

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر سرعت قطار در مسیر برگشت X باشد، در مسیر رفت سرعت آن $X + 20$ است:

$$t_2 - t_1 = \frac{36}{60} \Rightarrow t_2 - t_1 = 0.6$$

$$\frac{240}{X} - \frac{240}{X+20} = \frac{6}{10} \Rightarrow 240 \left(\frac{20}{X(X+20)} \right) = \frac{6}{10} \Rightarrow X(X+20) = 8000 \Rightarrow X = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اندازه قاعده مثلث X و ارتفاع وارد بر آن را h فرض می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} X \cdot h \xrightarrow{X+h=24} S = \frac{1}{2} X(24-X) = -\frac{1}{2} X^2 + 12X$$

رابطه نهایی برای مساحت مثلث‌ها، یک تابع درجه دوم است که ماکزیمم دارد. (ضریب X^2 منفی است):

$$X_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 12 \Rightarrow h = 24 - X = 12$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} X \cdot h = \frac{1}{2} \times 12 \times 12 = 72$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -4 \quad \text{مطابق ضرایب معادله } x^2 + 2x - 4 = 0$$

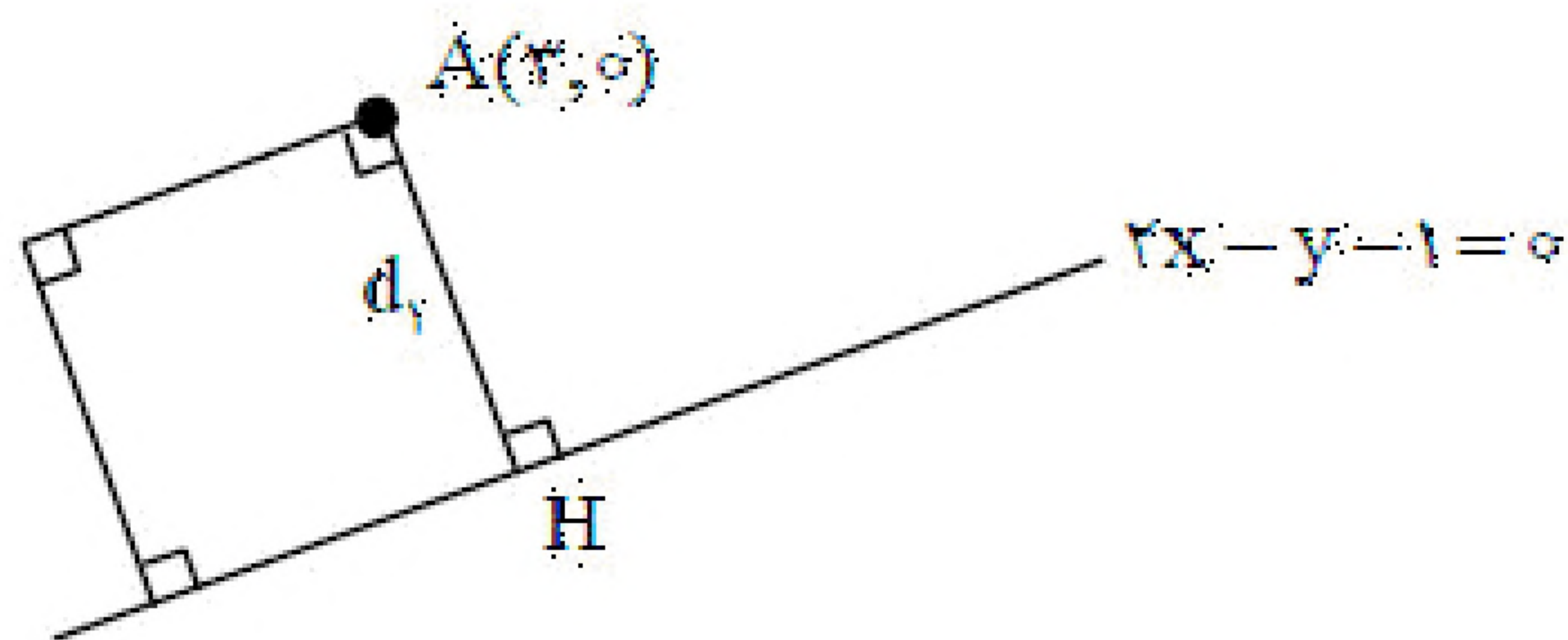
$$x_1 \text{ ریشه } x_1 \text{ در معادله صدق می‌کند} \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 - 4 = 0 \xrightarrow{\times x_1} x_1^3 + 2x_1^2 - 4x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1^3 = -2x_1^2 + 4x_1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{طبق ۱} \quad & x_1^3 - 2x_1^2 + 4x_2 \xrightarrow{\text{عبارت مورد نظر سؤال}} (-2x_1^2 + 4x_1) - 2x_1^2 + 4x_2 \\ & = -2(x_1^2 + x_2^2) + 4(x_1 + x_2) = -2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 4(x_1 + x_2) \\ & = -2[(-2)^2 - 2(-4)] + 4(-2) = -32 \end{aligned}$$



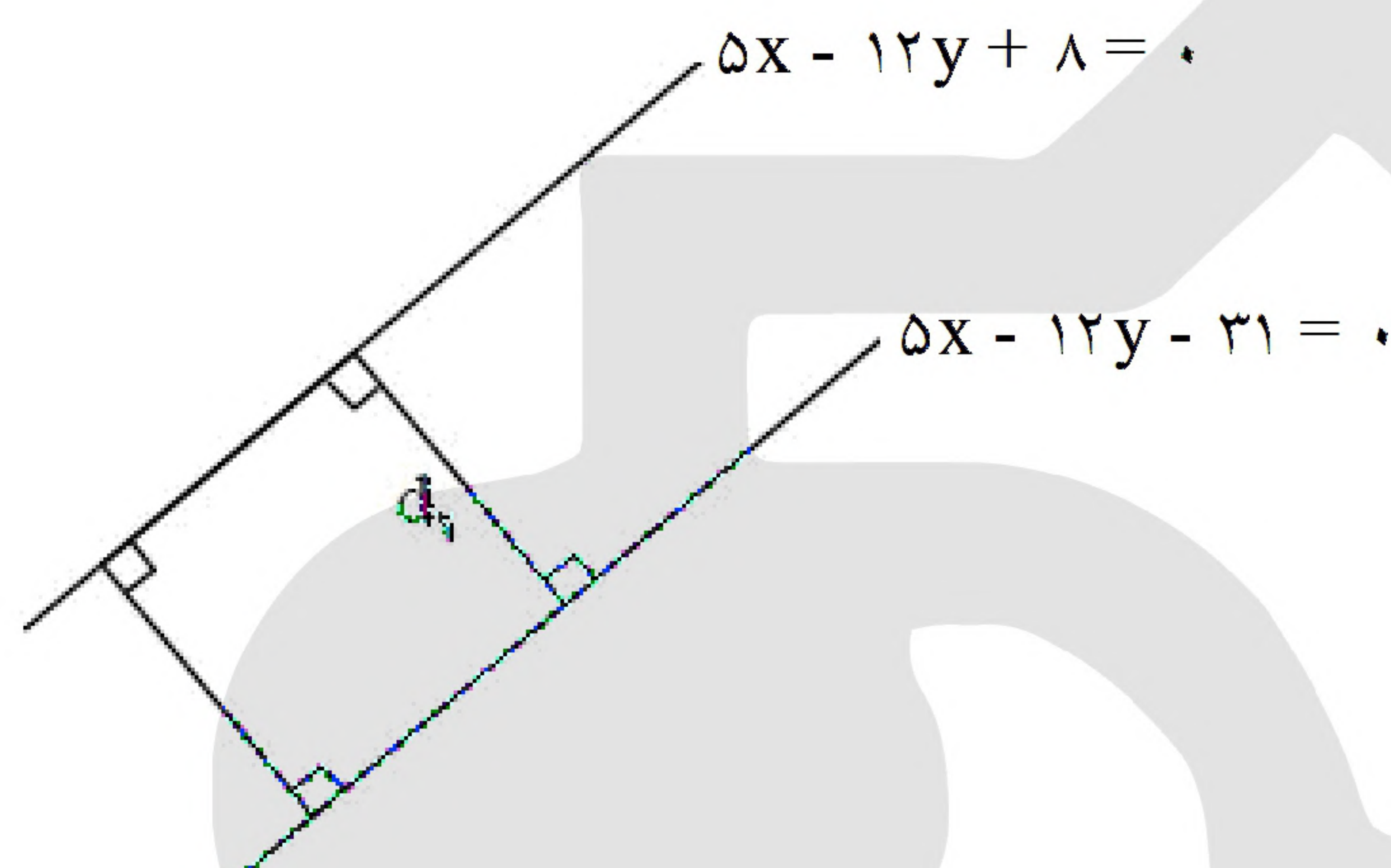
۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\Rightarrow d_1 = \frac{|2(3) - 9 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow S_1 = d_1^2 = 5$$

برای محاسبه S_2 معادله خط دوم را بر (۲) تقسیم می‌کنیم تا از فرمول فاصله دو خط موازی به صورت زیر استفاده کنیم:



$$\Rightarrow d_2 = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|8 - (-31)|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}}$$

$$= \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow S_2 = d_2^2 = 9$$

$$S_1 + S_2 = 5 + 9 = 14$$

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \quad (1)$$

صدق در ضابطه

$$(2, 0) \rightarrow 0 = 4a + 2b + c \quad (2)$$

$$\text{محور } y \text{ ها } (0, 4) = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 4 \quad (3)$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow 0 = 4a + 2(-4a) + 4 \Rightarrow a = 1, b = -4$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 4$$

$$f(a + b + c - 4) = f(1 - 4 + 4 - 4) = f(-3) = (-3)^2 - 4(-3) + 4 = 25$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \text{ شرط مستطیل طلایی} \Rightarrow \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = 5, x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x + 2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + 2 = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow (5 - \sqrt{5})(x + 2) = \frac{(5 - \sqrt{5})(5 + \sqrt{5})}{2} = \frac{25 - 5}{2} = 10$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$2\sqrt{2t-1} = t+1 \Rightarrow 4(2t-1) = (t+1)^2 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$(t-1)(t-5) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} t=1 \Rightarrow x_1=5 \\ t=5 \Rightarrow x_2=13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow S=18 \\ \rightarrow P=65 \end{array} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 65 = 0$$

$$-3a = -18 \Rightarrow a = 6, b = 65$$

$$a \times b = 390$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|2+3y| = 15 - |5-2x| \xrightarrow[\text{است پس:}]{\text{چون } |2+3y| \geq 0} 15 - |5-2x| \geq 0$$

$$\Rightarrow |5-2x| \leq 15 \Rightarrow -15 \leq 5-2x \leq 15 \xrightarrow{(-5)} -20 \leq -2x \leq 10$$

$$\xrightarrow{\div(-2)} 10 \geq x \geq -5 \Rightarrow \text{این بازه شامل ۱۶ عدد صحیح برای } x \text{ است.}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای ساده‌تر شدن معادلات، مطابق تعریف قدرنسبت در دنباله حسابی، سه جمله اول را به صورت $\underline{x-d}$, \underline{x} , $\underline{x+d}$ تعریف می‌کنیم:

جمله	جمله	جمله
اول	دوم	سوم

$$(x-d) + x + (x+d) = 48 \Rightarrow 3x = 48 \Rightarrow x = 16$$

$$(x-d)x(x+d) = 2160 \Rightarrow (16-d) \times 16 \times (16+d) = 2160$$

$$256 - d^2 = 135 \Rightarrow d^2 = 121 \xrightarrow{\text{دنباله افزایشی}} d = 11 \Rightarrow 5, 16, 27, \dots$$

$$\Rightarrow a_n = 5 + (n-1) \times 11 \Rightarrow a_n = 11n - 6 \quad \text{جمله عمومی دنباله}$$

$$\text{تعداد جملات ۳ رقمی } \Rightarrow n = \frac{995 - 104}{11} + 1 \Rightarrow n = 82 \Rightarrow 104, 115, \dots, 995 \quad \text{دنباله جملات ۳ رقمی}$$

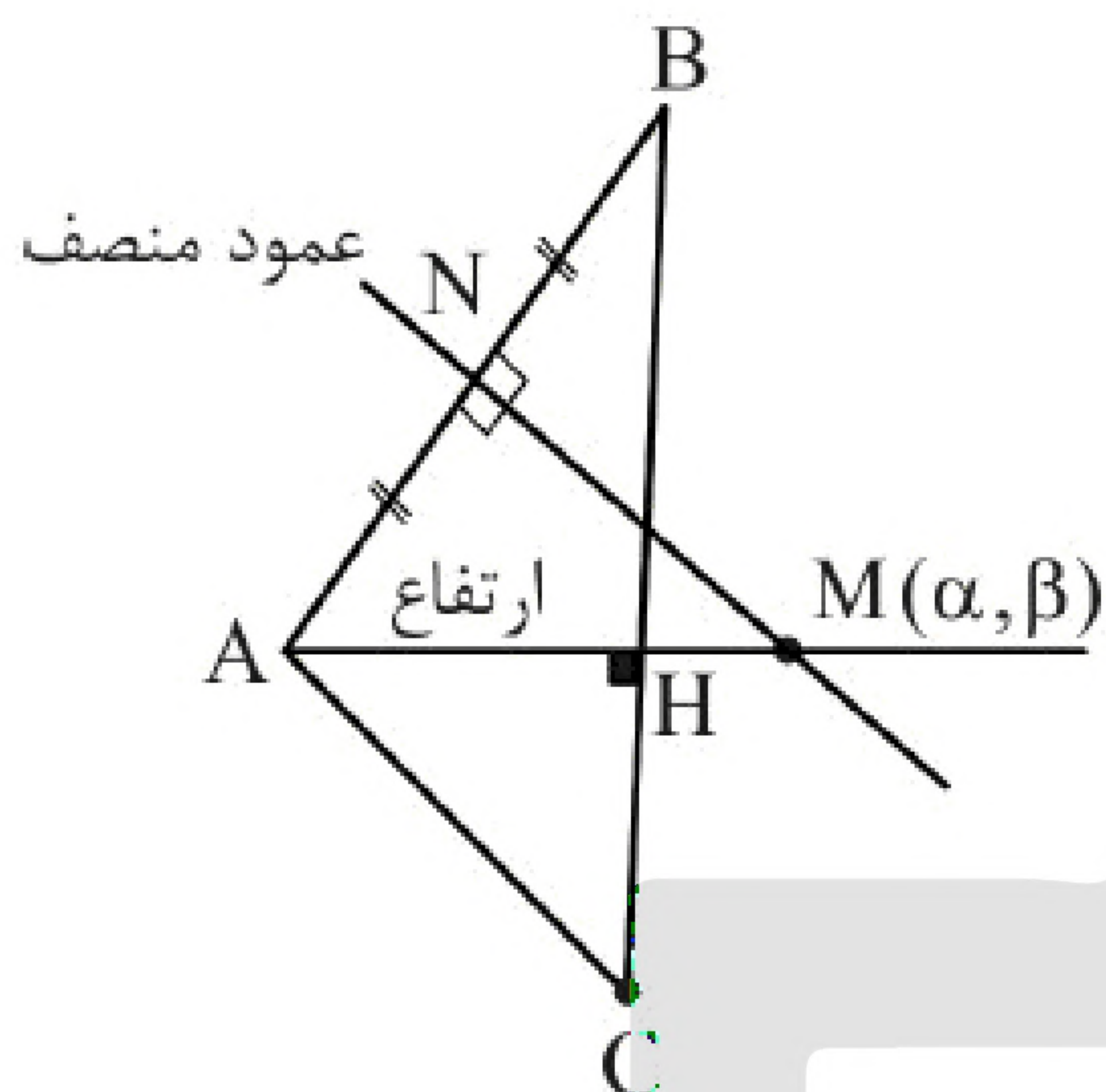
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{82}{2}(104 + 995) = 45059$$

یادآوری: تعداد جملات را با حل نامعادله $100 \leq 11n - 6 \leq 999$ و مجموع کل جملات را از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad \text{نیز می‌توانستید به دست آورید.}$$



۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله خطوط عمودمنصف و ارتفاع موردنظر را نوشته و با هم قطع می‌دهیم تا M به دست آید:



$$AB_{\text{وسط}} N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow m = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{4-1}{3+2}} = \frac{-5}{3}$$

$$y - \frac{5}{2} = \frac{-5}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 5x + 3y - 10 = 0 \quad (1) \quad \text{معادله عمودمنصف AB}$$

$$AH \text{ ارتفاع : } m = \frac{-1}{m_{BC}} = \frac{-1}{\frac{-3-4}{2-3}} = \frac{-1}{7}$$

$$y - 1 = \frac{-1}{7}(x + 2) \Rightarrow x + 7y - 5 = 0 \quad (2)$$

$$2, 1 \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y - 10 = 0 \\ x + 7y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{55}{32} \Rightarrow \alpha \\ y = \frac{15}{32} \Rightarrow \beta \end{cases} \Rightarrow 32(\alpha + \beta) = 70$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2^{3-2x} + 2^{3+2x} - 20 = 0 \xrightarrow{\text{با فرض } 2^{2x} = t} \frac{8}{t} + 8t - 20 = 0$$

$$\xrightarrow{\times t} 8t^2 - 20t + 8 = 0 \xrightarrow{\Delta = 144} t = \frac{20 \pm 12}{16} \begin{cases} t = 2 \Rightarrow 2^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2} = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3}_{=0} + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 0 + 8 + 12 = 20$$

یادآوری: با توجه به عبارات خواسته شده، تفاوتی ندارد که α و β کدامیک از ریشه‌های $\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$ باشند.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

 V = سرعت پرنده در هوای راکد

$$V' = \text{سرعت ثابت باد} = \frac{50 \text{ km}}{h} \times \frac{1 h}{3600 S} \times \frac{1000 m}{1 \text{ km}} = \frac{125 m}{9 s}$$

ارتباط بین مسافت پیموده شده (x) و سرعت ثابت (V) و زمان (t)
 $x = V \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{V}$

$$\underbrace{\frac{1000}{V - V'}}_{\text{سرعت در جهت مخالف باد}} - \underbrace{\frac{1000}{V + V'}}_{\text{سرعت در جهت موافق باد}} = 25 \Rightarrow \frac{1000}{V - \frac{125}{9}} - \frac{1000}{V + \frac{125}{9}} = 25$$

$$\Rightarrow \left(\frac{9000}{9V - 125} - \frac{9000}{9V + 125} = 25 \right) \times (9V - 125)(9V + 125) \quad \text{ک.م.م. مخرج‌ها}$$

$$9000(9V + 125) - 9000(9V - 125) = 25(9V - 125)(9V + 125)$$

$$\Rightarrow 2 \times 9000 \times 125 = 25(81V^2 - 15625) \Rightarrow 81V^2 = 105625$$

$$\Rightarrow V = \frac{325 m}{9 s}$$

↓

$$x = V \cdot t$$

$$\text{متر } x = \frac{325}{9} \times 72 = 2600 \quad \text{مسافت طی شده در ۷۲ ثانیه}$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{موشک اول: } x_{\max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x_{\max} = \frac{-4}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 8 \Rightarrow y_{\max} = 8016 \text{ متر}$$

$$\text{موشک دوم: } x'_{\max} = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x'_{\max} = \frac{-80}{2(-2)} = 20 \Rightarrow y'_{\max} = 1600 \text{ متر}$$

$$y_{\max} - y'_{\max} = 8016 - 1600 = 6416 \text{ متر}$$



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\sqrt{(3x-1)^2} \leq 7 \Rightarrow |3x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 3x-1 \leq 7 \Rightarrow -6 \leq 3x \leq 8$$



عبارت زیر رادیکال
همواره نامنفی است.

$$-2 \leq x \leq \frac{8}{3}$$



a



b

$$a + b = -2 + \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

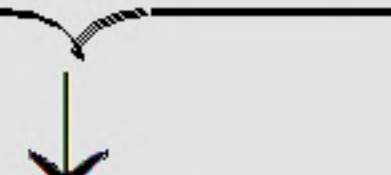
$$x+1 \leq 5-x < 2x+3$$



$$2x \leq 4$$



$$x \leq 2 \quad (1)$$



$$5-3 < 2x+x$$



$$2 < 3x$$



$$x > \frac{2}{3} \quad (2)$$

اشتراک

$$1, 2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{مجموعه جواب} = \left(\frac{2}{3}, 2\right]$$

$$y = \underbrace{|3x-2|}_{+} + \underbrace{|x-3|}_{-} + \underbrace{|4-2x|}_{+}$$

$$y = 3x-2-x+3+4-2x \Rightarrow y = 5$$

با تعیین علامت هریک از عبارات داخل قدرمطلق در بازه بالا:

b	c	a
۱	۱	۱
۱	۳	۲
۲	۲	۲
۲	۴	۳
۳	۱	۲
۳	۳	۳
۴	۲	۳
۴	۴	۴

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در حالت کلی چون برای هریک از پارامترهای a, b, c ، چهار مقدار وجود دارد، $4 \times 4 \times 4 = 64$ معادله درجه دوم مختلف می توان نوشت. حالا پیشامد مطلوب را به زبان ریاضی می نویسیم:

$$s = p - 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{c}{a} - 2 \xrightarrow{\times a} -b = c - 2a \Rightarrow b + c = 2a$$

با چک کردن مقادیر صحیح از ۱ تا ۴ به جای a, b, c به حالات قابل قبول زیر می رسیم:
برای آن که اساساً در معادله فوق، جمع و ضرب ریشه ها معنادار باشد، لازم است که شرط $\Delta > 0$ هم بررسی شود:

$$b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow b^2 > 4ac$$

اگر مقادیر قابل قبول a, b, c در هریک از ۸ سطر جدول فوق را در نامساوی بالا چک کنید، فقط حالت $b = 3, c = 1, a = 2$ صدق می کند و لذا فقط یک حالت از ۶۴ حالت قابل قبول

$$P = \frac{1}{64}$$

است:



۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله را به صورت ساده‌تری می‌نویسیم:

$$\sqrt{2(x^2 - 3x + 4)} = -(x^2 - 3x)$$

$$\sqrt{2(t+4)} = -t$$

حالا با تغییر متغیر $x^2 - 3x = t$ داریم:

$$2(t+4) = t^2 \Rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \Rightarrow t = 4, -2$$

طرفین این معادله گنگ را به توان دو می‌رسانیم:

اگر ریشه‌های به دست آمده را در معادله گنگ اولیه (برحسب t) چک کنیم، $t = -2$ قابل قبول و $t = 4$ غیرقابل قبول

$$t = -2 \Rightarrow x^2 - 3x = -2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, 2$$

است. حالا داریم:

$$k^2 = 1 \times 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$$

اگر واسطه هندسی بین این دو ریشه را k بنامیم داریم:

پس واسطه هندسی منفی برابر با $-\sqrt{2}$ است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی ریشه‌های معادله، دو عدد فرد متوالی هستند، حتماً اختلاف ریشه‌ها برابر با ۲ است.

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 2 \xrightarrow{a=2} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = 2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow \Delta = 16$$

پس:

$$(-2m)^2 - 4(2)(7m - 26) = 16 \Rightarrow 4m^2 - 56m + 208 = 16 \Rightarrow 4m^2 - 56m + 192 = 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 14m + 48 = 0 \Rightarrow m = 6, 8$$

اما دقت کنید که دو عدد با اختلاف ۲ لزوماً دو عدد فرد متوالی نیستند، شاید دو عدد زوج متوالی باشند! پس مقادیر به دست آمده برای m را چک می‌کنیم:

$$m = 6 \Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 12x + 16 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2, 4 \quad \text{غ ق ق (دو عدد زوج متوالی)}$$

$$m = 8 \Rightarrow \text{معادله: } 2x^2 - 16x + 30 = 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = 3, 5 \quad \text{ق ق (دو عدد فرد متوالی)}$$

پس فقط $m = 8$ قابل قبول است، یعنی مجموع دو تاس ریخته شده باید برابر با ۸ باشد:

تاس‌ها $\Rightarrow (2, 6)(6, 2)(3, 5)(5, 3)(4, 4)$: حالت ۵

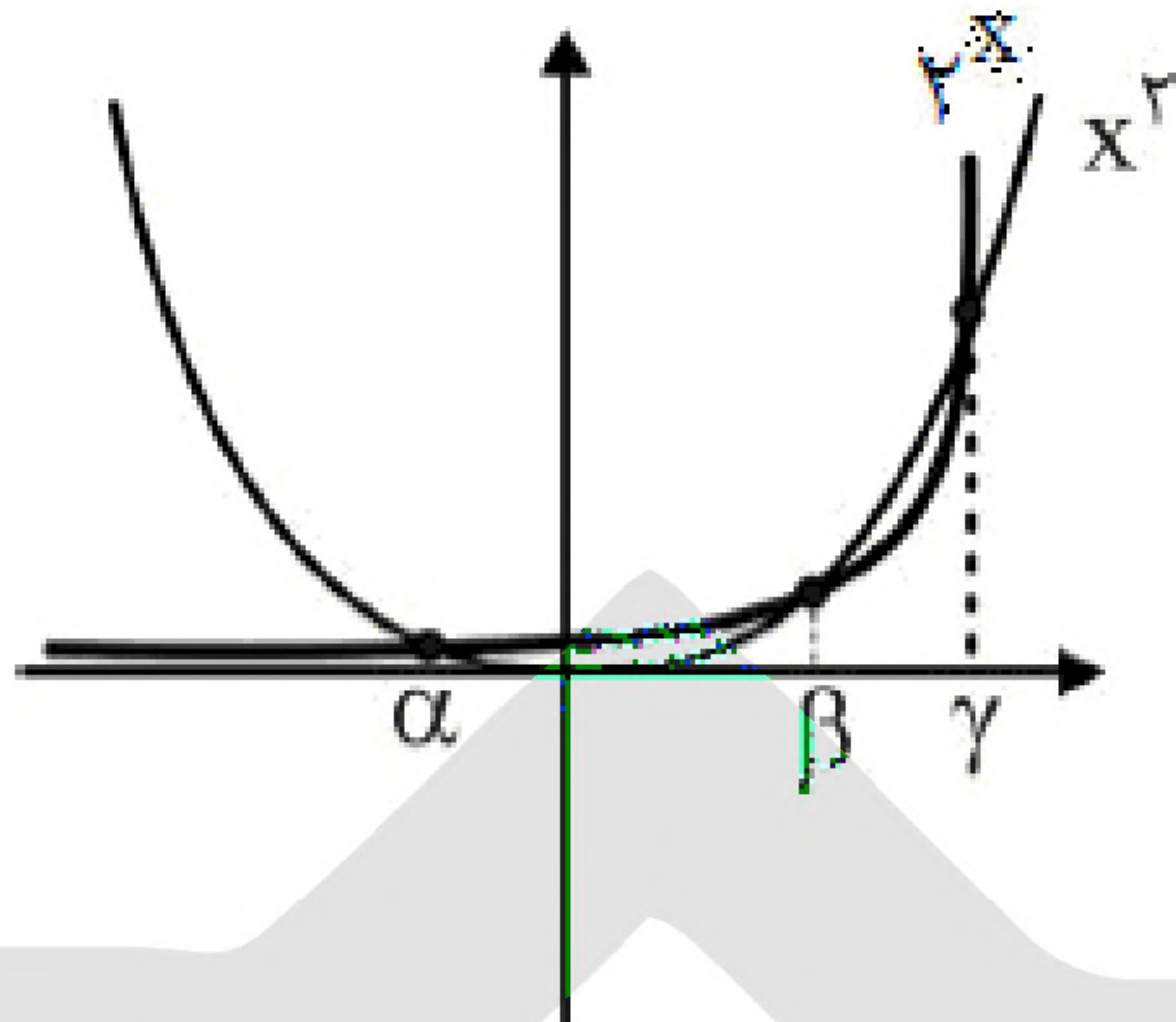
پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{5}{36}$ است.



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. منظور از صفرهای تابع f ، ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ هستند. پس داریم:

$$x^2 - 2^x = 0 \Rightarrow x^2 = 2^x$$

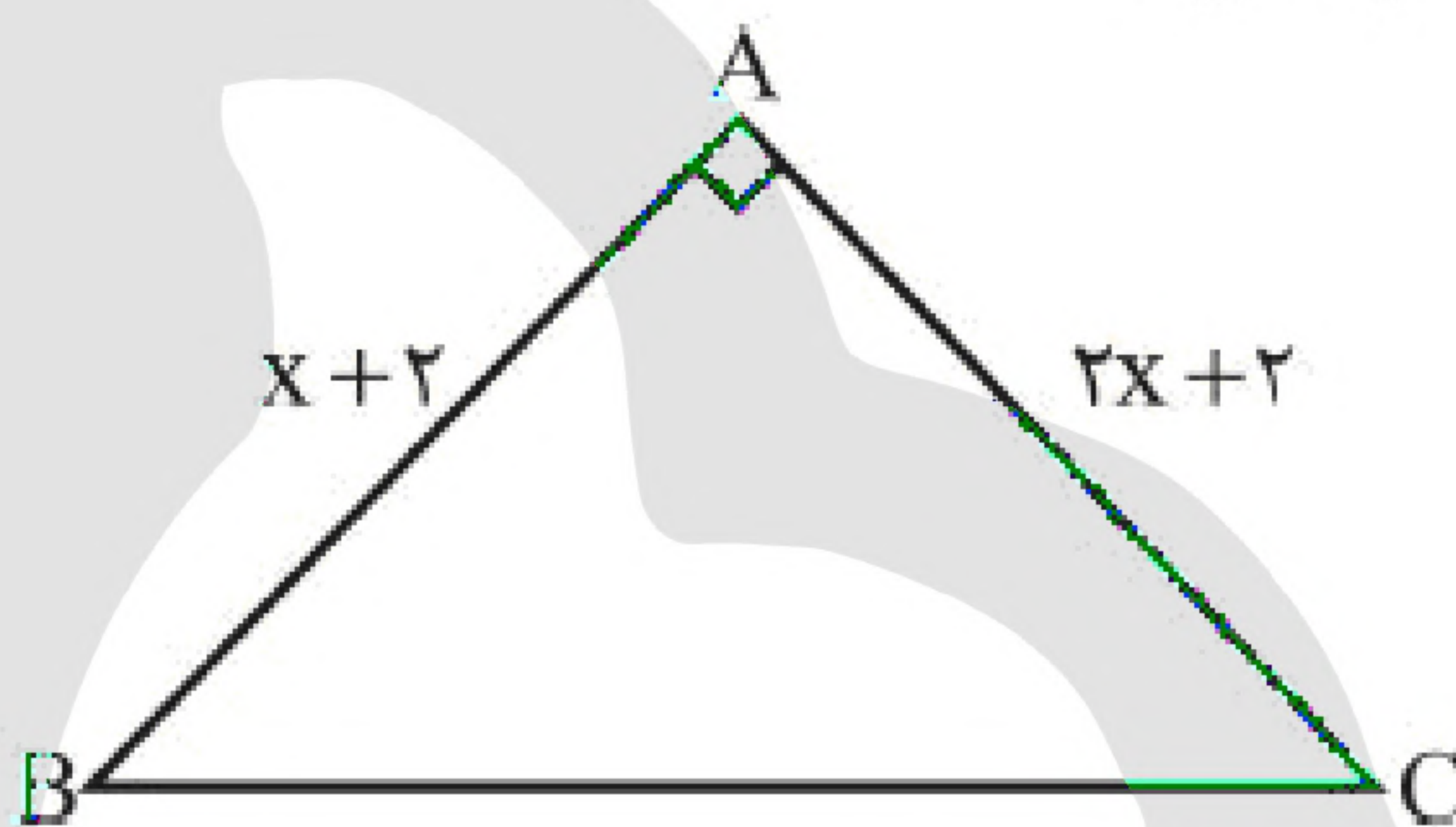
نمودار دو طرف معادله را رسم می‌کنیم:



$$\begin{cases} \alpha = 0, -1 \Rightarrow [\alpha] = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 4 \end{cases}$$

با توجه به نمودار، این معادله سه ریشه به صورت‌های زیر دارد:

پس مثلث موردنظر به صورت زیر خواهد بود:



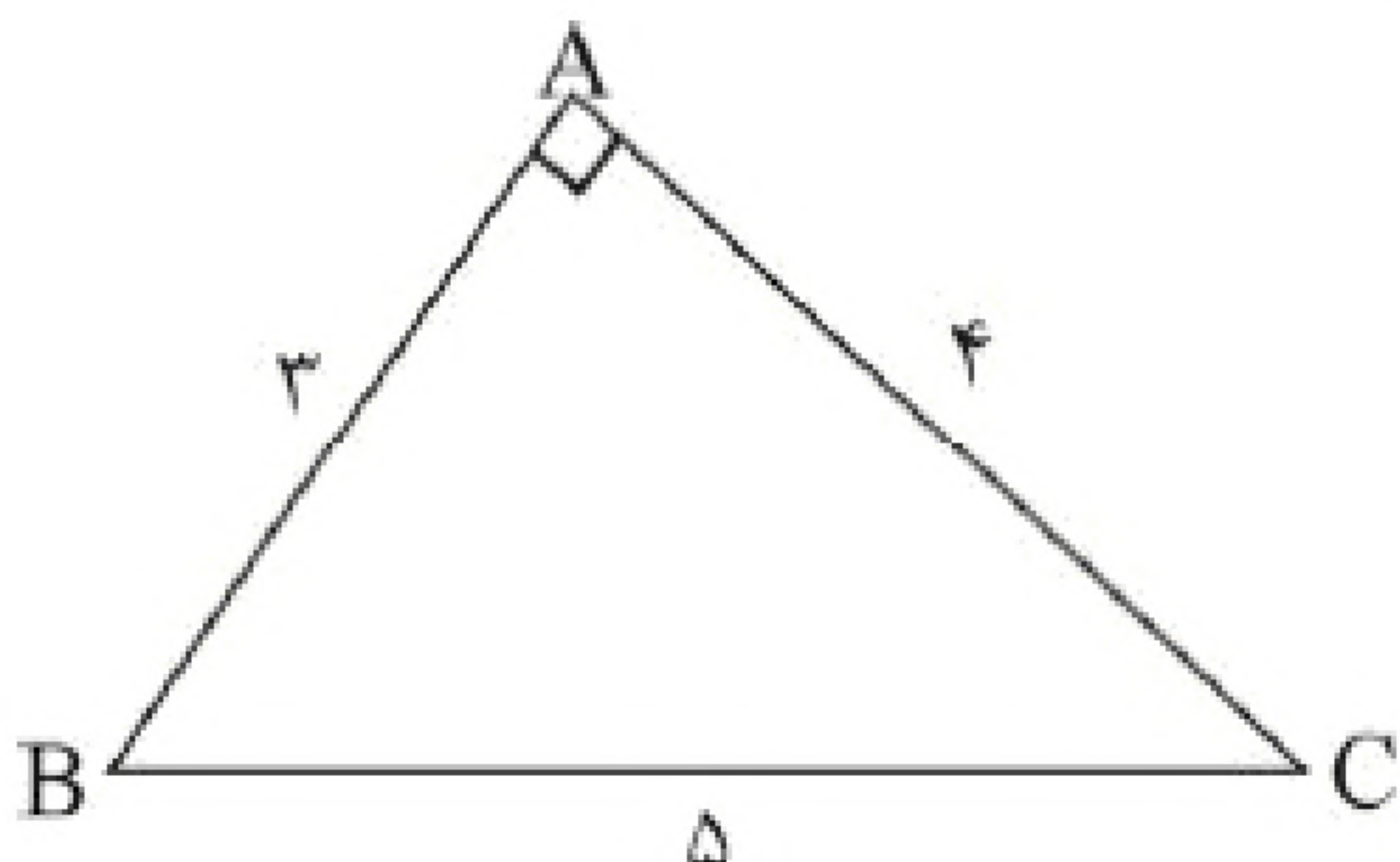
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \hat{B} = \frac{2x+2}{x+2} \\ \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{x+2}{2x+2} \end{cases}$$

در این مثلث داریم:

پس:

$$\begin{aligned} \frac{2x+2}{x+2} + \frac{x+2}{2x+2} &= \frac{25}{12} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } 12(x+2)(2x+2)} 12(2x+2)^2 + 12(x+2)^2 \\ &= 25(x+2)(2x+2) \Rightarrow (48x^2 + 96x + 48) + (12x^2 + 48x + 48) \\ &= 50x^2 + 150x + 100 \Rightarrow 10x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 1 \\ -\frac{2}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

با جایگذاری $x = 1$ در اضلاع مثلث، مثلث موردنظر به صورت زیر می‌شود:



$$\sin \hat{B} = \frac{4}{5}$$



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در معادله درجه سوم $ax^3 + bx^3 + cx + d = 0$ در صورت داشتن سه ریشه داریم:

$$S = \frac{-b}{a} \quad P = \frac{-d}{a}$$

$$S = \frac{-b}{a} = 3 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3$$

در اینجا:

از طرفی چون α و β و γ تشکیل دنباله عددی (حسابی) می دهند، β واسطه حسابی میان α و γ است، یعنی:

$$2\beta = \alpha + \gamma$$

$$3\beta = 3 \Rightarrow \beta = 1$$

با جایگذاری در $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\beta} = 3$ داریم:

با جایگذاری $\beta = 1$ در معادله، مقدار پارامتر m به دست می آید:

$$x^3 - 3x^2 + (m - 4)x + m = 0 \xrightarrow{x=1} 1 - 3 + m - 4 + m = 0 \Rightarrow m = 3$$

صدق می کند

پس معادله به صورت $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ بوده و داریم:

$$P = \frac{-d}{a} = -3 \Rightarrow \alpha\beta\gamma = -3 \xrightarrow{\beta=1} \alpha\gamma = -3$$



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. β به عنوان ریشه در معادله صدق می کند. پس:

$$2\beta^2 - 9\beta + 6 = 0 \Rightarrow 2\beta^2 + 6 = 9\beta \xrightarrow{\text{تقسیم بر } 2} \beta^2 + 3 = \frac{9}{2}\beta$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow \alpha\beta = 3 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{\beta}$$

از طرفی در معادله موردنظر داریم:

پس ریشه های $(\beta^2 + 3)$ و $(\alpha + \frac{3}{\beta})$ به صورت $(\frac{9}{2}\beta)$ و (2α) درمی آیند و در واقع دنبال معادله درجه دومی

هستیم که ریشه هایش $(\frac{9}{2}\beta)$ و (2α) هستند:

$$S = (2\alpha) + \left(\frac{9}{2}\beta\right)$$

تلاش می کنیم که ضرایب α و β یکی شوند، برای این منظور از طریق میانگین ضرایب یعنی $\frac{2 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{13}{4}$ می نویسیم:

$$(2\alpha) + \left(\frac{9}{2}\beta\right) = \left(\frac{13}{4}\alpha - \frac{5}{4}\alpha\right) + \left(\frac{13}{4}\beta + \frac{5}{4}\beta\right) = \left(\frac{13}{4}\alpha + \frac{13}{4}\beta\right) + \left(\frac{5}{4}\beta - \frac{5}{4}\alpha\right)$$

$$= \frac{13}{4}(\alpha + \beta) + \frac{5}{4}(\beta - \alpha) = \frac{13}{4}S + \frac{5}{4}\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

تفاضل ریشه ها جمع ریشه ها

$$S = \frac{9}{2} \xrightarrow{\Delta = 33} \frac{13}{4}\left(\frac{9}{2}\right) + \frac{5}{4}\left(\frac{\sqrt{33}}{2}\right) = \frac{117}{8} + \frac{5\sqrt{33}}{8} = \frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}$$

$$P = (2\alpha)\left(\frac{9}{2}\beta\right) = 9(\alpha\beta) = 9(3) = 27$$

ضرب ریشه ها

با توجه به اینکه در معادله جدید، $S = \frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}$ و $P = 27$ است، پس این معادله به صورت زیر می شود:

$$x^2 - \left(\frac{117 + 5\sqrt{33}}{8}\right)x + 27 = 0 \Rightarrow 8x^2 - (117 + 5\sqrt{33})x + 216 = 0$$

از مقایسه این معادله با معادله داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = 117 \\ b = 5 \\ c = 216 \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a+b} = \frac{216}{122} = \frac{108}{61} = 1/7$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قبل از شروع به حل دقت کنید که در کسر $\frac{3-x}{x^2-x-6}$ می‌توان برای راحتی، عبارت

۳- x را از صورت منخرج ساده کرد:

$$\frac{-(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{-1}{x+2}$$

$$\frac{3x+1}{x-2} - \frac{20x-9}{x+2} = \frac{-1}{x+2}$$

پس داریم:

حالا طرفین تساوی را در عبارت $(x-2)(x+2)$ ضرب می‌کنیم تا منخرج کسرها از بین برود:

$$(3x+1)(x+2) - (20x-9)(x-2) = -1(x-2) \Rightarrow (3x^2 + 7x + 2) - (20x^2 - 49x + 18) = -1(x-2)$$

$$= -x + 2 \Rightarrow -17x^2 + 56x - 16 = -x + 2 \Rightarrow 17x^2 - 57x + 18 = 0 \Rightarrow x = \left\{ \frac{6}{17}, 3 \right\}$$

اما دقت کنید، $x = 3$ به عنوان ریشه منخرج غیرقابل قبول بوده و این معادله فقط یک ریشه دارد، لذا واسطه هندسی بین ریشه‌های این معادله اساساً بی‌معنی است.

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در گردنبد موردنظر، سهم پلاتین یک درصد و طبیعتاً سهم طلا ۹۹ درصد است. حالا قرار

است، سهم طلا به ۹۰ درصد و سهم پلاتین به ۱۰ درصد برسد.

پس باید مقداری پلاتین به گردنبد اضافه شود. ببینید:

$$\frac{\text{وزن فعلی پلاتین}}{\text{وزن گردنبد}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{وزن پلاتین} = 0.1 \text{ گرم}$$

حالا فرض کنید x گرم پلاتین اضافه می‌شود. بنابراین وزن پلاتین $0.1 + x$ و وزن کل $10 + x$ می‌شود. پس:

$$\frac{0.1 + x}{10 + x} = \frac{10}{100} \Rightarrow 10 + 100x = 100 + 10x \Rightarrow 90x = 90 \Rightarrow x = 1$$

یعنی باید یک گرم پلاتین اضافه شود.

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محور x ها بر رأس سهمی مماس است:

$$9 - 4(-2)(2a) = 0 \Rightarrow 9 + 16a = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{16}$$

$$x_0 = \frac{-3}{2(-2)} = \frac{3}{4}$$

$$x_0 + a = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} a_{25} = a_1 + 24d = 10 \\ a_{10} = a_1 + 9d = 25 \end{cases} \Rightarrow 15d = 10 - 25 = -15 \Rightarrow d = -1 \Rightarrow a_1 = 34$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} [2 \times 34 + 24(-1)] = \frac{25}{2} \times 44 = 550$$



$$S = 3, P = 1$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A = x_2^2 \sqrt{x_1} + x_1^2 \sqrt{x_2}$$

$$A^2 = x_2^4 \cdot x_1 + x_1^4 \cdot x_2 + 2x_1^2 x_2^2 \sqrt{x_1 x_2} \Rightarrow A^2 = x_1 x_2 (x_1^3 + x_2^3) + 2x_1^2 x_2^2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$A^2 = x_1 x_2 [(x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)] + 2(x_1 x_2)^2 \sqrt{x_1 x_2}$$

$$A^2 = P[S^3 - 3PS] + 2P^2 \sqrt{P} = 1[27 - 9] + 2 = 20$$

$$A = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای پیدا کردن محل برخورد میانه‌ها کافی است معادله دو میانه را نوشته و قطع دهیم:

$$\begin{aligned} \text{AB وسط } M(3, 3) &\Rightarrow y - 3 = \frac{-2-3}{-2-3}(x-3) \Rightarrow y = x \\ \text{AC وسط } N(1, 0) &\Rightarrow y - 0 = \frac{4-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = 4x - 4 \end{aligned} \Rightarrow O\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ محل برخورد میانه‌ها}$$

برای یافتن محل برخورد عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC کافی است معادله دو عمودمنصف را نوشته و قطع دهیم:

$$\text{AB وسط } M(3, 3), m_{AB} = \frac{4-2}{2-4} = -1 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m_{\Delta \text{ عمودمنصف}} = 1 \Rightarrow$$

$$\text{AC وسط } N(1, 0), m_{AC} = \frac{-2-2}{-2-4} = \frac{2}{3} \Rightarrow m_{\Delta'} = \frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ محل برخورد عمودمنصف‌ها}$$

$$IO = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{5}\right)^2} = \frac{11\sqrt{2}}{15}$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AC = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{5} \text{ طول قطر کوچک}$$

$$\text{AC معادله ی: } \frac{y-2}{x+2} = \frac{0-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2y-4 = -x-2 \Rightarrow x+2y-2=0$$

$$BH = \frac{|1 \times 2 + 2 \times 5 - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{مساحت لوزی} = 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 20$$



۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین $x = -4$ و $x = 1$ صفرهای تابع هستند:

$$f(x) = -3(x-1)(x+4) = -3x^2 - 9x + 12$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$a = -9 \quad b = 12$$

$$b - a = 12 - (-9) = 21$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر x_1 و x_2 محل برخورد با محور x ها باشند:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$y = a(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$$

$$\text{جاگذاری در تابع} \rightarrow \text{محل برخورد با محور } y \text{ها } (0, 4) \rightarrow -14 = a(0 - (3 + \sqrt{2}))(0 - (3 - \sqrt{2}))$$

$$\Rightarrow a = -2$$

$$y = -2(x - (3 + \sqrt{2}))(x - (3 - \sqrt{2}))$$

$$y = -2x^2 + 12x - 14 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (-2)^2 + 12^2 + (-14)^2 = 344$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3x \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 16 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = -2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 5^3 + (-2)^3 = 117$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$a = c \Rightarrow$ دو ریشه معکوس یکدیگرند.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} \Rightarrow b = \frac{5a}{2}$$

$$ax^2 + \frac{5a}{2}x + a = 0$$

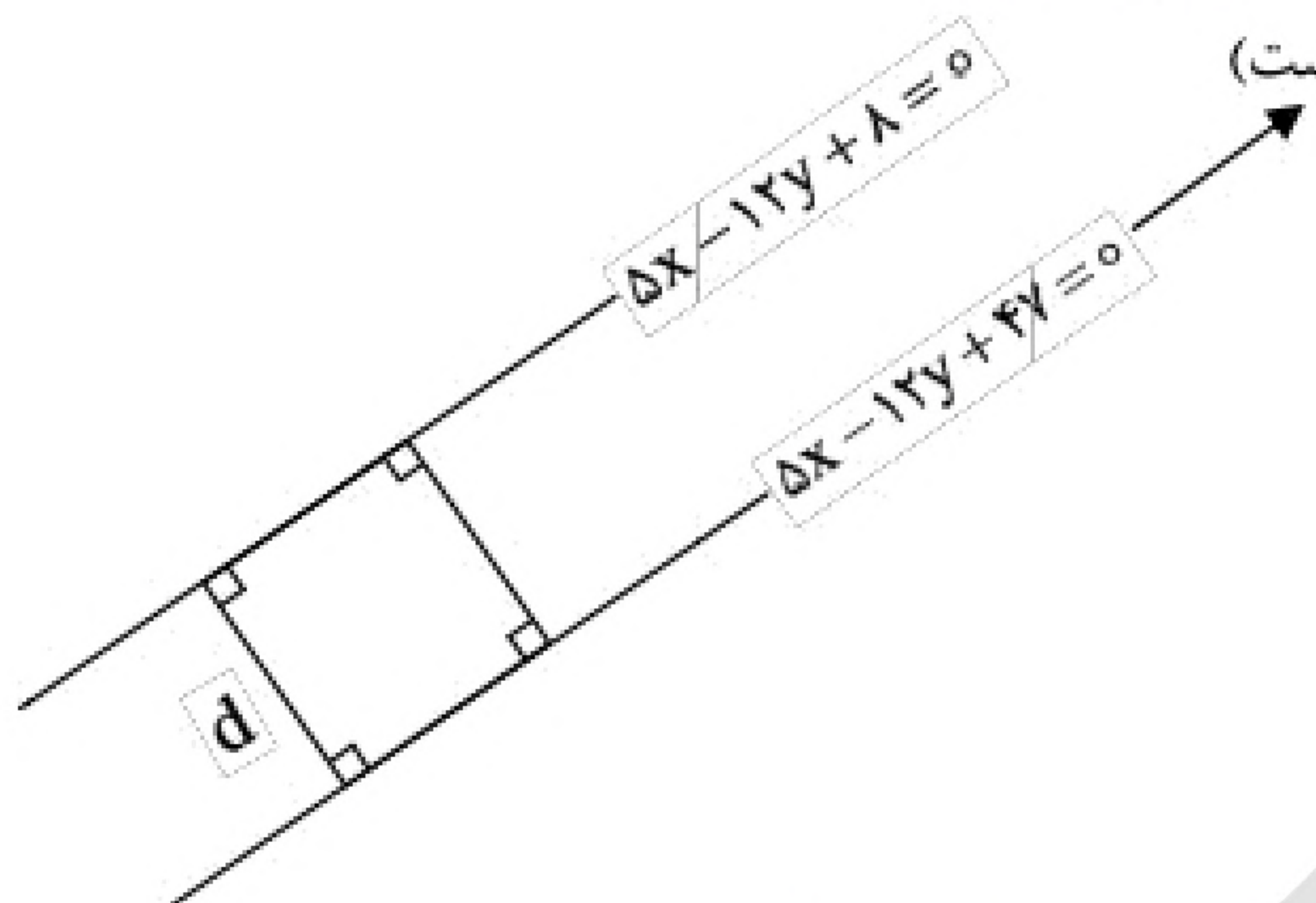
$$x = \frac{-\frac{5a}{2} \pm \sqrt{\frac{25a^2}{4} - 4a^2}}{2a} = \frac{-\frac{5a}{2} \pm \frac{3a}{2}}{2a} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} - (-2) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

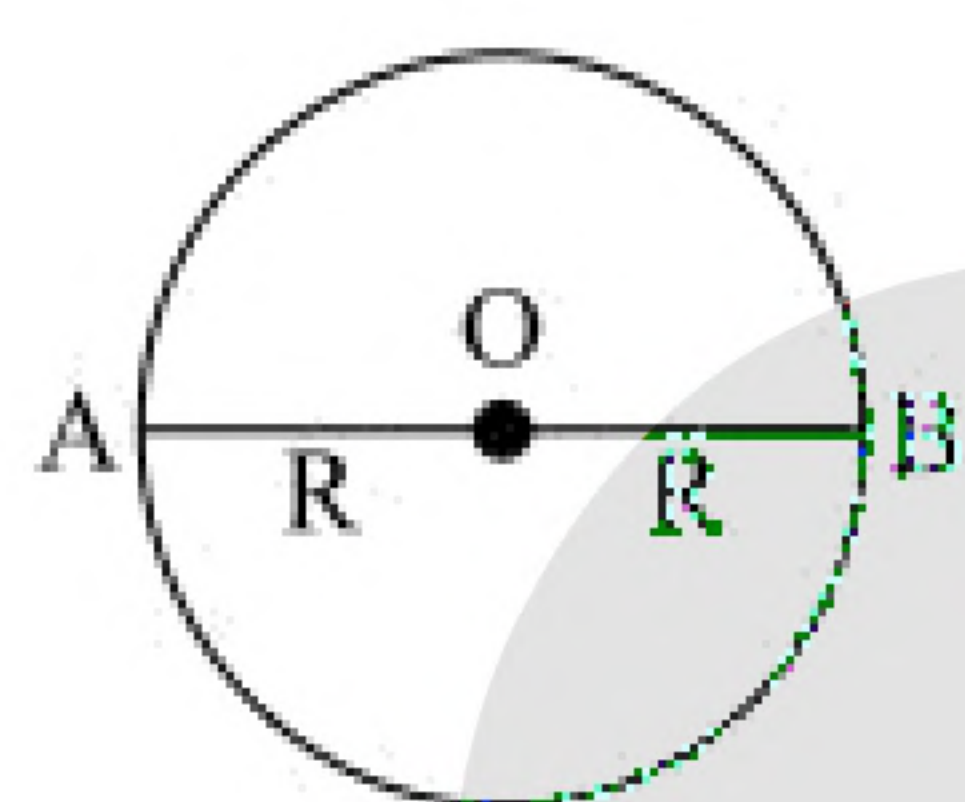


۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. براساس نتیجه تمرین ۸ صفحه ۹ کتاب ریاضی (۲):

(دو طرف معادله خط بر ۲- تقسیم شده است)



$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|47 - 1|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} \Rightarrow d = 3 \Rightarrow S_{\square} = d^2 = 9$$



$$AB = 2R = \sqrt{6 - (-2)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$\Rightarrow R = 5 \rightarrow S_{\bigcirc} = \pi R^2 = 3(5)^2 = 75$$

$$\text{اختلاف ۲ مساحت} = 75 - 9 = 66$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. محیط دایره برابر 8π است، بنابراین $2\pi R = 8\pi \leftarrow R = 4$ از طرفی فاصله بین دو خط موازی برابر قطر دایره یعنی ۸ می شود:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ 8y + ax = b \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} 8y - 6x = -2 \\ 8y + ax = b \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی}} a = -6$$

$$8 = \frac{|b - (-2)|}{\sqrt{(-6)^2 + 8^2}} \Rightarrow |b + 2| = 8 \Rightarrow \begin{cases} b = 78 \\ b = -82 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} 3a + b &= 3(-6) + 78 = 60 \\ 3a + b &= 3(-6) - 82 = -100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف دو مقدار} = 100 - 60 = 40$$



$$2^3 \times \frac{1}{2^{2x}} + 2^3 \times 2^{2x} = 20$$

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{2}{t} + 2t = 5 \xrightarrow{\times t} 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Rightarrow \text{تقسیم طرفین معادله بر ۲ و } 2^{2x} = t \text{ : با فرض}$$

$$\Delta = 9, t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}$$

$$2^{2x} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} = \alpha$$

$$2^{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} = \beta$$

$$\frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\beta^2} = 2(4) + 3(4) = 20$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض: $x_1 > x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+1}{2} = 2(-4) = -8$$

$$\Rightarrow -m+1 = -16 \Rightarrow -m = -17 \Rightarrow m = 17$$

$$\Rightarrow m + x_1 - x_2^2 = 17 + 2 - (-4)^2 = 19 - 16 = 3$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مرکز دایره محل برخورد قطرهایست. بنابراین دو قطر دلخواه انتخاب و محل تلاقی آن دو را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} m=0 \Rightarrow y=-1 \\ m=1 \Rightarrow x=1 \end{cases} \Rightarrow O(1, -1)$$

فاصله نقطه‌ی O (مرکز دایره) تا خط مماس $3x + 4y = 9$ همان شعاع دایره است:

$$R = \frac{|3(1) + 4(-1) - 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S = \pi R^2 = \pi (2)^2 = 4\pi \xrightarrow{\text{با فرض } \pi = 3} S = 12$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به ویژگی $|a| - |b| \leq |a - b|$:

$$|3x - 11| - 3|x + 5| \leq |3x - 11 - 3x - 15|$$

$$f(x) \leq 26 \Rightarrow \max(f(x)) = 26$$

$$x_{\min} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2 \Rightarrow \min(g(x)) = 2^2 - 4(2) - 18 = -22$$

$$\text{اختلاف دو مقدار خواسته شده: } \max(f(x)) - \min(g(x)) = 26 - (-22) = 48$$



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta = m^2 - 4(1-m)(-1) > 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 > 0$$

$$(m-2)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 2$$

$$S = \frac{-(-m)}{1-m} < 0 \Rightarrow m < 0 \cup m > 1$$

$$P = \frac{-1}{1-m} > 0 \Rightarrow 1-m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$(1, +\infty) - \{2\} = (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$AB = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AB \text{ معادله: } 3x - 4y + 6 = 0$$

$$CH = \frac{|3 \times 0 + (-4)(-1) + 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$S_{ABCD} = 5 \times 2 = 10$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.