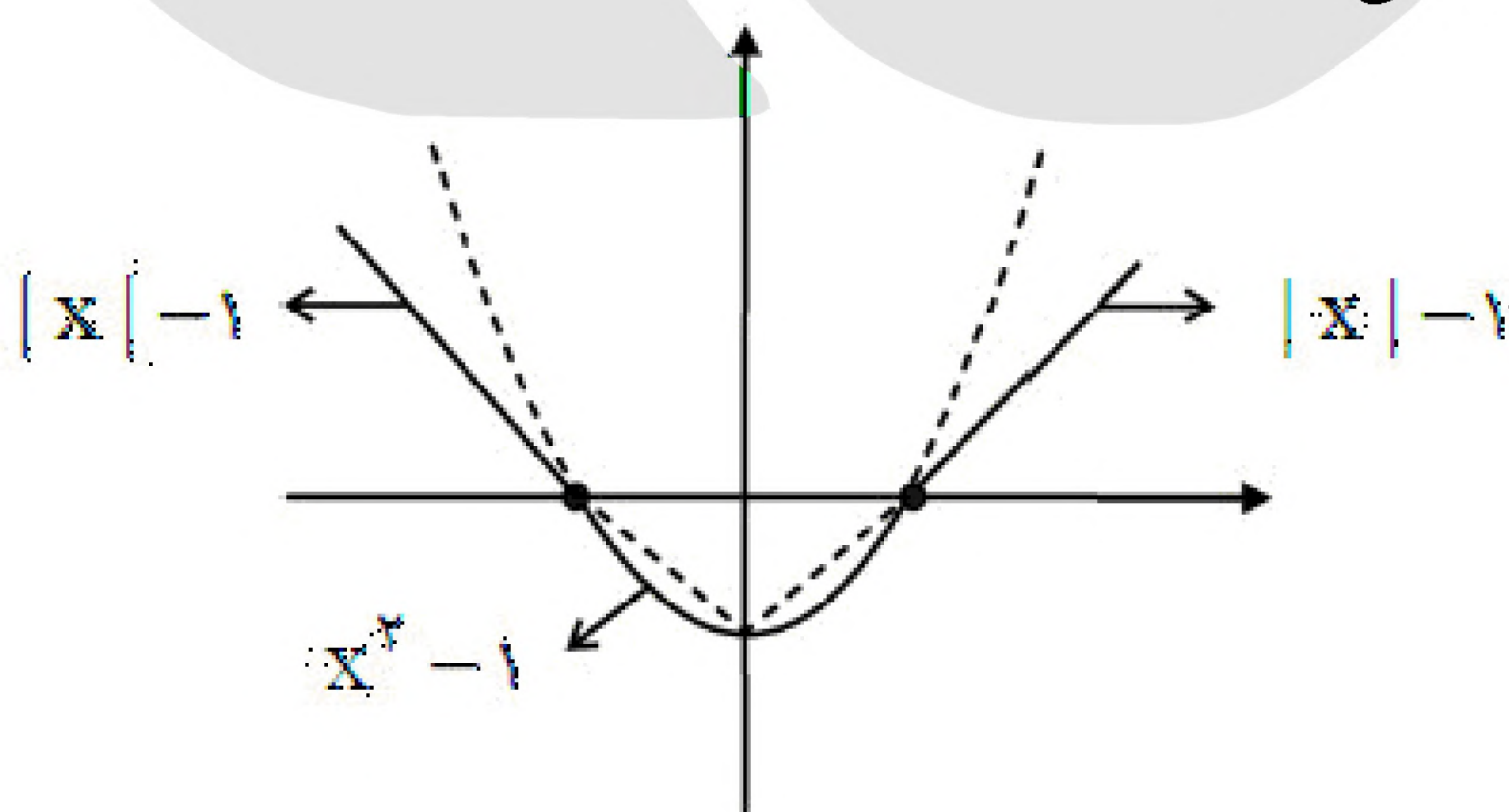
$$f(x) = \frac{x^2 + 2 + 1}{\sqrt{x^2 + 2}} = \sqrt{x^2 + 2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} > 2$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow R_f = \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty \right)$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تابع است.





$$f = \{(1, 2), (-2, 3), (-1, 4)\}$$

$$D_{f-2g} = D_f \cap D_g = \{1, -2, -1\} \cap D_g = \{-2, -1\}$$

۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به دامنه بالا عدد ۱ قطعاً در دامنه تابع g نیست:

$$f(-2) - 2g(-2) = -1 \Rightarrow 3 - 2g(-2) = -1 \Rightarrow g(-2) = 2 \Rightarrow (2, -2) \in g^{-1} \quad (1)$$

$$f(-1) - 2g(-1) = 8 \Rightarrow 4 - 2g(-1) = 8 \Rightarrow g(-1) = -2 \Rightarrow (-2, -1) \in g^{-1} \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow fog^{-1}(2) = f(-2) = f(-2) = 3$$

$$(2) \Rightarrow fog^{-1}(-2) = f(-1) = 4$$

$$12 = 3 \times 4 = \text{حاصل ضرب اعضای برد}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x-2} \leq 0$$

$$2K - \sqrt{x-2} \leq 2K \xrightarrow{R_f = (-\infty, 3]} 2K = 3 \Rightarrow f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$$

$$f^{-1}(1) = ? \Rightarrow 3 - \sqrt{x-2} = 1 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow f^{-1}(1) = 6$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow f^{-1}(1) + f(3) = 6 + 2 = 8$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = \sqrt{1-x} - 1 \xrightarrow{f \text{ دامنه}} 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, 1]$$

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \xrightarrow{f \text{ برد}} \sqrt{1-x} \geq -1 \Rightarrow R_f = [-1, +\infty)$$

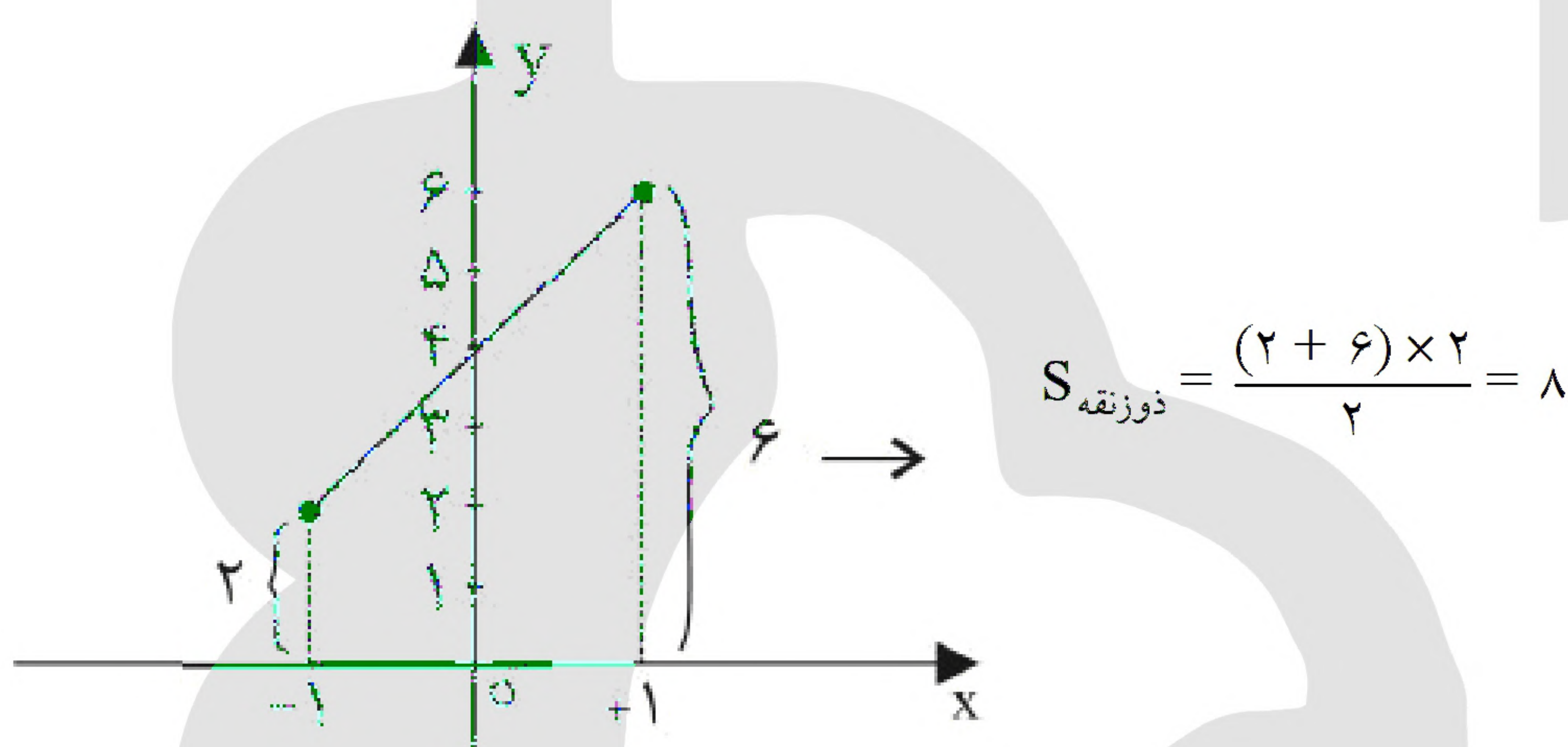
$$f^{-1} \circ f(x) = x ; D_{f^{-1} \circ f} = D_f = (-\infty, 1] \quad (1)$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x ; D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f = [-1, +\infty) \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow g(x) = f^{-1} \circ f(x) + f \circ f^{-1}(x) + 4 = 2x + 4$$

$$D_g = D_f \cap R_f = [-1, 1]$$

بنابراین باید نمودار خط $y = 2x + 4$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم و مساحت محدود به آن با محور x ها را حساب کنیم:



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = 3[x] - 2x + 1 + 3x - 4[x] - 3 = -[x] + x - 2$$

$$(f + g)(x) = -[x] + x - 2 = x \Rightarrow [x] = -2 \Rightarrow -2 \leq x < -1$$

$$[a, b) = [-2, -1) \Rightarrow a = -2, b = -1$$

$$a + b = -3$$



۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = \{(0, 1), (2, 0), (1, 2), (3, 1), (5, 4)\}$$

$$g = \{(1, 0), (0, 2), (2, 2), (3, 1), (4, 5)\}$$

$$g^2 = g \times g = \{(1, 0), (0, 4), (2, 4), (3, 1), (4, 25)\}$$

$$D_f \cap D_g = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$f - g = \{(0, -1), (1, 2), (2, -2), (3, 0)\}$$

$$D_{\frac{g}{f-g}} = D_g \cap D_{f-g} - \{x \mid (f-g)(x) = 0\} = \{0, 1, 2, 3\} - \{3\} = \{0, 1, 2\}$$

$$\frac{g}{f-g} = \{(0, -4), (1, 0), (2, -2)\}$$

$$\text{حاصل جمع عضوهای برد} = -4 + 0 + (-2) = -6$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x \geq 1, g(x) = x + 1 \geq 2$$

$$-1 \leq x < 1, 1 \leq g(x) = x + 2 < 3 \Rightarrow (fog)(x) = \begin{cases} (x+1)^2 + 1 & x \geq 1 \\ (x+2)^2 + 1 & -1 \leq x < 1 \\ (x+2)^3 + 1 & x < -1 \end{cases}$$

$$x < -1, g(x) = x + 2 < 1$$

$$(\sqrt{a^2}, 2b), (|a|, 2) \Rightarrow 2b = 2 \Rightarrow b = 1$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f = \left\{ (1, a-2), (\sqrt{a^2}, 2), (1, 2a), (|a|, 2), (a^2, 4) \right\}$$

$$(1, a-2), (1, 2a) \Rightarrow a-2 = 2a \Rightarrow a = -2$$

$$f = \{(1, -4), (2, 2), (1, -4), (4, 4)\} = \{(1, -4), (2, 2), (4, 4)\}$$

$$g = \{(2a, b), (b^2, 2b), (a+1, -b), (a, b+3)\} = \{(-4, 1), (1, 2), (-1, -1), (-2, 4)\}$$

$$fog = \{(-4, -4), (1, 2), (-2, 4)\}$$

$$R_{fog} = \{-4, 2, 4\} \Rightarrow -4 + 2 + 4 = 2$$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1, \quad x \geq 1$$

۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$y = (x^2 - 1)^2 + 1 \Rightarrow |x^2 - 1| = \sqrt{y-1} \Rightarrow x^2 = \sqrt{y-1} + 1$$

$$|x| = \sqrt{\sqrt{y-1} + 1} \Rightarrow x = \sqrt{1 + \sqrt{y-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x-1}}$$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(g(x)) = [g(x)]^2 - 2 = x + 2\sqrt{x+1}$$

$$[g(x)]^2 = x + 2 + 2\sqrt{x+1} = (\sqrt{x+1} + 1)^2 \Rightarrow g(x) = 1 + \sqrt{x+1} \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

$$f(x) = x^2 - 2 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2 \geq -1\}$$

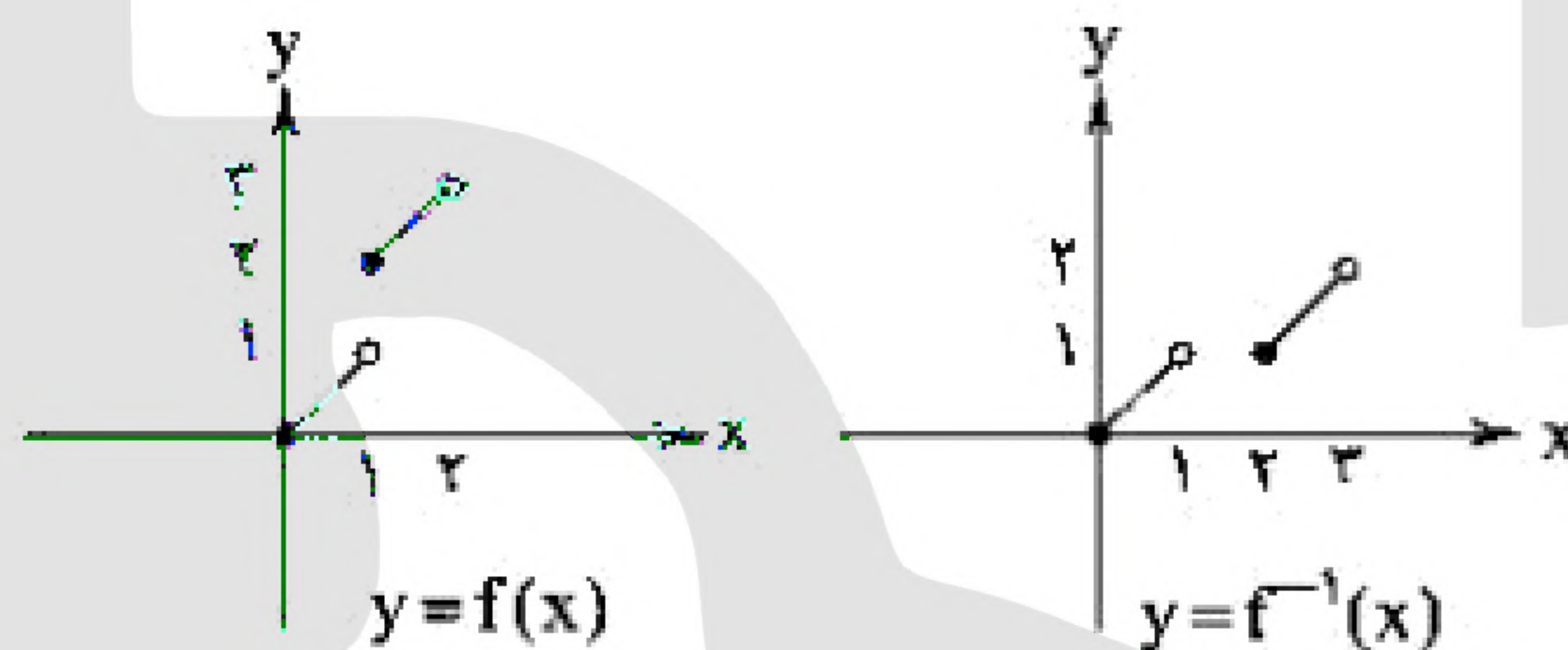
$$\{x \in \mathbb{R} \cap (x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1)\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) = x + 1$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نمودار f و f^{-1} را ببینید:



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(g \circ f)^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = 3\left(\frac{y}{x}\right) + 2 \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = 3x + 2$$

$$\Rightarrow (g \circ f)(x) = \frac{x-2}{3} \Rightarrow g(f(x)) = \frac{x-2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)-1} = \frac{x-2}{3} \Rightarrow f(x)-1 = \frac{3}{x-2} \Rightarrow f(x) = \frac{3}{x-2} + 1 = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\Rightarrow f(2x) = \frac{2x+1}{2x-2}$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از اتحاد زیر کمک می‌گیریم:

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$\left(\frac{1}{x} + 2x\right)^2 - \left(\frac{1}{x} - 2x\right)^2 = 8 \xrightarrow{\frac{1}{x} 2x = 1} \left(\frac{1}{x} + 2x\right)^2 = 9$$

$$\xrightarrow{x > 0} \frac{1}{x} + 2x = 3 \Rightarrow f(1) = 3$$



۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تابع f اکیداً صعودی است، بنابراین وارون پذیر است.

$$y - x = \sqrt{x - 1} \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x - 1 \Rightarrow x^2 - (2y + 1)x + y^2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2y + 1 \pm \sqrt{(2y + 1)^2 - 4(y^2 + 1)}}{2} = \frac{2y + 1 \pm \sqrt{4y - 3}}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x + 1 - \sqrt{4x - 3}}{2} \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x + 1 - \sqrt{2x - 3}}{2}$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون $(f \circ g)(x)$ یک تابع خطی است، بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ هر دو خطی اند و از طرفی تابع $(f + g)(x)$ یک تابع خطی است، بنابراین $f(x)$ و $g(x)$ هر دو خطی اند و از طرفی تابع $(f + g)(x)$ ثابت است، بنابراین شیب خطوط قرینه یکدیگرند. f را به صورت $f(x) = ax + b$ و g را به صورت $g(x) = -ax + c$ در نظر می گیریم:

$$(f \circ g)(x) = -4x - 12 \Rightarrow f(c - ax) = -4x - 12$$

$$\Rightarrow a(c - ax) + b = -4x - 12 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2 \\ b + ac = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b + 2c = -12 \\ b + c = 10 \end{cases} \xrightarrow{-} c = -32 \Rightarrow g(3) = -28$$

اگر $a = 2$ باشد:

$$a = -2c = -12, b + c = 10 \xrightarrow{-} c = \frac{22}{3} \Rightarrow g(3) = \frac{40}{3}$$

در صورتی که $a = -2$ باشد:



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ ، از آنجایی که تابع $f+g$ فقط در $x=2$ تعریف نشده است، پس تابع f هم در $x=2$ تعریف نمی‌شود، در نتیجه:

$$f = \frac{5}{x-a} \Rightarrow x-a \neq 0 \Rightarrow x \neq a \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{a\} \Rightarrow a=2 \Rightarrow f(x) = \frac{5}{x-2}$$

نمودار تابع $f+g$ یک تابع خطی است، پس:

$$(f+g)(x) = mx + h \xrightarrow{(2,2)} 2m + h = 2$$

$$\xrightarrow{(0,3)} 0 + h = 3 \Rightarrow h = 3$$

$$\Rightarrow h = 2 - 2m \Rightarrow 2 - 2m = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) + g(x) = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 - f(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 - \frac{5}{x-2}$$

$$\Rightarrow g(2a-1) = g(3) = -\frac{1}{2} \times 3 + 3 - \frac{5}{3-2} = -\frac{7}{2}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$-x^2 + 7x - 12 > 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) < 0 \Rightarrow 3 < x < 4 \quad (1)$$

$$x-2 > 0 \Rightarrow x=2 \quad (2)$$

$$D_f = (1) \cap (2) = (3, 4)$$

دامنه‌ی تابع f شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

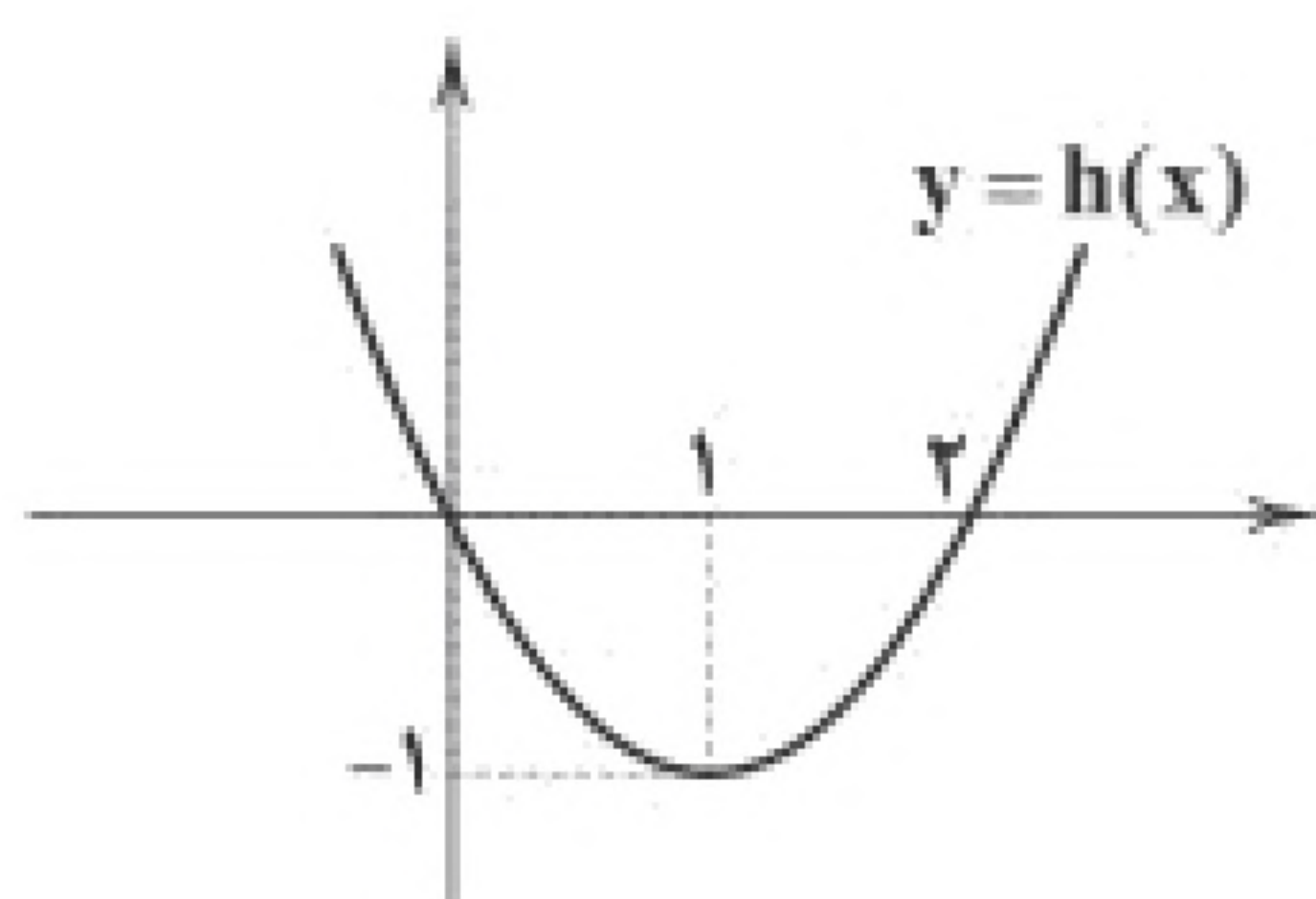
۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$f[x-1] - 4 = 0 \Rightarrow 2([x]-1) - 4 = 0 \Rightarrow 2[x] - 2 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 2[x] - 6 = 0 \Rightarrow 2[x] = 6 \Rightarrow [x] = \frac{6}{2} \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$$



۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در f دامنه رعایت نشده است. در g دامنه صحیح است و برد تابع نیز زیرمجموعه‌ی R است. اما $h(x)$ را ببینید:



برد تابع $h(x)$ برابر $[-1, +\infty)$ است و $[0, +\infty) \not\subseteq [-1, +\infty)$ پس h نمی‌تواند تابع باشد. در $t(x)$ هم برای $x = 1$ خروجی نداریم پس تابع نیست.

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$f(2 - \sqrt{3}) \stackrel{\text{ضابطه دوم}}{=} \frac{2 - \sqrt{3} - 1}{2 - \sqrt{3} - 2} [2 - \sqrt{3} - 1] = [1 - \sqrt{3}] = -1$$

$$f\left(-\frac{9}{4}\right) \stackrel{\text{ضابطه اول}}{=} \frac{-\frac{9}{4} - 1}{-\frac{9}{4} - 2} \left| -\frac{9}{4} + 1 \right| = \left| -\frac{5}{4} \right| = \frac{5}{4}$$

$$3f(2 - \sqrt{3}) - 2f\left(-\frac{9}{4}\right) = 3(-1) - 2\left(\frac{5}{4}\right) = -3 - \frac{5}{2} = -\frac{11}{2} = -5/5$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. خط به معادله‌ی $x = a$ تابع نیست. پس در معادله، بایستی y نداشته باشیم پس $m = 4$ است.

$$m = 4 \Rightarrow 4y - 3x = 4y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

خط $x = \frac{1}{3}$ محور x ها را در $\frac{1}{3}$ قطع می‌کند.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تابع $f(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت است، از طرفی تابع $(fg)(x)$ یک سهمی و دهانه‌ی آن رو به پایین است و محور x ها را در $x = 3$ قطع کرده است، پس تابع $g(x)$ بایستی شیب منفی داشته باشد و همچنین محور x ها را در $x = 3$ قطع کند. در نتیجه نمودار موردنظر شبیه نمودار گزینه‌ی (۲) است.



۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

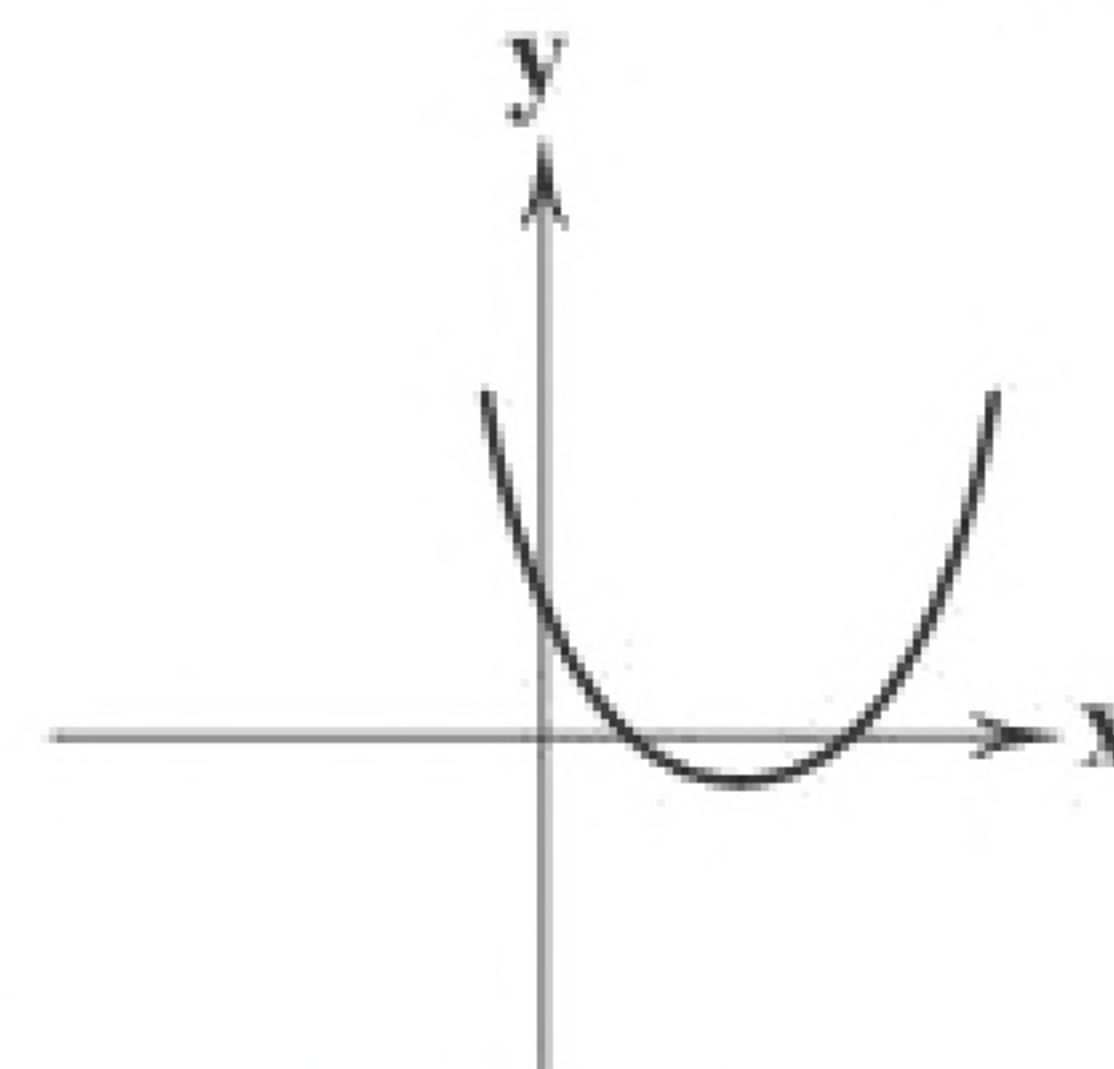
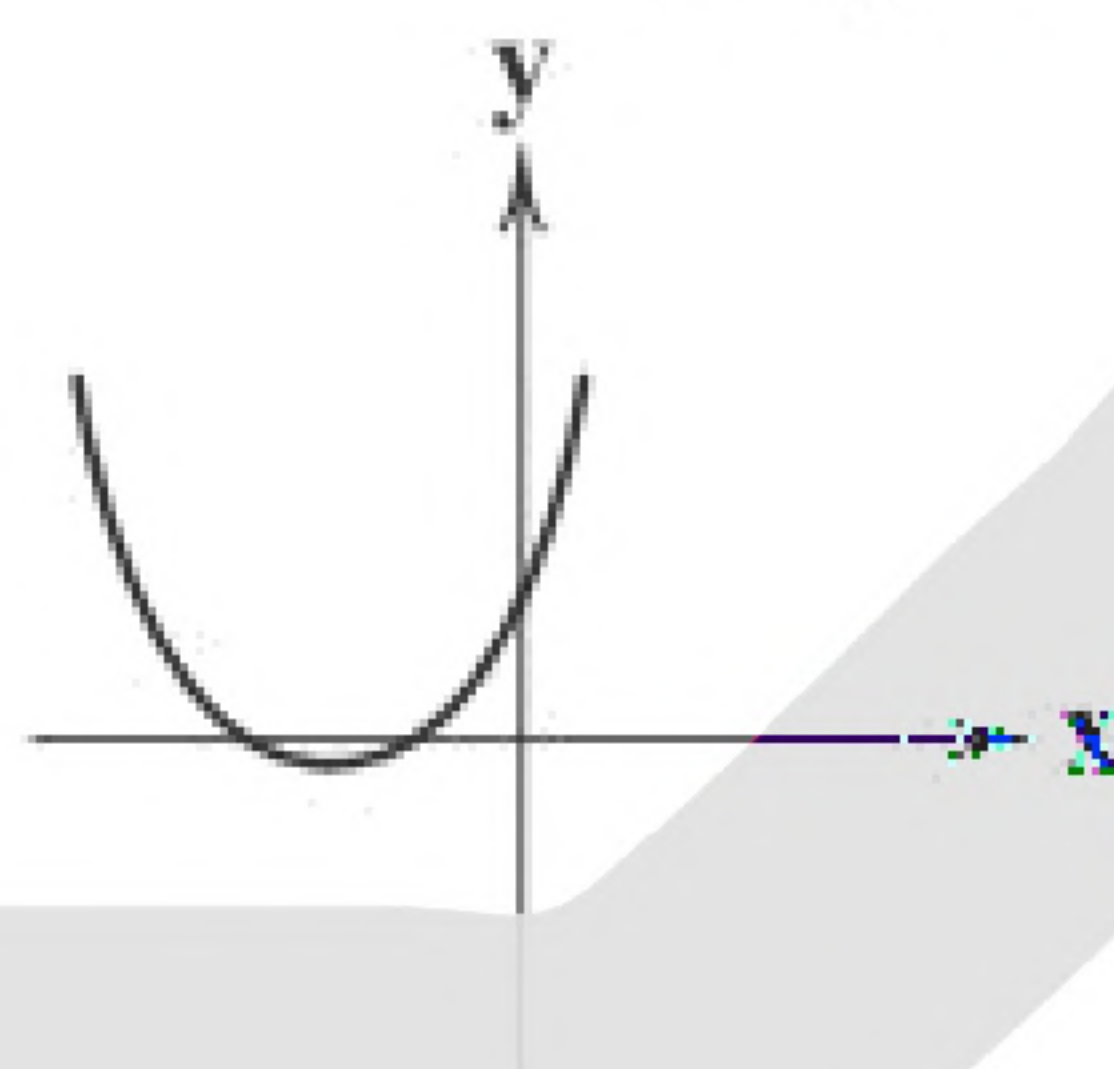
$$f(x) = x + a \Rightarrow (f \circ f)(x) = x + a + a = x + 2a$$

$$g(x) = f(x)(f \circ f)(x) = (x + a)(x + 2a) = x^2 + 3ax + 2a^2$$

$$\Delta = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 > 0 \Rightarrow$$

همواره محور x ها را در دو نقطه قطع می کند.

چون $c = 2a^2 > 0$ است، پس دو حالت برای نمودار $g(x)$ رخ می دهد.



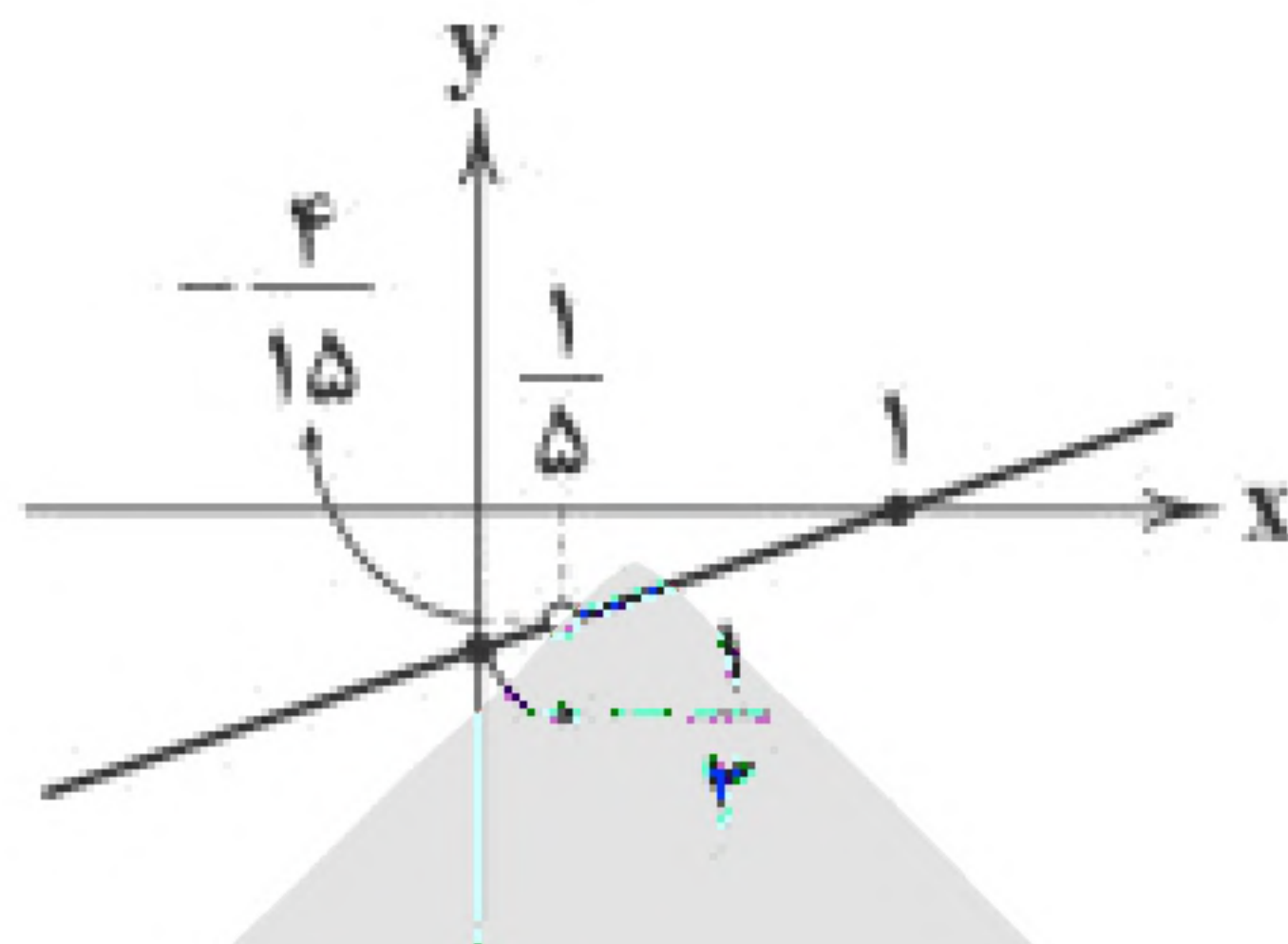
بنابراین تابع $g(x)$ همواره از سه ناحیه مختصات عبور می کند.



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ضابطه‌ی تابع f را کمی ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 1}{3(5x - 1)} = \frac{(5x - 1)(x - 1)}{3(5x - 1)} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}(x - 1) & x \neq \frac{1}{5} \\ \text{تعریف نشده} & x = \frac{1}{5} \end{cases}$$

نمودار تابع f



اگر تابع f در $x = \frac{1}{5}$ تعریف می‌شد، آن‌گاه:

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{15} \Rightarrow f^{-1}\left(-\frac{4}{15}\right) = \frac{1}{5}$$

بنابراین تابع f^{-1} نباید در $x = -\frac{4}{15}$ تعریف شود، پس $x = -\frac{4}{15}$ باید ریشه‌ی مشترک صورت و مخرج f^{-1} باشد و از

طرفی $f^{-1}(x) = 3x + 1$ باشد زیرا:

$$y = \frac{1}{3}(x - 1) \xrightarrow{\text{تعویض } x \text{ با } y} x = \frac{1}{3}(y - 1)$$

$$\Rightarrow 3x = y - 1 \Rightarrow y = 3x + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \neq -\frac{4}{15} \\ \text{تعریف نشده} & x = -\frac{4}{15} \end{cases}$$

لذا داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} = \frac{\left(x + \frac{4}{15}\right)(3x + 1)}{\left(x + \frac{4}{15}\right)} = 3x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{x + d} = \frac{3x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{4}{15}}{x + \frac{4}{15}} \xrightarrow{\text{مقایسه}} \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{9}{5} \\ c = \frac{4}{15} \\ d = \frac{4}{15} \end{cases} \Rightarrow \frac{a - b}{c + d} = \frac{3 - \frac{9}{5}}{\frac{4}{15} + \frac{4}{15}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

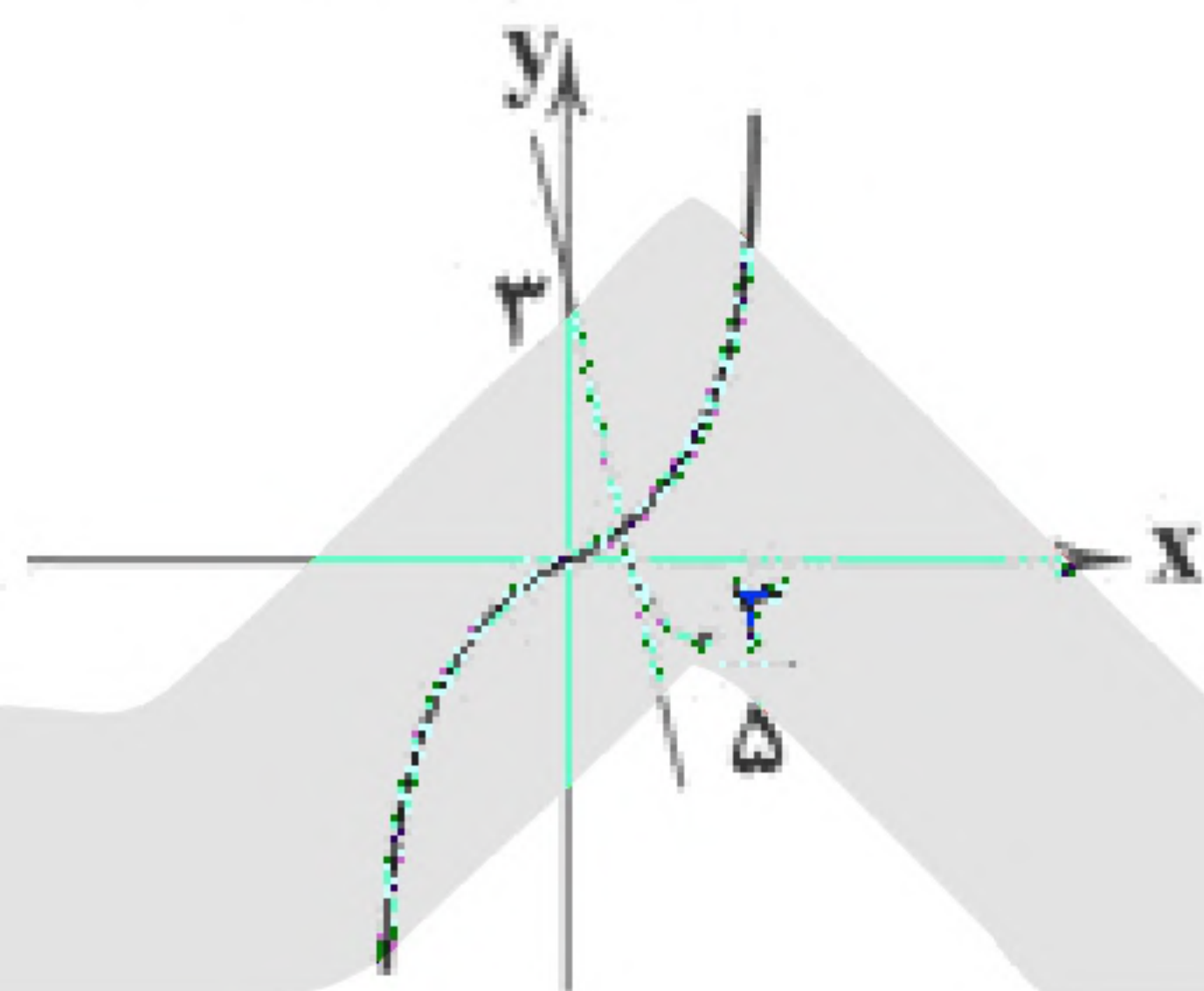


۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. $\text{fog}(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\text{fog}(x) &= f(g(x)) = f(x-1) = (x-1)^3 + 2(x-1) + 1 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2x - 2 + 1 = x^3 - 3x^2 + 5x - 2\end{aligned}$$

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = 1 - 3x^2 \Rightarrow x^3 = 3 - 5x$$
 حال معادله‌ی $\text{fog}(x) = 1 - 3x^2$ را تشکیل می‌دهیم:

جواب معادله‌ی بالا محل برخورد دو تابع x^3 و $3 - 5x$ را نشان می‌دهد.



دو تابع در یک نقطه با طول x_* که $0 < x_* < \frac{3}{5}$ است، یک‌دیگر را قطع می‌کنند.