

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

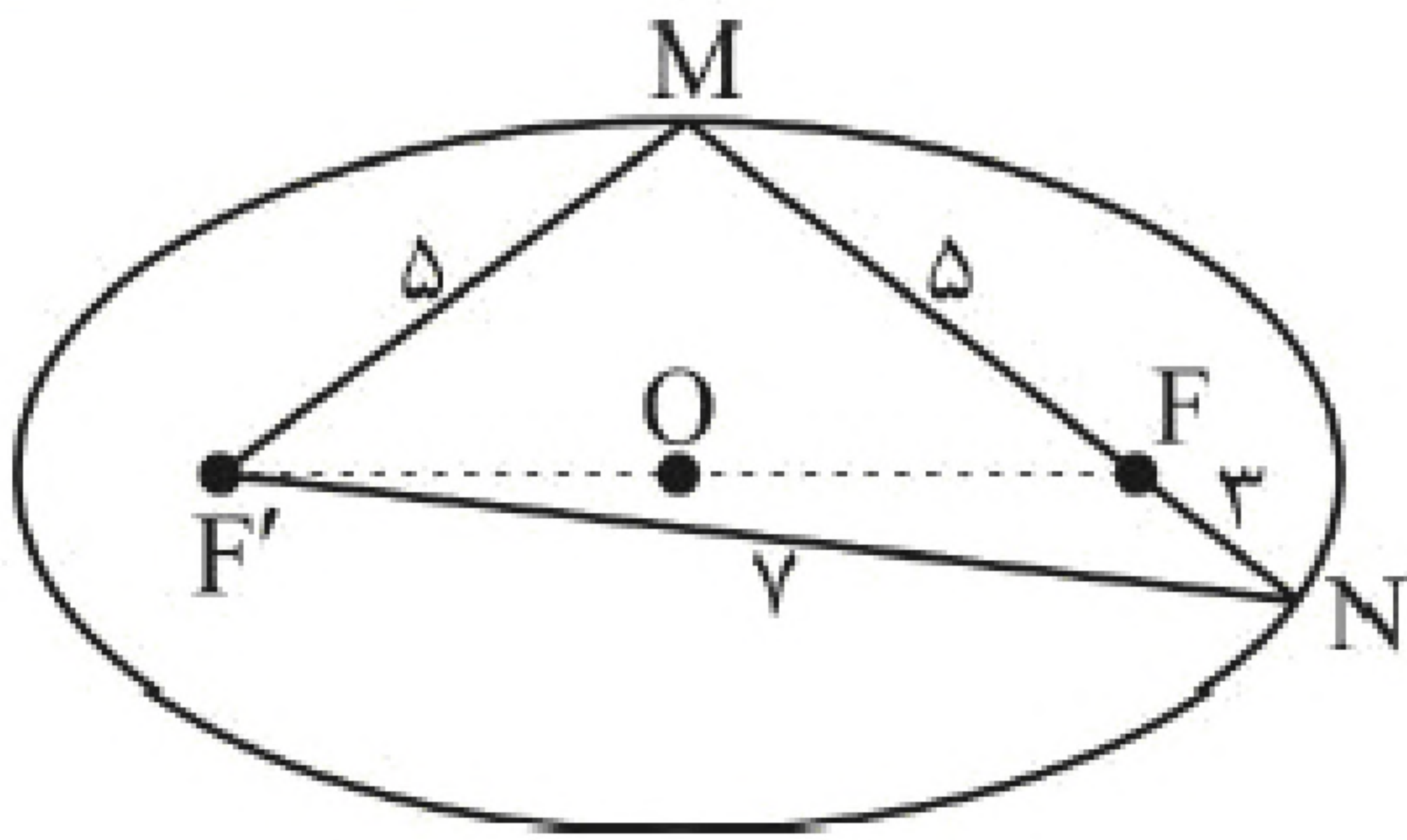
۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$MF + MF' = 2a = 10 \Rightarrow MF' = 5, \quad NF + NF' = 10 \Rightarrow NF' = 7$$

بنابه قضیه استوارت در مثلث MNF'

$$FF'^2 = \frac{MF \times NF'^2 + NF \times MF'^2}{MF + NF} - MF \times NF$$

$$= \frac{5 \times 49 + 3 \times 25}{5 + 3} - 5 \times 3 = 25$$

$$FF' = 5 \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - \frac{25}{4} = \frac{75}{4} \Rightarrow b = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad 2b = 5\sqrt{3}$$

$$AB = AC = 2\sqrt{2}, \quad BC = 4 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است، مرکز دایره محیطی مثلث نقطه هم‌رسی عمود منصف‌ها است و این نقطه در مثلث قائم الزاویه وسط وتر است. شعاع دایره محیطی مثلث نصف ضلع BC است یعنی:

$$R = \frac{BC}{2} = 2$$

بنابراین مساحت دایره برابر با $S = 4\pi$ است.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt{8} = 4$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$4\pi - 4 = 4(\pi - 1)$$

پس مساحت بین دایره و مثلث برابر است با:

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر قطر دهانه، فاصله کانونی و گودی (عمق) یک دیش را به ترتیب با d , a , h نمایش

دهیم؛ آنگاه $a = \frac{d^2}{16h}$ خواهد بود و بنابراین:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\frac{d_1^2}{16h_1}}{\frac{d_2^2}{16h_2}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \times \frac{h_2}{h_1} = \left(\frac{d_1}{\frac{1}{3}d_1}\right)^2 \times \frac{h_2}{\frac{1}{2}h_2} = 9 \times 2 = 18$$

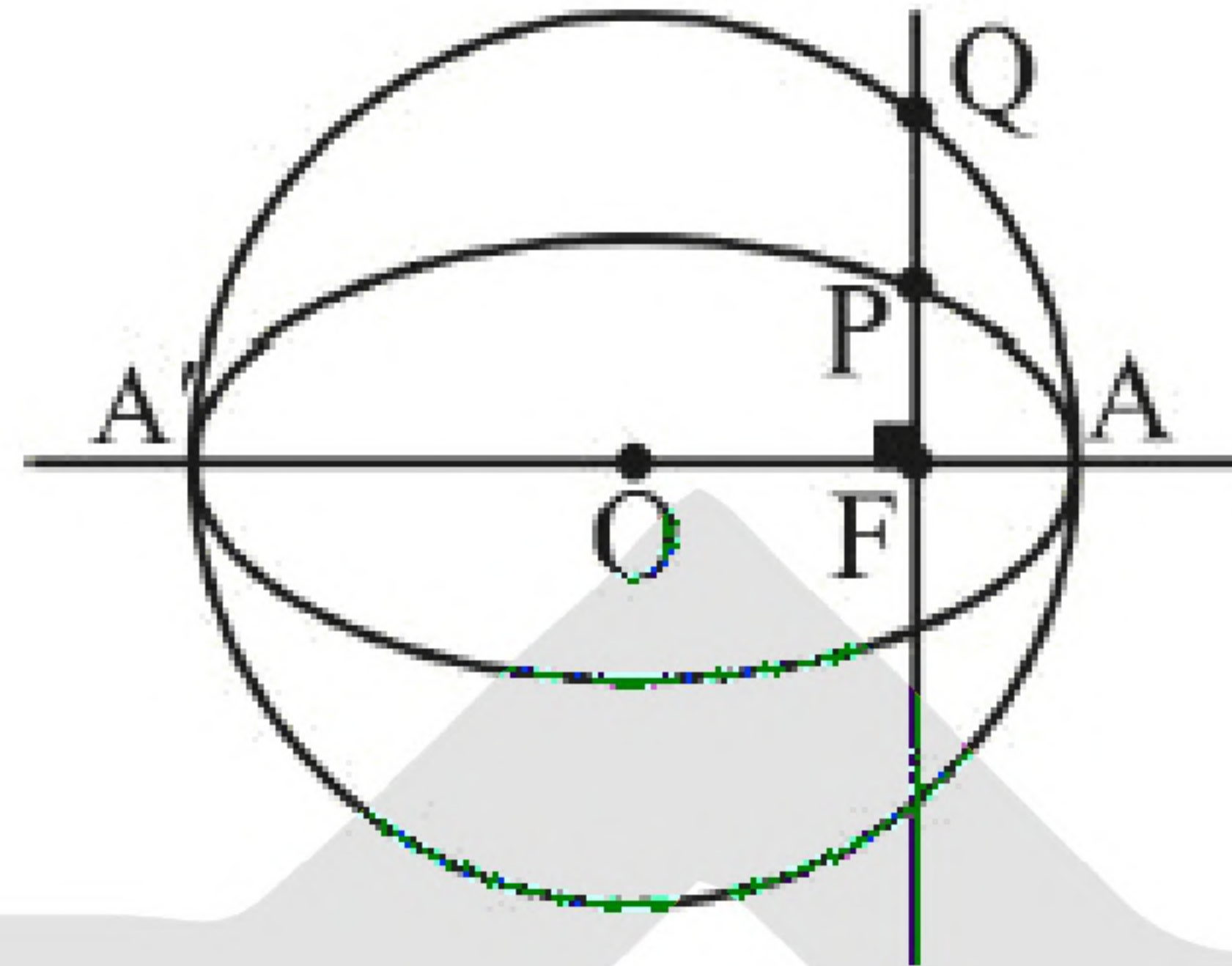


$$AA' = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

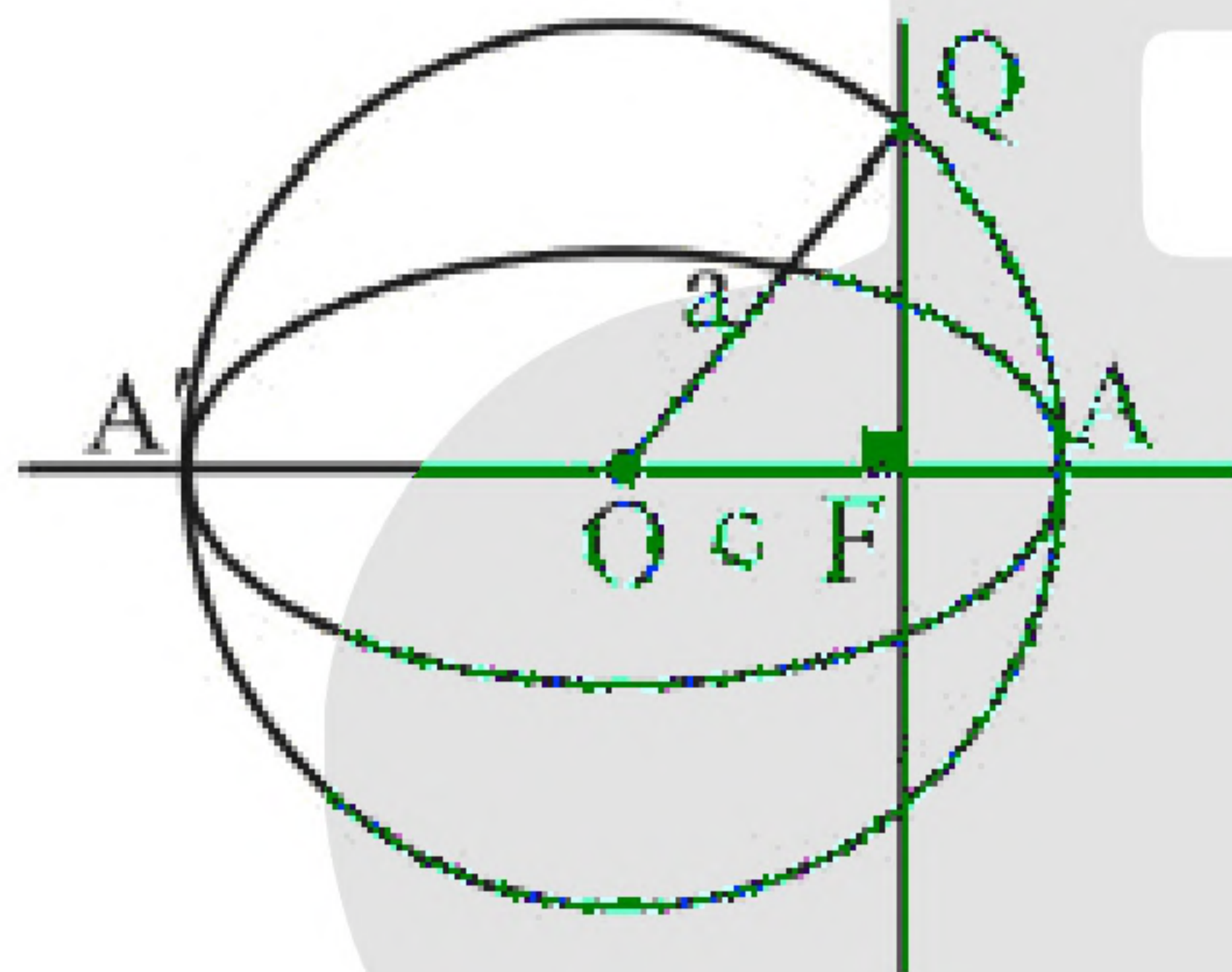
۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$BB' = 8 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow c^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow c = 3$$

دایره به مرکز نقطه O و به شعاع 5 در نقاط A و A' بر بیضی مماس است. برای یافتن اندازه پاره خط PQ باید اندازه پاره‌های FQ و FP را پیدا کنیم.



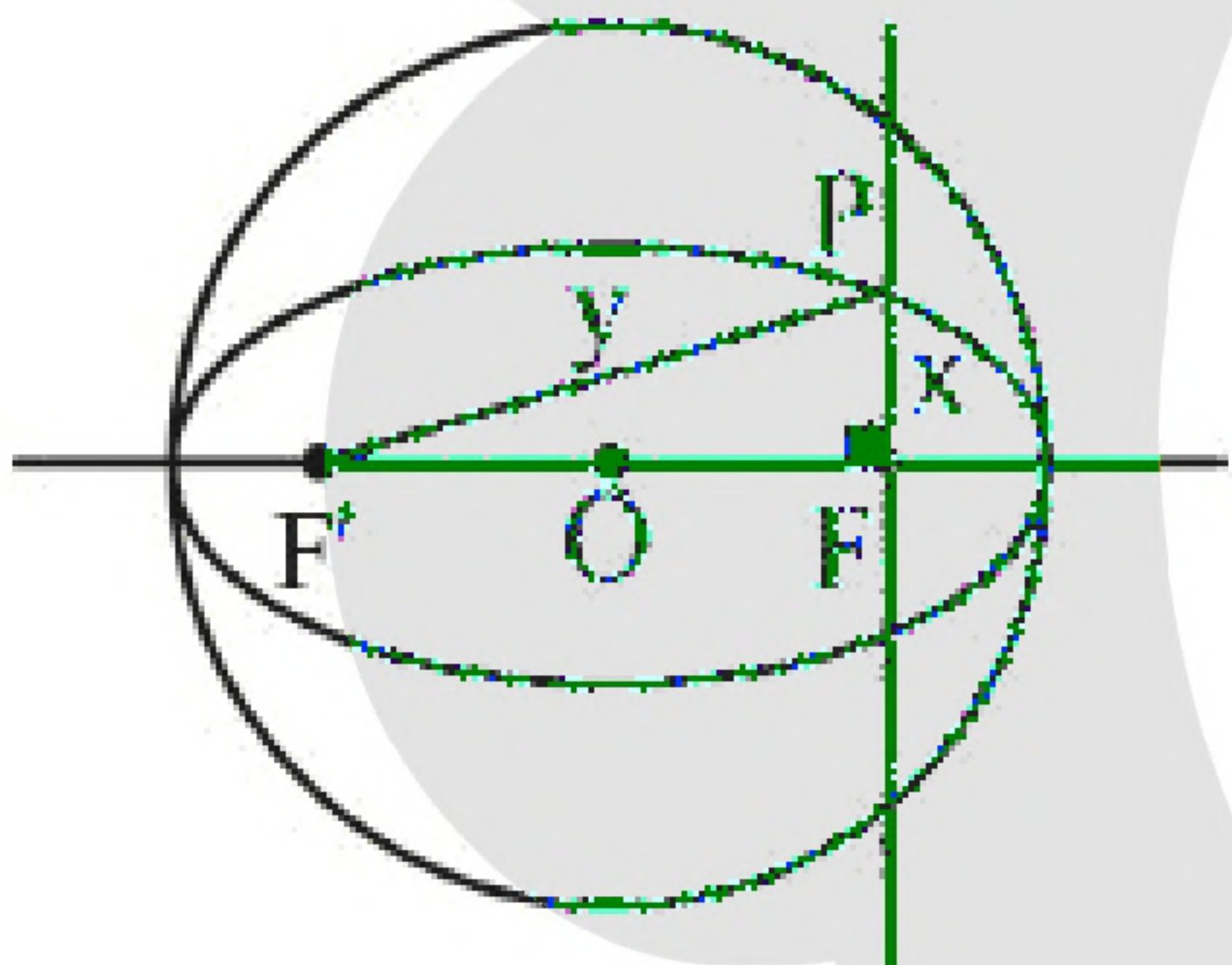
با توجه به شکل زیر خواهیم داشت:



$$OQ = OA = a = 5$$

$$\Delta OFQ : FQ^2 = a^2 - c^2 = b^2 \Rightarrow FQ = b = 4$$

در شکل مقابل، مثلث $PF'F$ قائم‌الزاویه است. بنابراین:



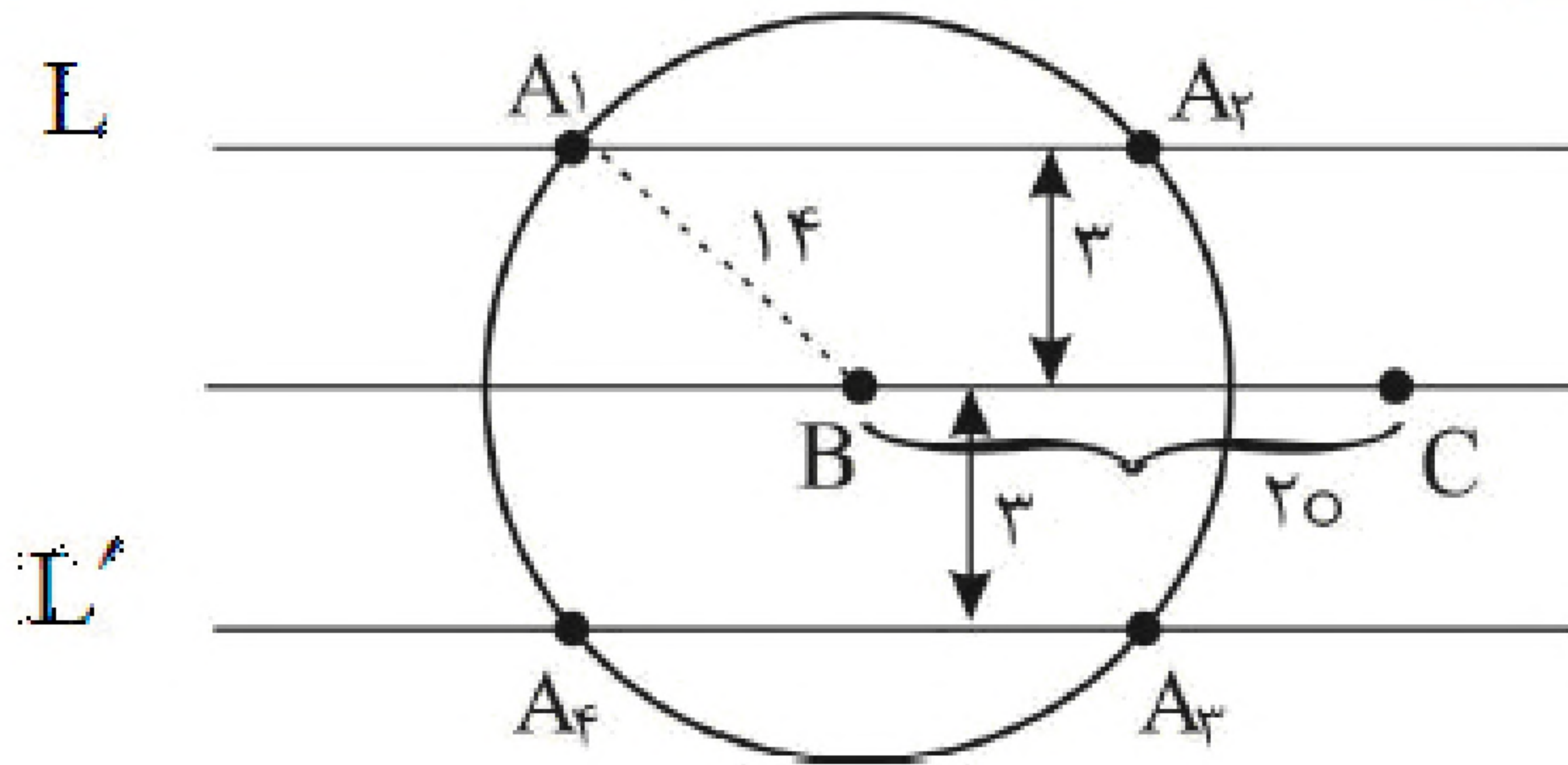
$$x^2 + FF'^2 = y^2 \Rightarrow y^2 - x^2 = (2c)^2 = 4c^2 = 4 \times 9 = 36$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 36 \\ x + y = 2a = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y - x)(10) = 36 \Rightarrow y - x = \frac{36}{10}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - x = \frac{36}{10} \\ y + x = 10 \end{cases} \Rightarrow 2x = 10 - \frac{36}{10} = \frac{64}{10} \Rightarrow x = \frac{32}{10} = \frac{16}{5} \Rightarrow FP = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow PQ = FQ + FP = 4 - \frac{16}{5} = \frac{4}{5}$$



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض آنکه AH ارتفاع وارد بر ضلع $BC = 20$ در مثل ABC باشد، آنگاه:

$$S = \frac{1}{2} BC \times AH \Rightarrow 30 = \frac{1}{2} \times 20 \times AH$$

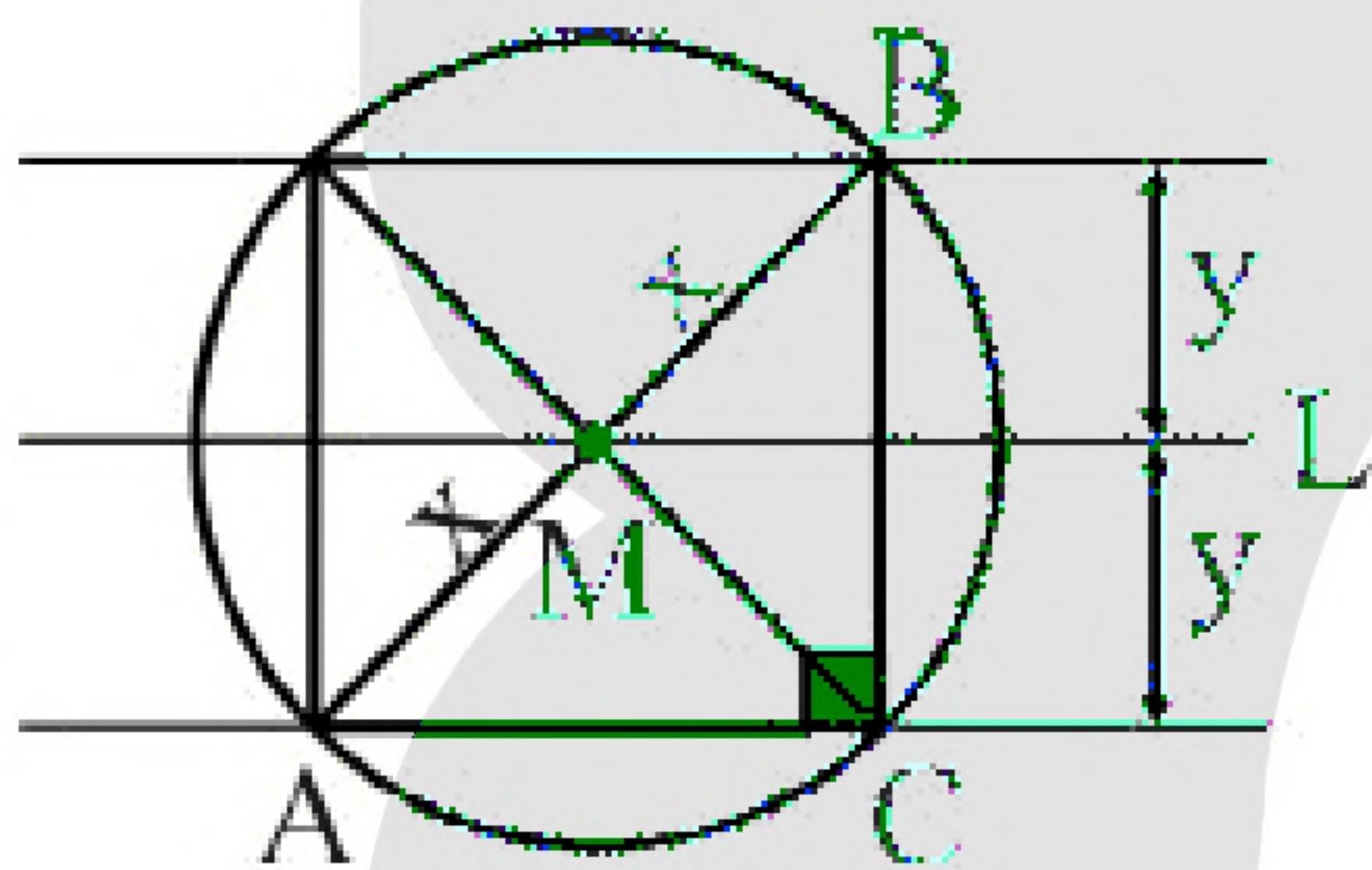
$$\Rightarrow AH = 3$$

بنابراین: نقطه A به فاصله ۳ واحد از خط گذرنده از BC قرار دارد. مکان هندسی نقطه A

دو خط موازی L و L' مطابق شکل است که در آن باید $AB = 14$ باشد. برای رعایت این شرایط کافی است دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۱۴ رسم کنیم. نقاط برخورد این دایره با دو خط L و L' جواب مسئله است. (۴ نقطه A_1 و A_2 و A_3 و A_4)

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. سطح مقطع حاصل مستطیل، دو خط متقاطع و سهمی (۳ مورد) نمی‌تواند باشد.

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\triangle ABC : AB^2 = AC^2 + CB^2 \Rightarrow (2x)^2 = (2y)^2 + (2y)^2$$

$$4x^2 = 8y^2 \Rightarrow x^2 = 2y^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}y$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به مسئله کتاب درسی، تناسب زیر برقرار است:

$$\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH} \Rightarrow \frac{NM + 6}{FA} = \frac{2 \times 3TH}{TH} \Rightarrow NM + 6 = 6FA \quad (1)$$

از طرفی، طبق تعریف سهمی فاصله هر نقطه روی سهمی از کانون با فاصله آن از خط هادی برابر است، یعنی:

$$MF = MT = 6 \text{ و نیز } HF = 2FA \text{ (توجه: } AH = AF = a \text{ رأس } A \text{ و } a \text{ اندازه پارامتر سهمی است):}$$

$$\triangle HFN \text{ در } : MT \parallel HF \xrightarrow[\text{جزء به کل}]{\text{تالس}} \frac{NM}{NF} = \frac{MT}{HF} \Rightarrow \frac{NM}{NM + 6} = \frac{6}{2FA} \quad (2)$$

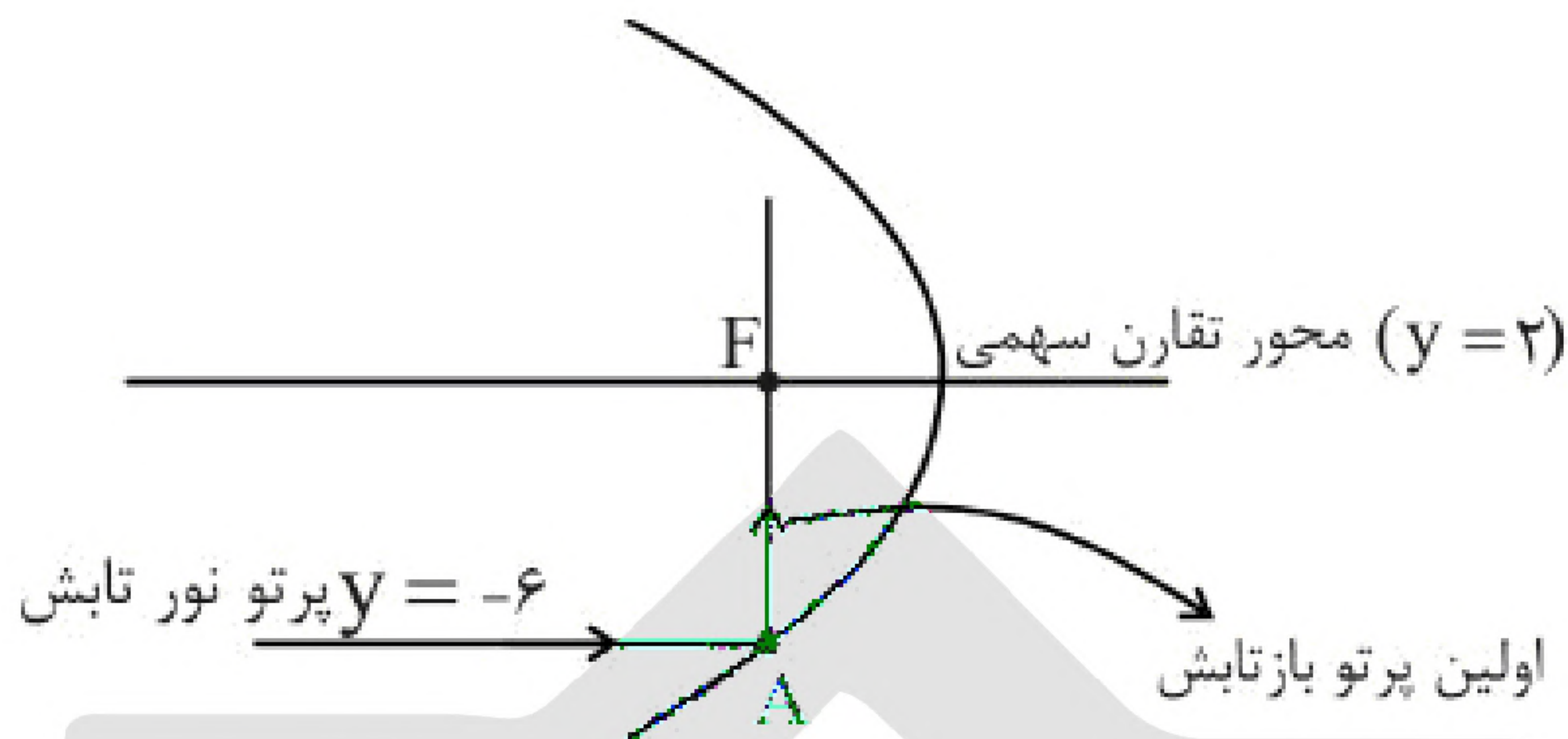
$$2, 1 \Rightarrow \begin{cases} NM + 6 = 6FA \\ \frac{NM}{NM + 6} = \frac{3}{FA} \end{cases} \Rightarrow \frac{NM}{6FA} = \frac{3}{FA} \begin{cases} NM = 18 \\ FA = 4, HF = 8 \end{cases}$$

$$\triangle HFN \text{ در فیتاغورث: } NF^2 = HF^2 + NH^2 \Rightarrow (18 + 6)^2 = 8^2 + NH^2 \Rightarrow NH = 16\sqrt{2}$$

$$HFN \text{ محیط مثلث} = NF + HF + NH = 24 + 8 + 16\sqrt{2} = 32 + 16\sqrt{2} = 16(2 + \sqrt{2})$$



۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
 پس این سهمی افقی رو به چپ است و رأس آن $S(1, 2)$ و $4a = 4$ پس $a = 1$ است. در ضمن کانون این سهمی $F(0, 2)$ می باشد.



چون شعاع نور تابیده موازی محور سهمی است، پس بازتابش نور از کانون سهمی می گذرد (ویژگی بازتابندگی سهمی)؛ بنابراین برای به دست آوردن مختصات A کافی است معادله $\begin{cases} y^2 - 4y = -4x \\ y = -6 \end{cases}$ را حل کنیم:

$$A(-15, -6)$$

$$F(0, 2)$$

$$AF \text{ خط : معادله } y - 2 = \frac{-6 - 2}{-15 - 0}(x - 0) \Rightarrow 8x - 15y + 30 = 0 \quad \begin{cases} a = 8 \\ b = -15 \\ c = 30 \end{cases}$$

$$a + b + c = 23$$

$$FF' = 2c = \sqrt{(5 - 5)^2 + (4 - (-4))^2} = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$\text{قطر کوچک} = 2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$$

$$\text{اندازه وتر کانونی} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{اندازه خروج از مرکز} = \frac{c}{a} = \frac{4}{2\sqrt{5}}$$

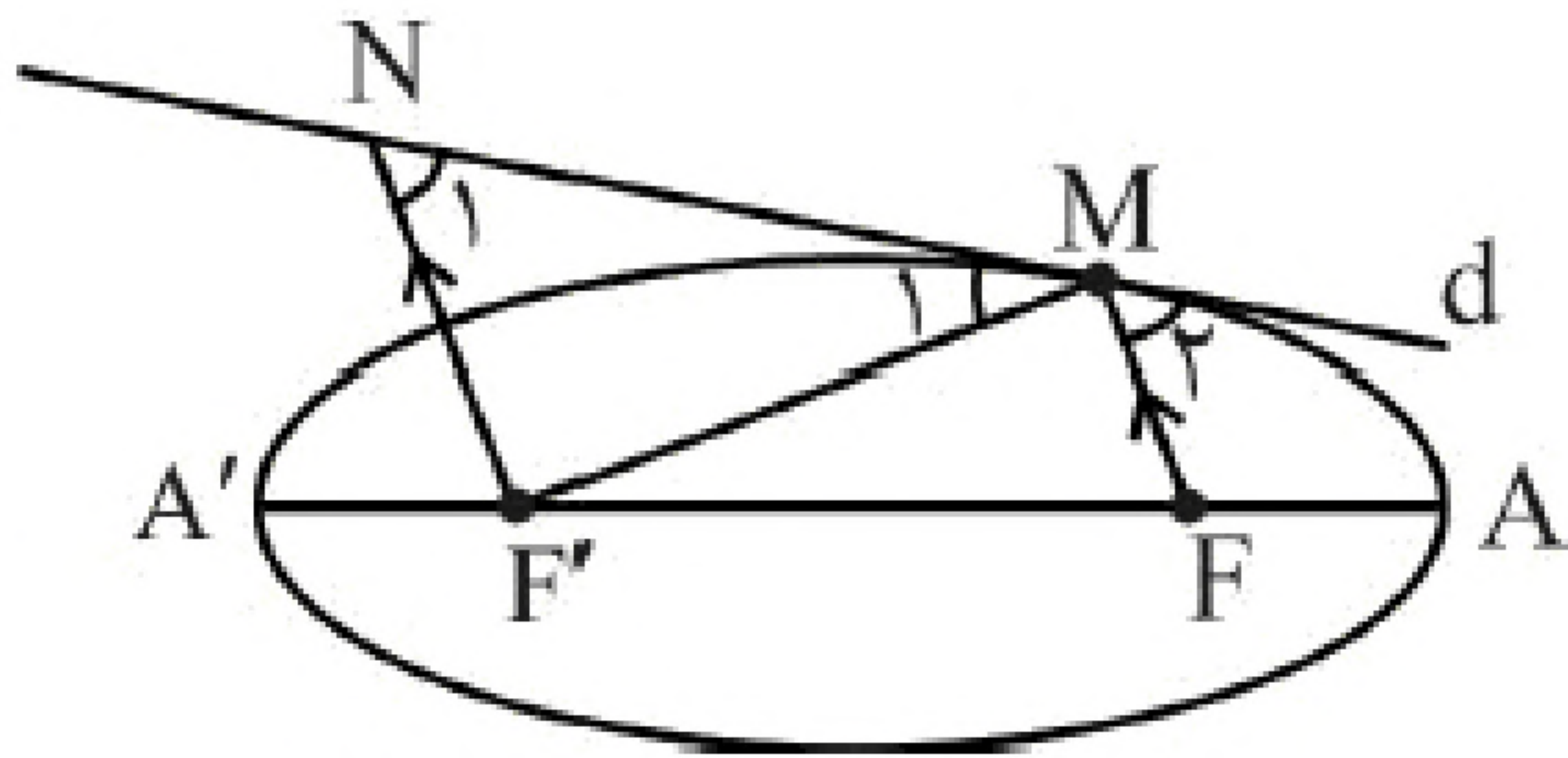
اندازه خروج از مرکز $\times 2 =$ اندازه وتر کانونی \Rightarrow

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر ویژگی بازتابندگی بیضی داریم:



(۱) مماس بر بیضی $d \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$

(۲) $NF' \parallel MF$ } $\Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{M}_2$
مورب d

$$2, 1 \Rightarrow \widehat{N}_1 = \widehat{M}_1 \Rightarrow \triangle MNF' \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow MF' = NF' \quad (3)$$

$$MF + MF' = 2a = \text{قطر بزرگ بیضی} = 12 \xrightarrow{(3)} MF + MF' = 12$$

مطابق تعریف بیضی

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{محیط ۵ ضلعی غیرمحدب} = AF + BF + BF' + B'A$$

$$4a + c = (a - c) + 2a + a + \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow 4a + c = a - c + \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 2c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{دو طرف به توان ۲}$$

$$4c^2 = a^2 + b^2 \xrightarrow{\text{در بیضی } a^2 = b^2 + c^2} 4c^2 = b^2 + c^2 + b^2 \Rightarrow 3c^2 = 2b^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{از طرفی در بیضی } a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{\div c^2} \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} + 1 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{2}{5}$$

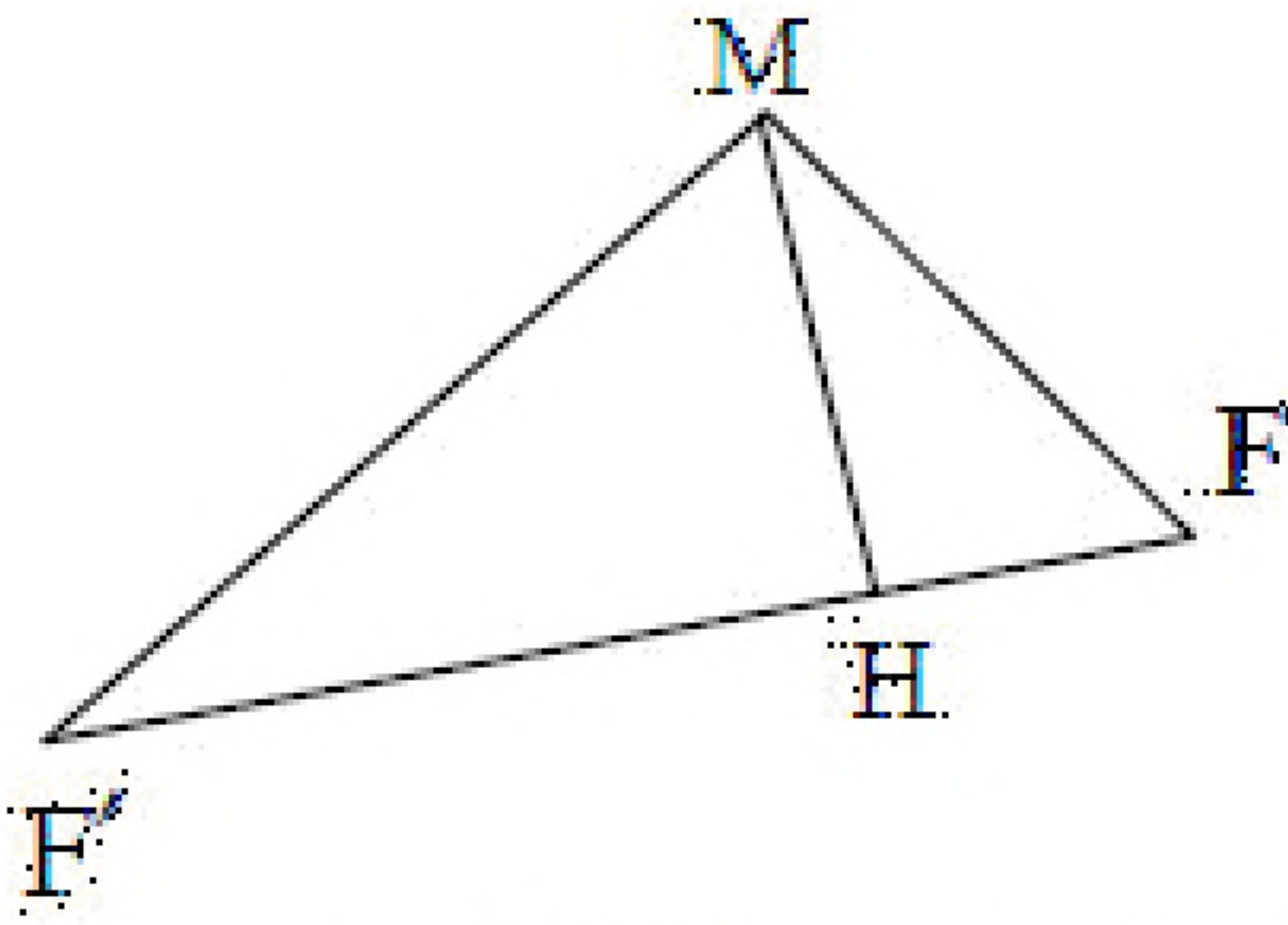
$$\Rightarrow \frac{c}{a} = e = \sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow e = \sqrt{0.4} \quad \text{خروج از مرکز}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فاصله کانون از خط هادی برابر با $2a$ است.

$$y^2 - 2y + 1 = 4x + 7 + 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4(x + 2) \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow 2a = 2$$



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.



$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow (MF + MF')^2 - 2MF \times MF' = FF'^2$$

$$(2a)^2 - 2MF \times MF' = (2c)^2 \Rightarrow MF \times MF' = 18$$

از طرف دیگر کمترین فاصله M تا قطر کانون بیضی برابر طول ارتفاع MH در مثلث قائم‌الزاویه MFF' است.

$$MH = \frac{MF \times MF'}{FF'} = \frac{9}{4}$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y^2 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{سهمی افقی است} \\ \text{دهانه رو به راست} \\ \text{کانون } F\left(\frac{5}{2}, 0\right) \\ \text{راس } S\left(\frac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

با توجه به شرایط مسئله، بازتاب نور از کانون سهمی خارج می‌شود، بنابراین ابتدا نقطه برخورد پرتو نور را با سطح داخلی سهمی آینه‌ای به دست می‌آوریم. معادله خط پرتو نور تابش به صورت $y = 2$ است، زیرا موازی محور تقارن سهمی ($y = 0$) از نقطه $M(5, 2)$ تابیده شده است:

$$\begin{cases} y = 2 \\ y^2 = 8x - 4 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = 2 \Rightarrow \text{نقطه برخورد } A(1, 2)$$

در نتیجه پرتو نور بازتاب شده از نقاط $A(1, 2)$ و $F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ می‌گذرد و معادله این خط به صورت زیر است:

$$y - 0 = \frac{2 - 0}{1 - \frac{5}{2}}\left(x - \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = \frac{-4}{3}x + \frac{10}{3}$$

در بین گزینه‌ها فقط نقطه $(4, -2)$ روی این خط قرار دارد.



۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم و سپس آن را به حالت استاندارد تبدیل می‌کنیم:

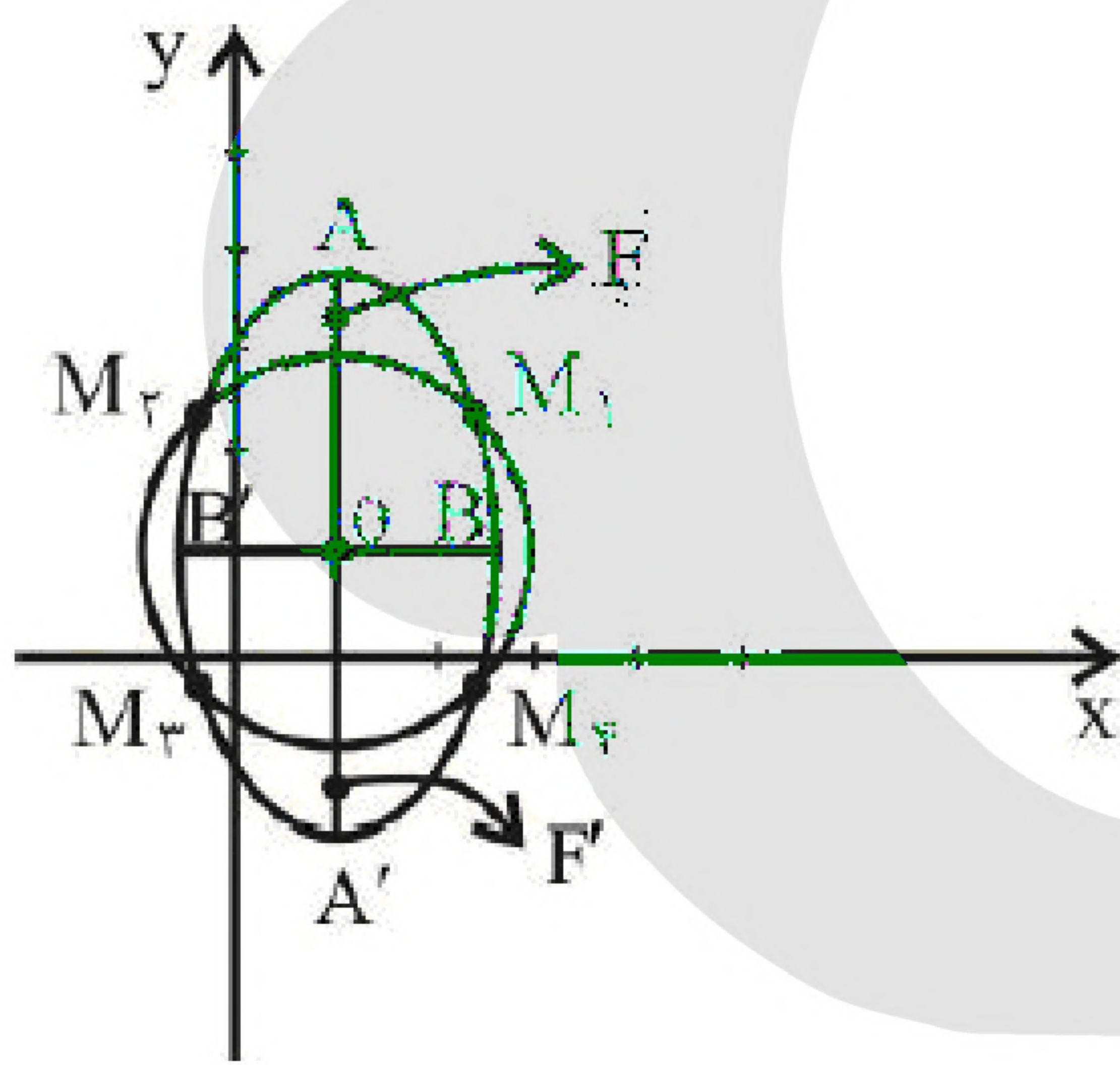
$$y^2 - \frac{b}{4}y - 8x + \frac{a}{4} = 0$$

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 - \frac{b^2}{16} = 8x - \frac{a}{4}$$

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 = 8x - \frac{a}{4} + \frac{b^2}{16}$$

$$\left(y - \frac{b}{4}\right)^2 = 8\left(x - \frac{a}{32} + \frac{b^2}{128}\right)$$

$$S\left(\frac{a}{32} - \frac{b^2}{128}, \frac{b}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}, -2\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{4} = -2 \Rightarrow b = -8 \\ \frac{a}{32} - \frac{64}{128} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 32 \end{array} \right\} \Rightarrow a - b = 40$$



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که مجموع فواصلشان از $F(1, 3)$ و $F'(1, -1)$ برابر ۵ باشد، یک بیضی به مرکز $O(1, 1)$ «وسط F و F' » و با مشخصات زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} 2a = 5 \Rightarrow a = 2.5 \\ 2c = FF' = 4 \Rightarrow c = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

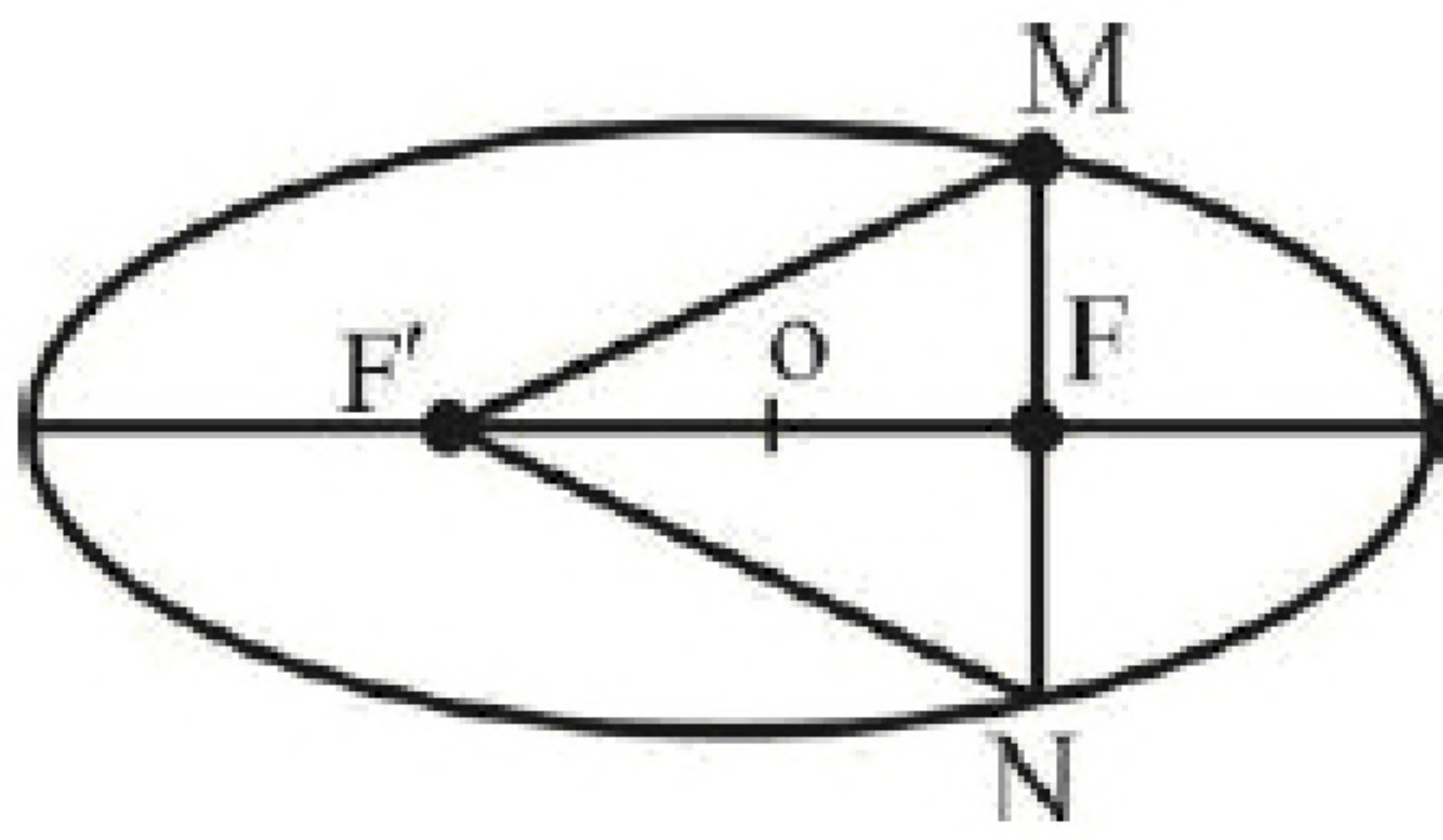
$$\text{معادله دایره پس از استانداردسازی: } (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow O(1, 1), R = \sqrt{\frac{7}{4}}$$

بیضی و دایره هم‌مرکز هستند و چون $b < R$ و $a < R$ ، پس ۴ نقطه مشترک دارند. (M_4, M_3, M_2, M_1)



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل:



(۱) $FF' = 2c$

(۲) $FF' = \frac{\sqrt{3}}{2} MN$ (چون $\triangle MNF'$ متساوی الاضلاع است)

$$2, 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} MN = 2c \quad \text{چون} \quad MN = \frac{2b^2}{a} \quad \rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2b^2}{a} = 2c$$

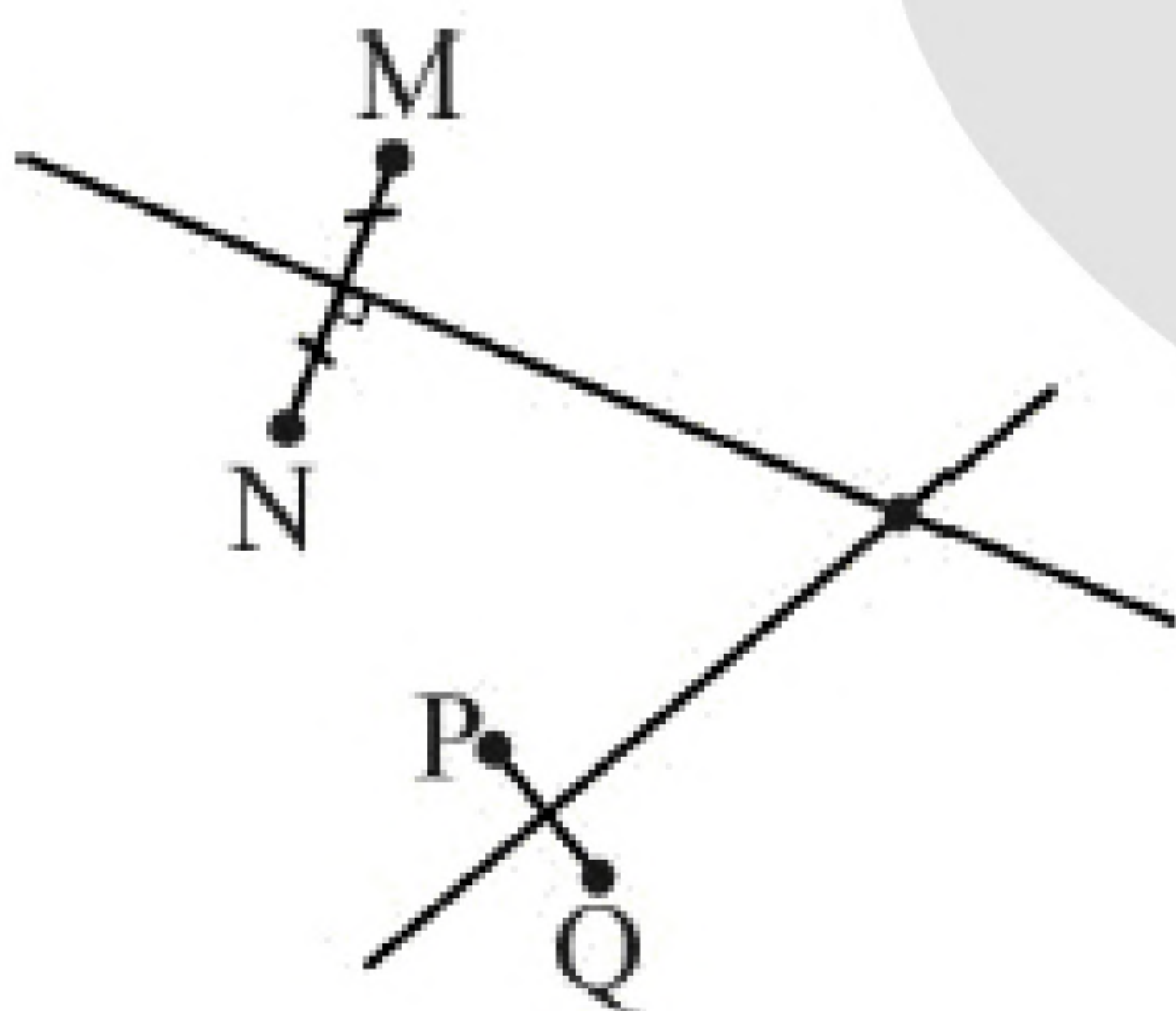
$$\xrightarrow{\text{دو طرف تقسیم بر } a} \sqrt{3} \left(1 - \left(\frac{c}{a} \right)^2 \right) = 2 \left(\frac{c}{a} \right) \quad \xrightarrow{\text{تعریف خروج از مرکز } e = \frac{c}{a}}$$

$$\sqrt{3}(1 - e^2) = 2e \Rightarrow \sqrt{3}e^2 + 2e - \sqrt{3} = 0$$

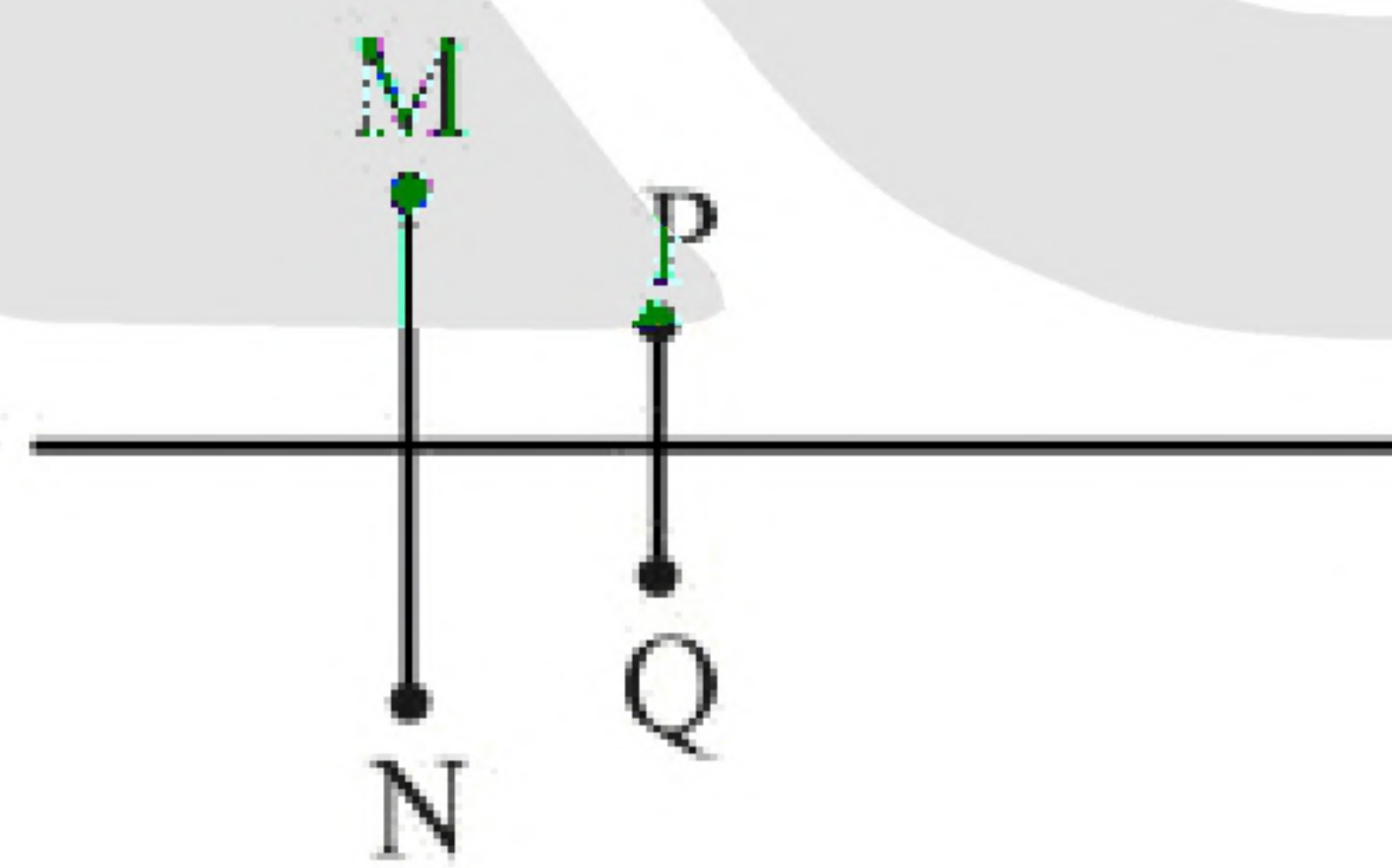
$$\Delta = 2^2 - 4(\sqrt{3})(-\sqrt{3}) = 16$$

$$e = \frac{-2 \pm 4}{2\sqrt{3}} \begin{cases} e = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ e = -\sqrt{3} \end{cases} \quad (\text{در بیضی } 0 < e < 1 \text{ غ ق ق})$$

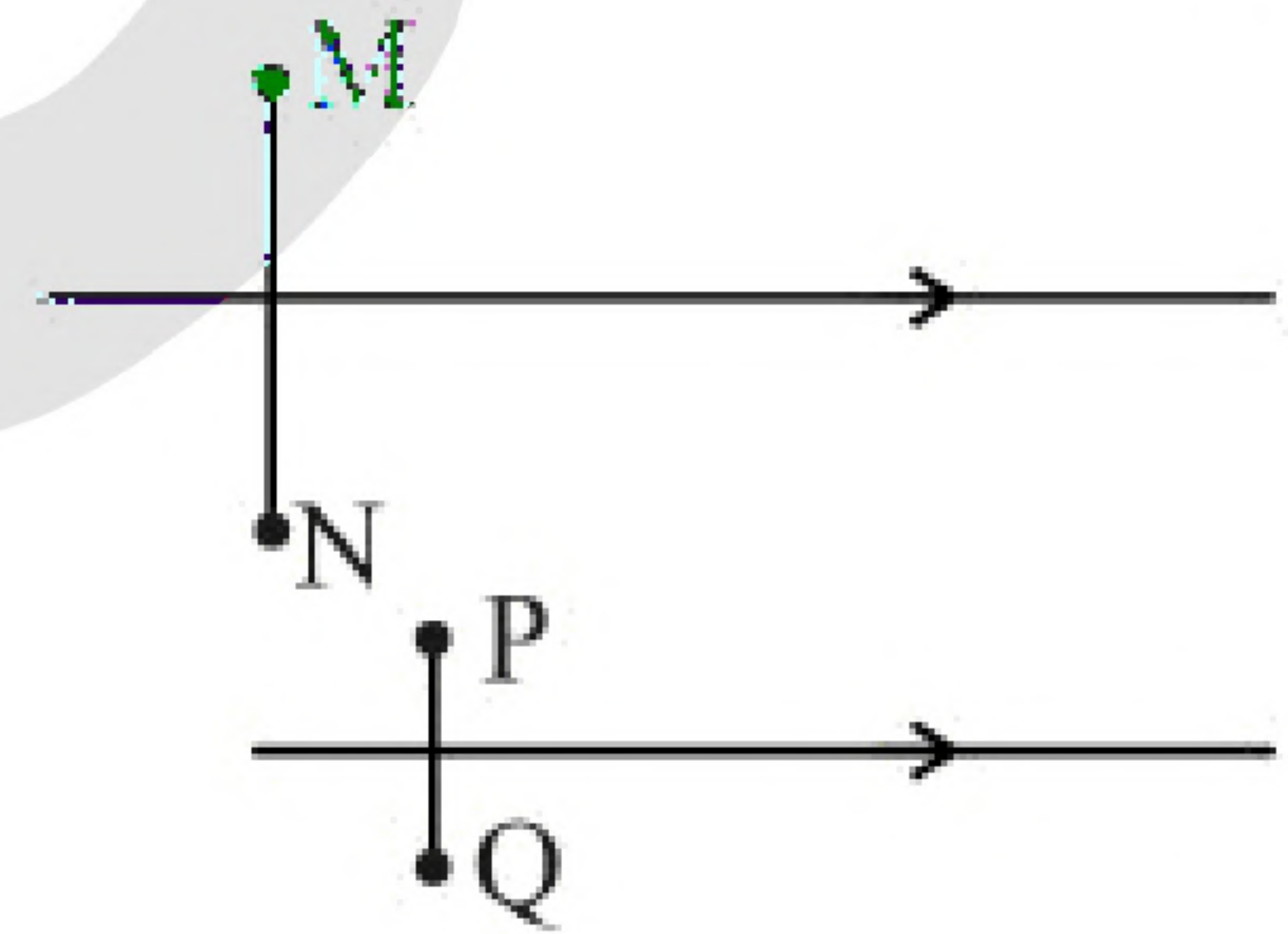
۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقطه d عمودمنصف پاره خط MN و مکان هندسی نقطه L عمودمنصف پاره خط PQ است. این دو خط می توانند همدیگر را در یک نقطه (متقاطع) هیچ نقطه (موازی) یا بی شمار نقطه (منطبق) قطع کنند، اما امکان ندارد دو خط همدیگر را فقط در دو نقطه قطع کنند.



(یک نقطه)



(بی شمار نقطه)



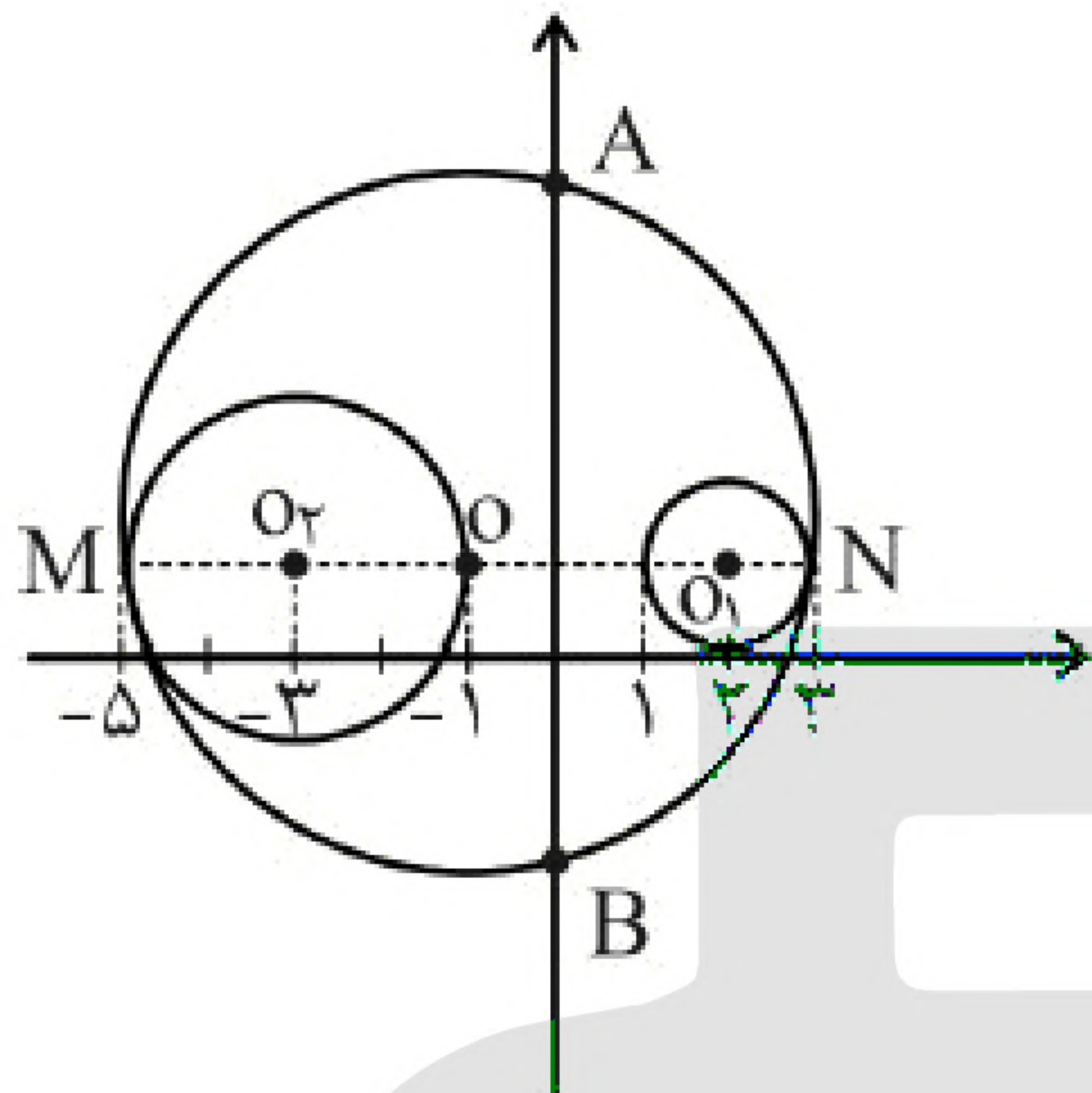
(هیچ نقطه)



۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$C_1: \text{مرکز دایره } O_1(2, 1), R_1 = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 - 4(4)} = 1$$

$$C_2: \text{مرکز دایره } O_2(-3, 1), R_2 = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-2)^2 - 4(6)} = 2$$



$$MN = 3 - (-5) = 8 = 2R \Rightarrow R = 4$$

مرکز دایره موردنظر $O(-1, 1)$

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 16$$

$$x = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 15 \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{15}$$

$$\Rightarrow AB = (1 + \sqrt{15}) - (1 - \sqrt{15}) = 2\sqrt{15}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خط و دایره همدیگر را قطع می‌کنند. اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط، کوچکتر از شعاع دایره باشد:

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$$

مرکز دایره $O(1, -1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4C} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 2^2 - 4(-3)} \Rightarrow R = \sqrt{5} \end{array} \right. \text{شعاع دایره}$$

$$x - 2y + m = 0 \text{ فاصله مرکز دایره تا خط } d = \frac{|1 - 2(-1) + m|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|m+3|}{\sqrt{5}}$$

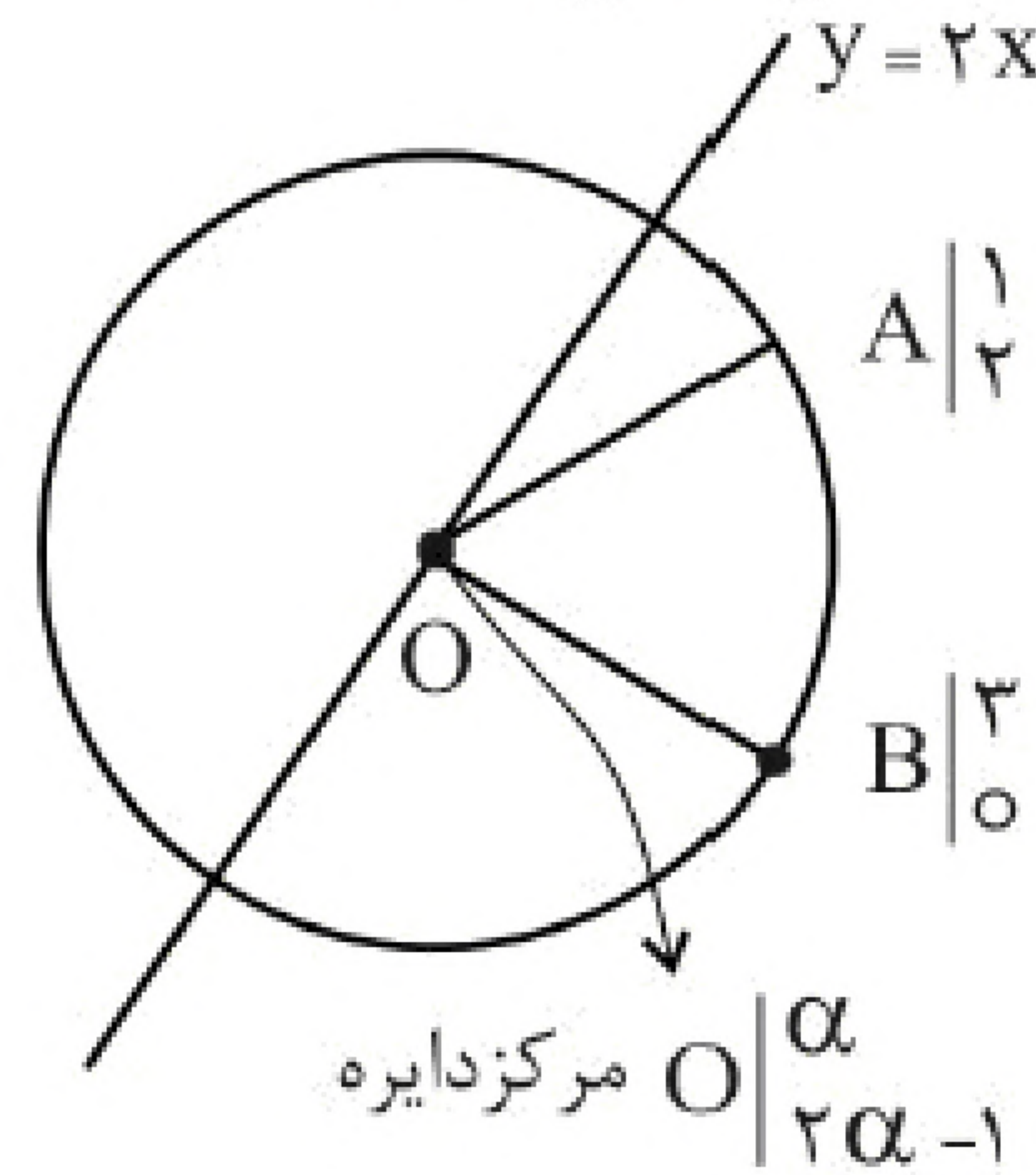
$$d < R \Rightarrow \frac{|m+3|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} \Rightarrow |m+3| < 5$$

$$-5 < m+3 < 5$$

این بازه شامل ۹ عدد صحیح است. $-8 < m < 2 \Rightarrow$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$OA = OB = R$$

$$\sqrt{(\alpha - 1)^2 + (2\alpha - 1 - 2)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 1 - 0)^2} = R$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1$$

$$\alpha = 0 \Rightarrow O \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \end{vmatrix}, R = \sqrt{10}$$

$$\text{معادله دایره } (x - 0)^2 + (y + 1)^2 = 10$$

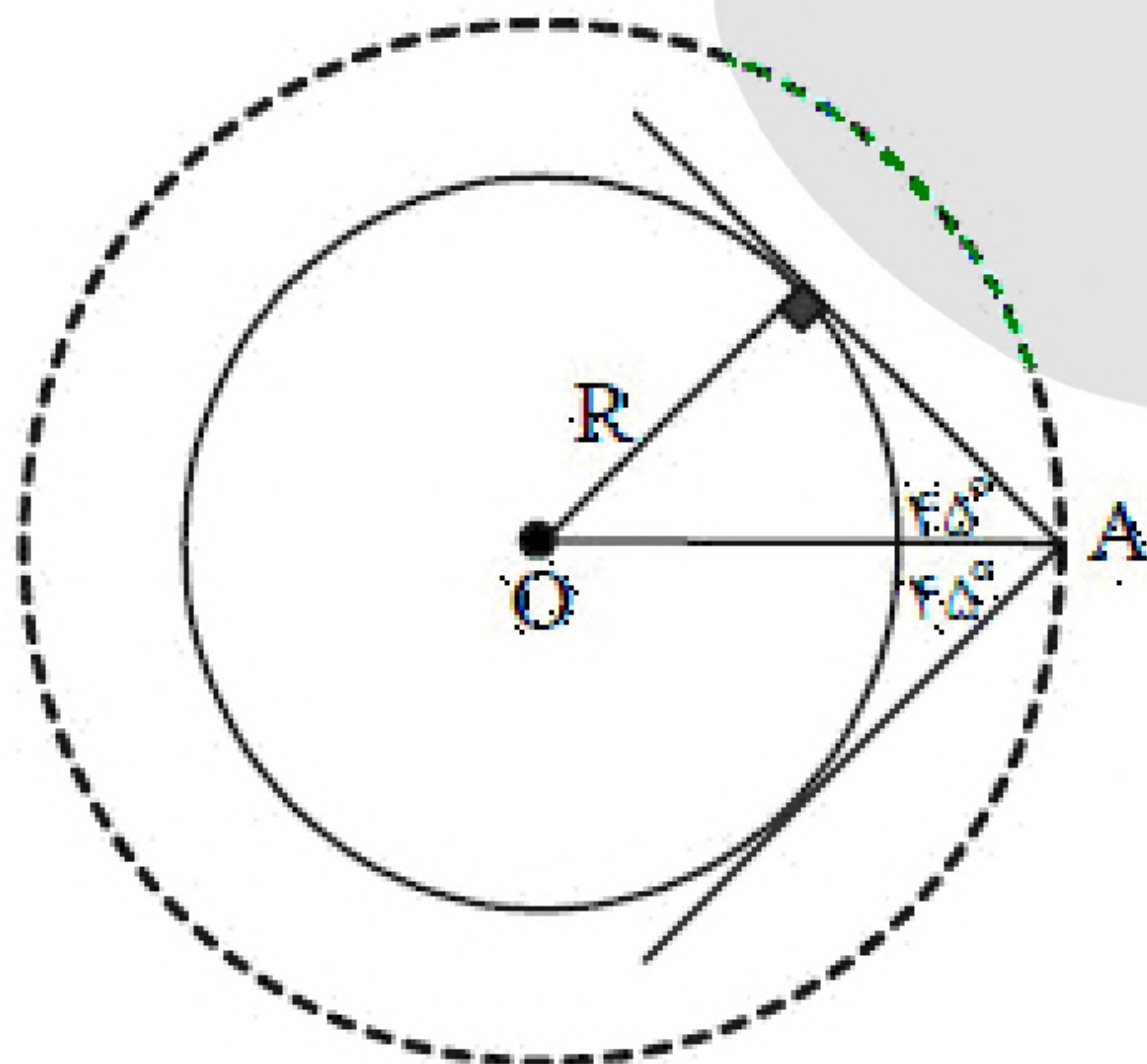
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow 8x + 4y - 17 = 0 \text{ معادله وتر مشترک دو دایره}$$

$$\text{جاگذاری در معادله دایره} \quad x = \frac{17 - 4y}{8}$$

$$\left(\frac{17 - 4y}{8}\right)^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \Rightarrow 80y^2 - 8y - 287 = 0$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه ها} = y_m + y_n = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{80} = 0,1$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$AB = 2R = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-1 - 7)^2} = 10 \Rightarrow R = 5$$

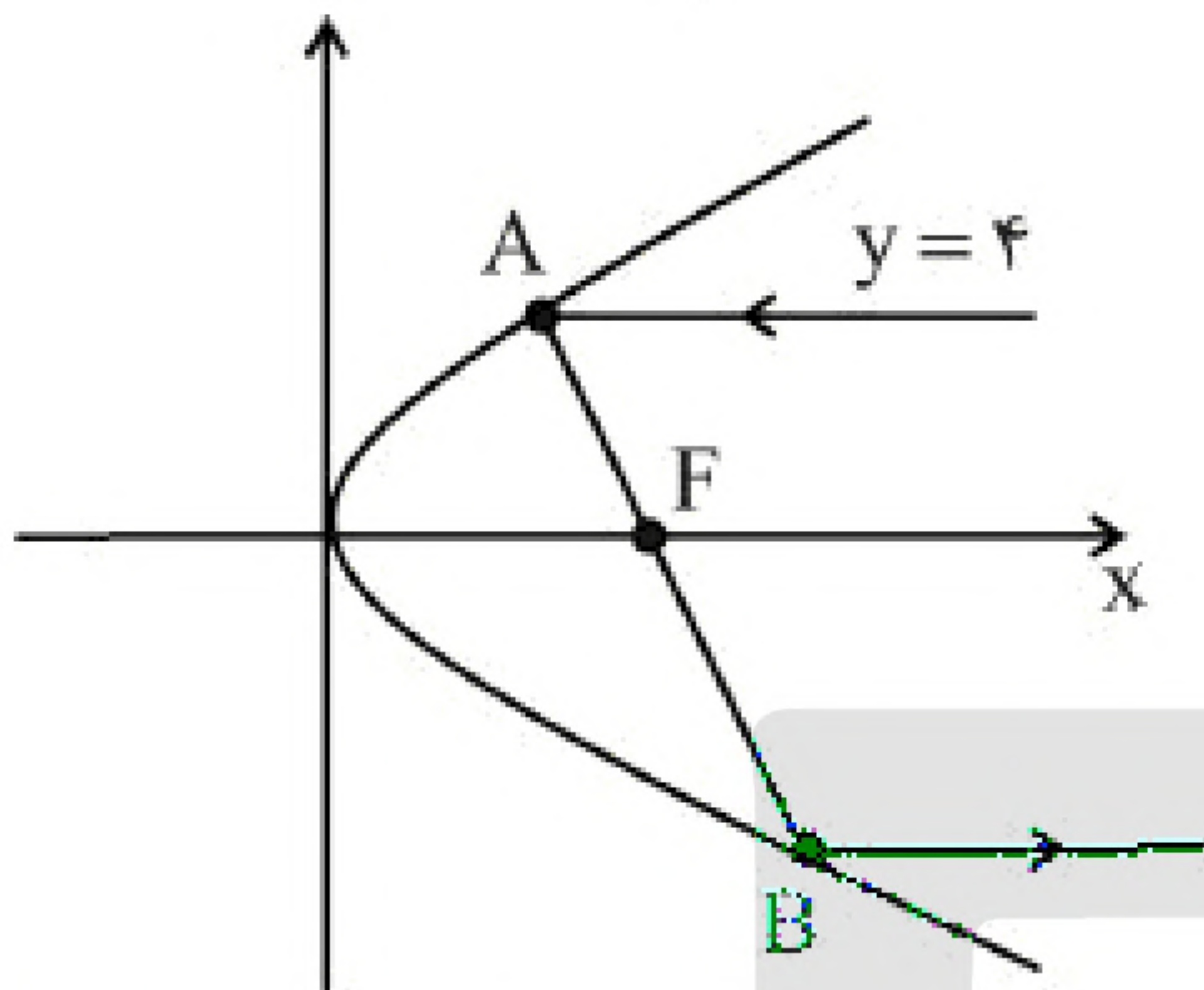
$$OA = R\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت مکان هندسی (دایره بیرونی)} = \pi (5\sqrt{2})^2 = 50\pi$$



۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. وقتی پرتوی نوری موازی محور تقارن سهمی به آن سهمی بتابد، پرتوی بازتابش از کانون سهمی گذشته و پس از برخورد با بدنه دیگر سهمی، موازی با پرتوی اولیه و 180° درجه چرخش از سهمی خارج می‌شود.

$$a = 4, \text{ سهمی } S \text{ راس سهمی و } F \text{ کانون سهمی و } y^2 = 16x \xrightarrow{y=4} x=1 : A(1, 4)$$



$$m_{AF} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{1 - 4} = -\frac{4}{3}$$

$$y - 0 = -\frac{4}{3}(x - 4)$$

$$3y + 4x = 16$$

معادله خط AF (یا AB):

با تلاقی دادن معادله سهمی با معادله خط AB:

$$\begin{cases} y^2 = 16x \\ 3y + 4x = 16 \end{cases} \xrightarrow{\times 4} 12y + 16x = 64 \Rightarrow y^2 + 12y - 64 = 0 \Rightarrow (y + 16)(y - 4) = 0$$

معادله خط $y = -16$ $y = 4$ معادله خط بازتابش نهایی از نقطه B
تابش اولیه

چون دو خط بازتابش نهایی و تابش اولیه افقی و با هم موازیند:

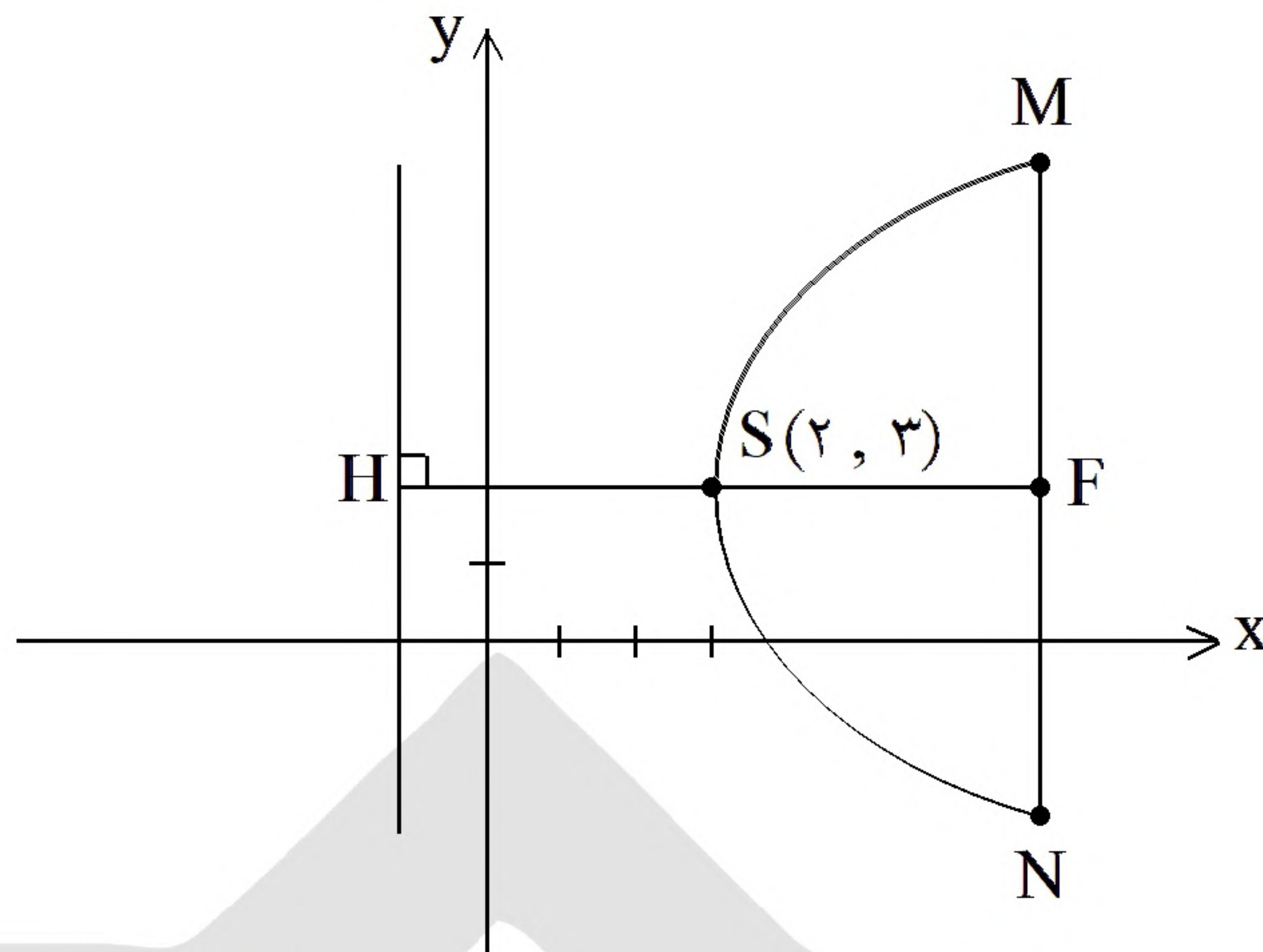
$$\text{فاصله دو خط} = |4 - (-16)| = 20$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دایره در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، پس مرکز آن $O(\alpha, \alpha)$ و شعاع آن هم α است. از سوی دیگر بر خط $3x + 4y - 12 = 0$ مماس است. پس:

$$\alpha = \frac{|3\alpha + 4\alpha - 12|}{\sqrt{9 + 16}} \Rightarrow 5\alpha = |7\alpha - 12| \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 6 \\ \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_1 = 6 \\ R_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow R_1 \cdot R_2 = 6 \times 1 = 6$$



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



با توجه به جایگاه رأس و خط هادی، این سهمی افقی است و $a = FH = 8$.
در ضمن اگر خطی عمود بر محور سهمی در کانون آن سهمی را در M و N قطع کند، آنگاه $MN = 4a$ پس $MN = 32$. بنابراین:

$$S_{\triangle SMN} = \frac{MN \times SF}{2} = \frac{32 \times 8}{2} = 128$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. محیط مثلث MFF' برابر $2a + 2c$ و مجموع فواصل F از دو نقطه انتهایی قطر کوچک $2a$ است، بنابراین:

$$\begin{cases} 2a + 2c = 32 \\ 2a = 20 \end{cases} \Rightarrow a = 10, c = 6 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = 0.6$$
 خروج از مرکز بیضی

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b = 16 = \text{اندازه قطر کوچک بیضی}$$

$$\text{اختلاف مورد نظر} = 16 - 0.6 = 15.4$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

فاصله مرکز دایره محیطی مثلث $O(\alpha, \beta)$ تا سه رأس آن یکسان و برابر شعاع دایره است:

$$OA = OB \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (\beta - 0)^2} \Rightarrow \alpha - \beta = 1 \quad (1)$$

$$OB = OC \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (\beta - 0)^2} = \sqrt{(\alpha + 2)^2 + (\beta - 2)^2} \Rightarrow -2\alpha + \beta = 1 \quad (2)$$

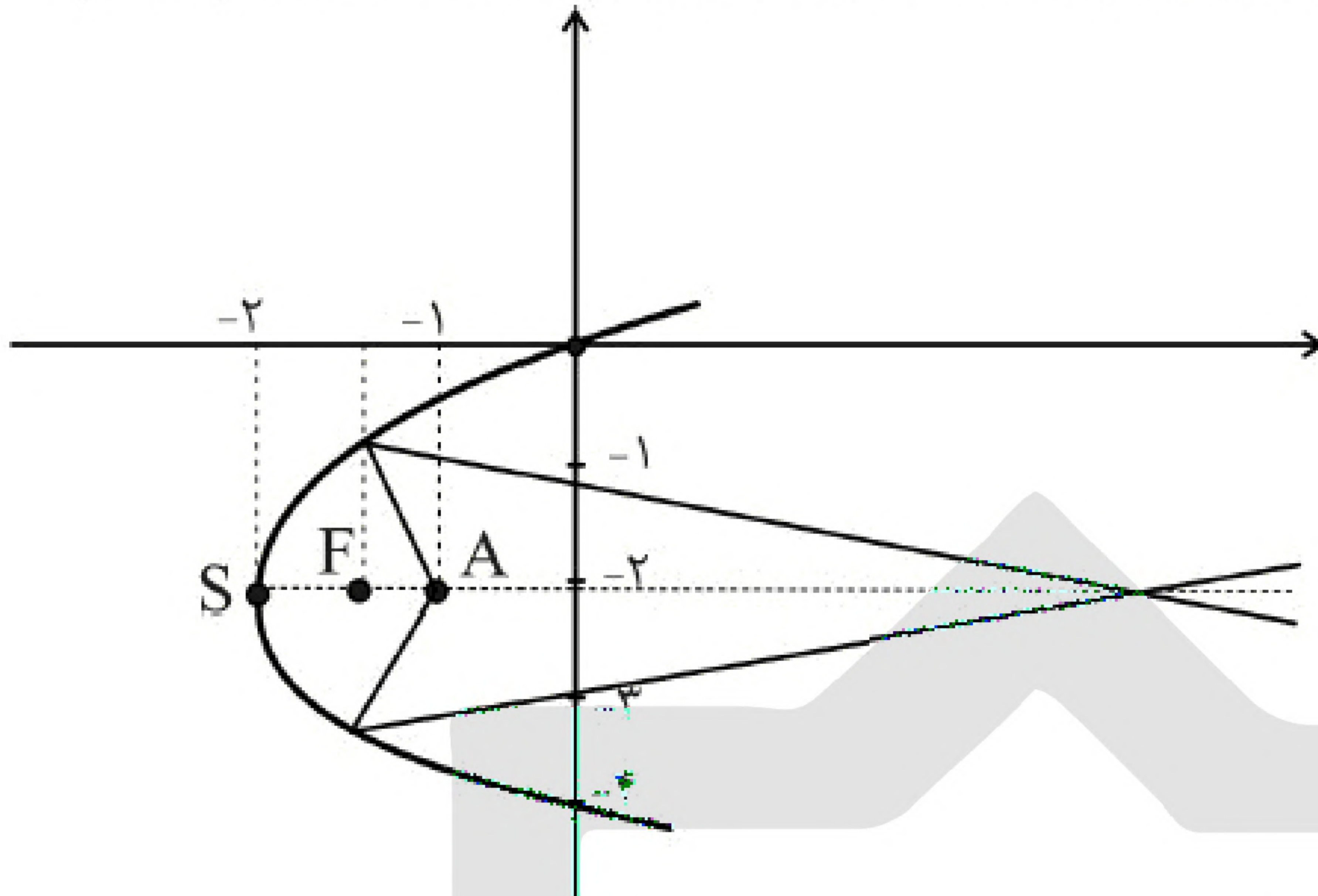
$$\alpha = -2, \beta = -3 \text{ و (1) و (2)}$$

$$OB = R = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (-3 - 0)^2} = 5$$

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \\ c = 25 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 20$$



۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا کانون و رأس سهمی را به دست آورده و سپس وضعیت نقطه A را رسم می‌کنیم:



$$y^2 + 4y = 2x$$

$$(y + 2)^2 = 2(x + 2)$$

$$\rightarrow S(-2, -2), F(-1/5, -2)$$

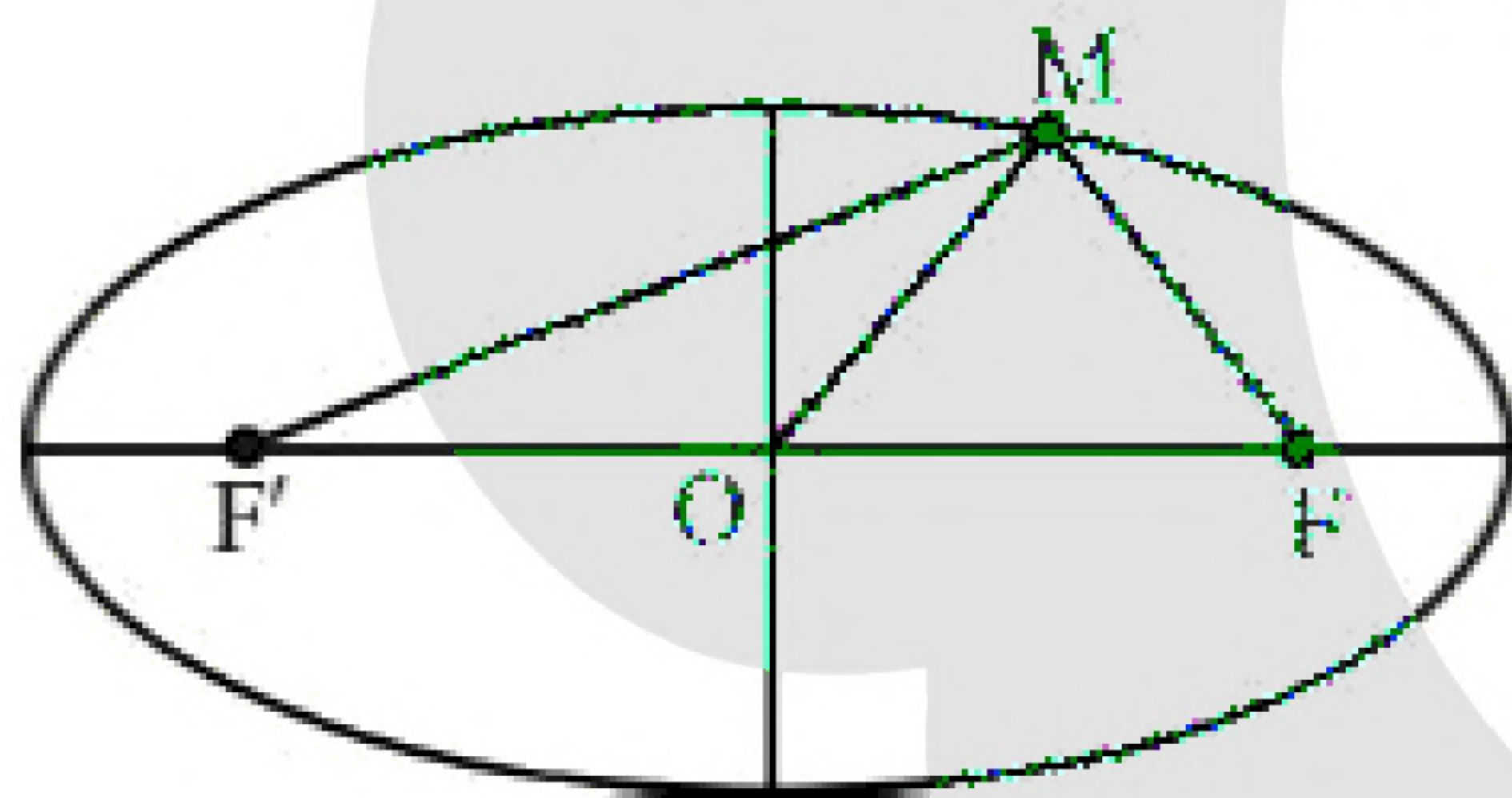
سهمی افقی و $4a = 2$

$$a = \frac{1}{2}$$

دیده می‌شود نقطه‌ی A روی محور سهمی و جلوی کانون سهمی قرار دارد پس بازتاب نورهای تابیده شده همگرا روی محور سهمی هستند.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مثلث MMF' قائم‌الزاویه است زیرا میانه وارد بر وتر نصف وتر است:



$$\left. \begin{aligned} 2a &= 20 \Rightarrow a = 10 \\ 2b &= 12 \Rightarrow b = 6 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c = 8$$

مثلث وتر $FF' = 2c = 16$

مطابق تعریف بیضی $MF + MF' = 2a = 20$

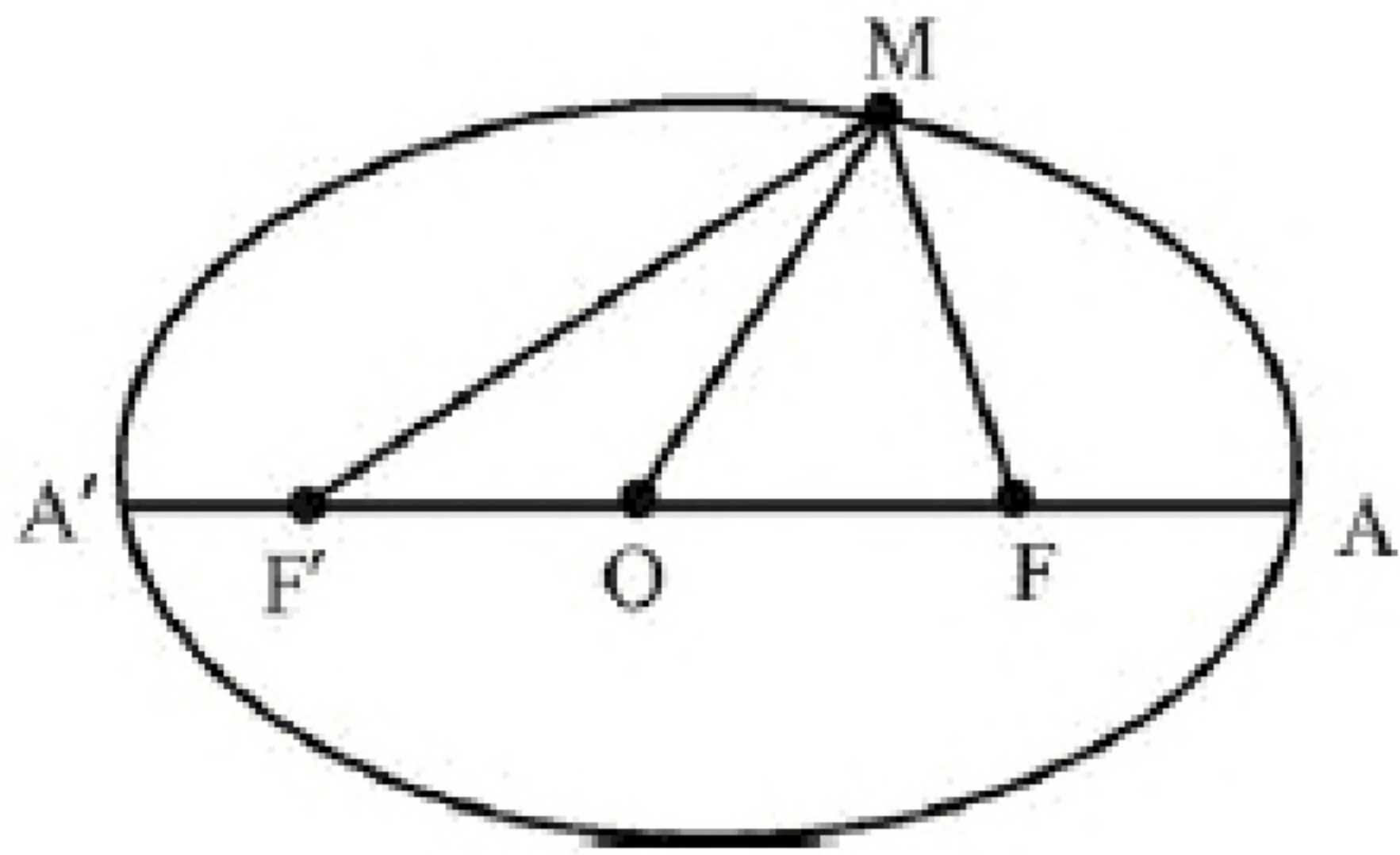
$OM = OF = OF' = c \Rightarrow \triangle MMF' \Rightarrow MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 256$

دو طرف به توان ۲ $MF + MF' = 20 \xrightarrow{\quad} \underbrace{MF^2 + MF'^2}_{256} + 2MF \times MF' = 400$

$\Rightarrow 256 + 2MF \times MF' = 400 \Rightarrow MF \times MF' = 72$



۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض‌های سؤال $2a = 5$, $2b = 3$



$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{5}{2} \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow c^2 = \frac{25}{4} - \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow c = 2 \Rightarrow FF' = 2c = 4$$

چون $OM = \frac{1}{2}FF'$ (میانه OM نصف ضلع FF' (وتر مثلث) است)

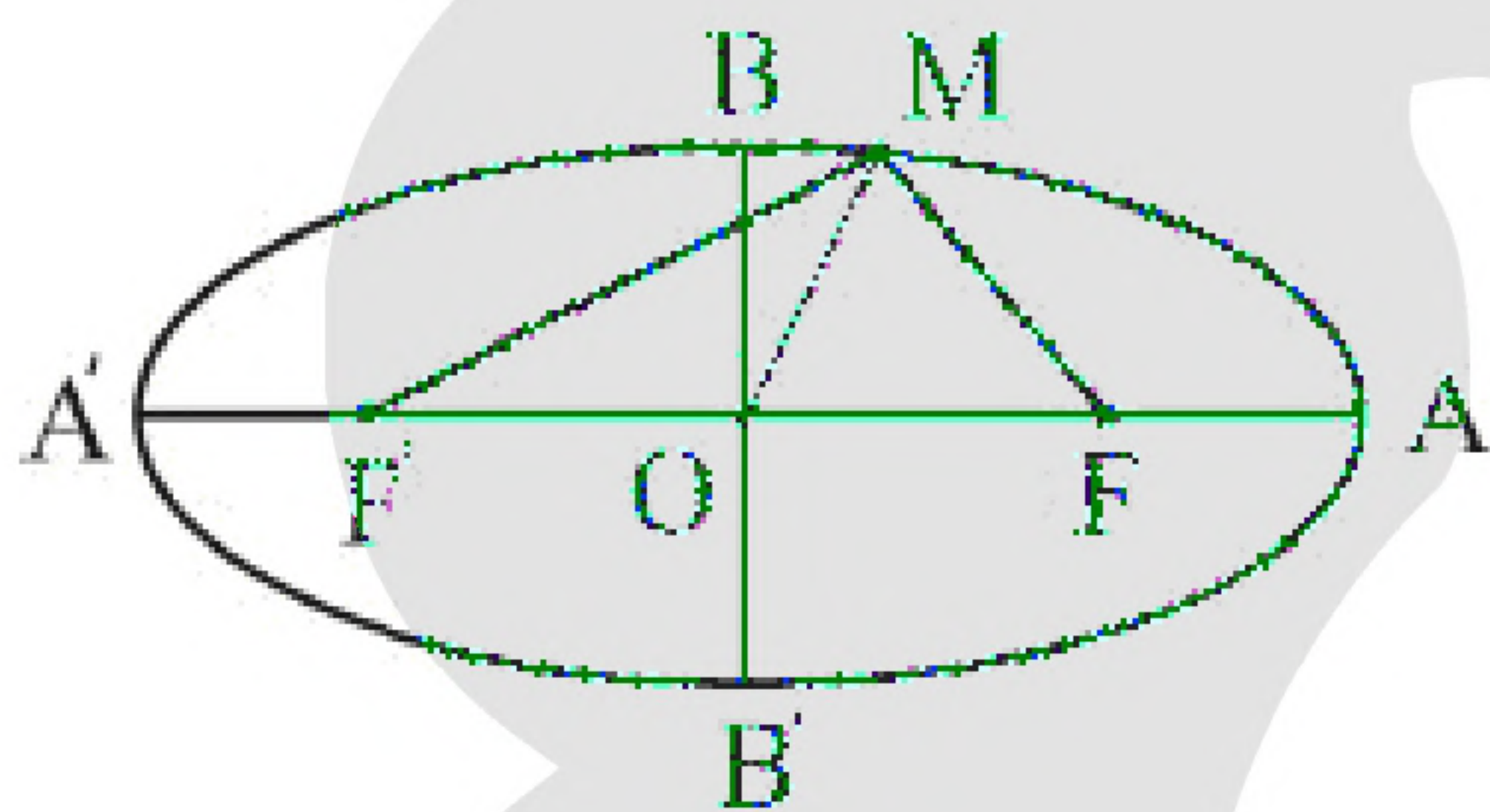
بنابراین مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

با توجه به تعریف مکان هندسی بیضی $MF + MF' = 2a = 5$

رابطه فیثاغورث $\triangle MFF'$: $MF^2 + MF'^2 = FF'^2 = 4^2$

$$(MF + MF')^2 - 2MF \times MF' = 16 \Rightarrow 5^2 - 2MF \times MF' = 16 \Rightarrow MF \times MF' = 4/5$$

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$A'A = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$B'B = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow OF = OF' = OM = 4$$

میانه وارد بر ضلع FF' نصف آن است \leftarrow مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

$$MF^2 + MF'^2 = FF'^2 \Rightarrow \underbrace{(MF + MF')^2 - 2MF \cdot MF'}_{2a = 10} = FF'^2$$

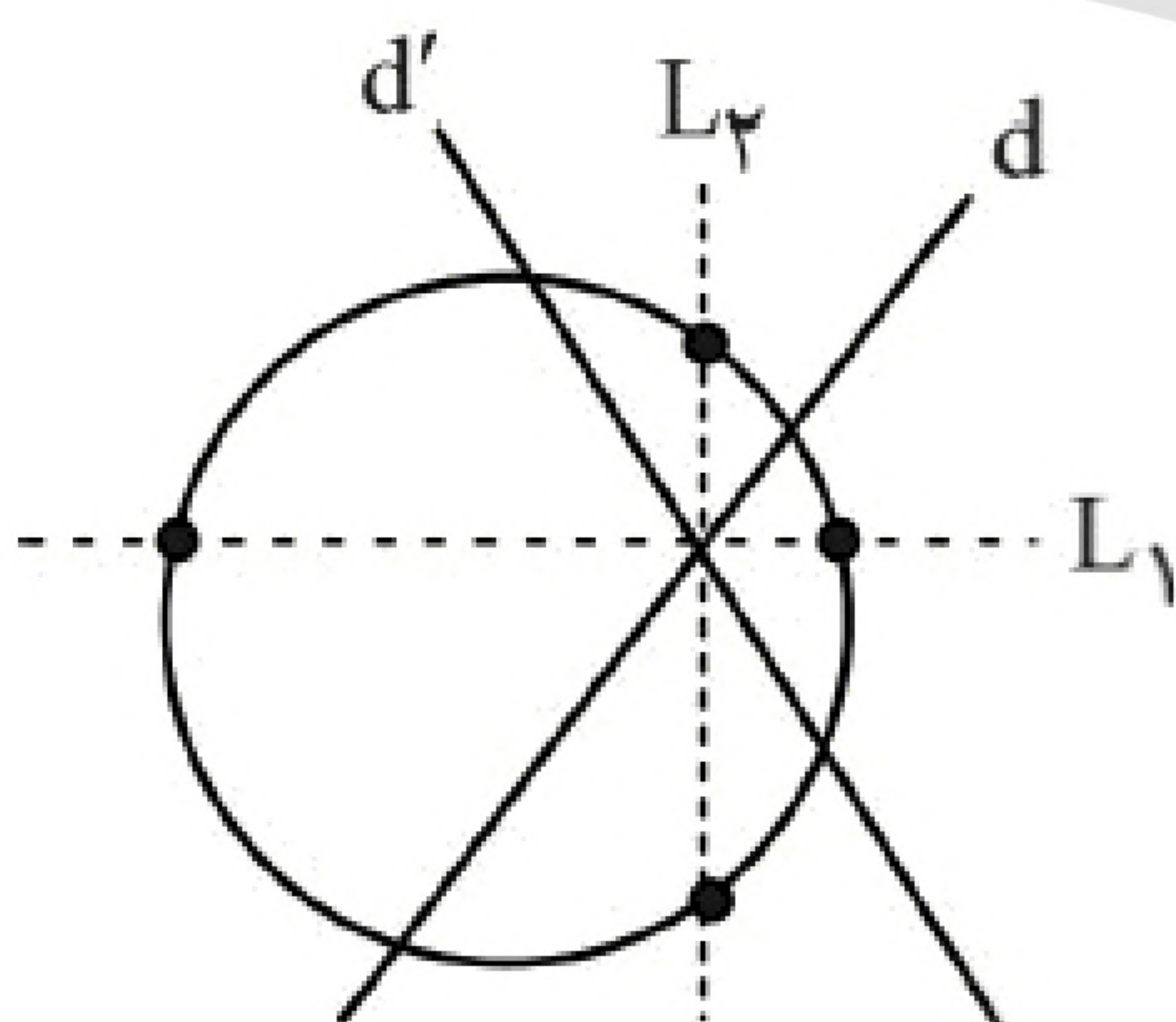
$$\downarrow$$

$$FF' = 2c = 8$$

$$10^2 - 2MF \times MF' = 64 \Rightarrow MF \times MF' = 18$$

$$S_{\triangle MFF'} = \frac{1}{2} MF \times MF' = \frac{1}{2} \times 18 = 9$$

حاصل ضرب اضلاع قائمه



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین دو خط است. مطابق شکل حداکثر چهار نقطه با شرایط موردنظر سؤال وجود دارد. (نقاط برخورد نیمسازهای L_1 و L_2 با محیط دایره)



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو دایره بر محورهای مختصات به طور همزمان مماس هستند، بنابراین $R = \alpha = \beta$ و در نتیجه مرکز دایره $O(R, R)$ است.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

$$(x - R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow{A(2,1)} (2 - R)^2 + (1 - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \quad \begin{cases} R' = 1 \Rightarrow O' \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases} \\ R = 5 \Rightarrow O \begin{cases} 5 \\ 5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow OO' = \sqrt{(5-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{32}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} = \sqrt{32 - (5-1)^2} = 4$$

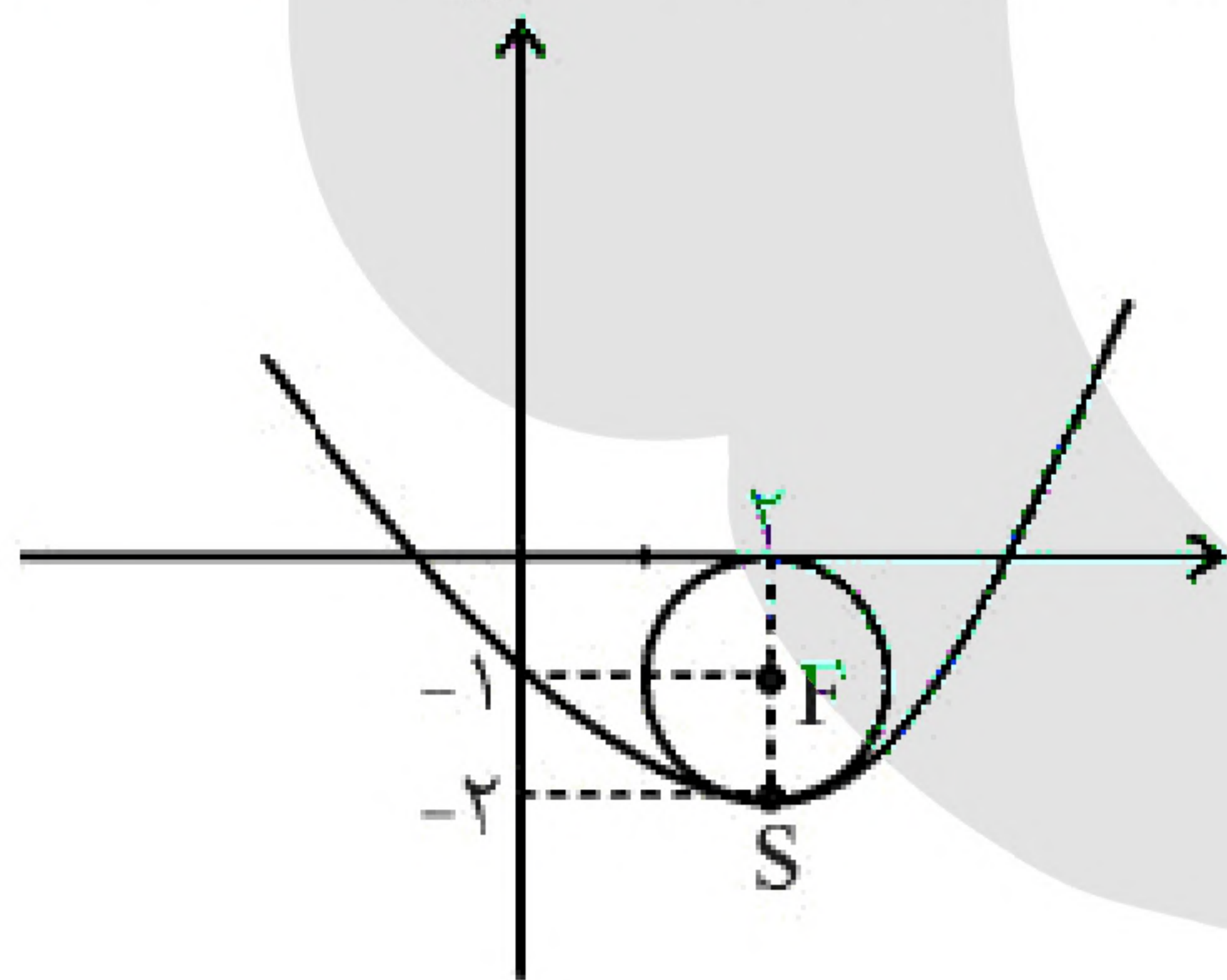
۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مرکز دایره محل برخورد قطرهایست و فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان شعاع دایره

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow O(2, -1)$$

است بنابراین:

$$R = \frac{|4(2) - 3(-1) - 6|}{\sqrt{16 + 9}} = 1 \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

توجه: با در نظر گرفتن موقعیت دایره، سهمی حتماً رو به بالا باید باشد تا محور Xها را در دو نقطه قطع کند ($a > 0$).



$$O = F \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}, S \begin{vmatrix} 2 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow FS = 1 = a$$

$$(x - 2)^2 = 4(1)(y + 2)$$

$$(x - 2)^2 = 4y + 8$$

$$\text{محل برخورد با محور Xها} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 8 \quad \begin{cases} x_1 = 2 - 2\sqrt{2} \\ x_2 = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \Delta x = 4\sqrt{2}$$



۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x - 1 = 3 \sin \theta \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x - 1)^2 = 9 \sin^2 \theta \\ x + 5 = 3 \cos \theta \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (y + 5)^2 = 9 \cos^2 \theta \end{cases}$$

جمع می کنیم $\rightarrow (x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 9(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 9$

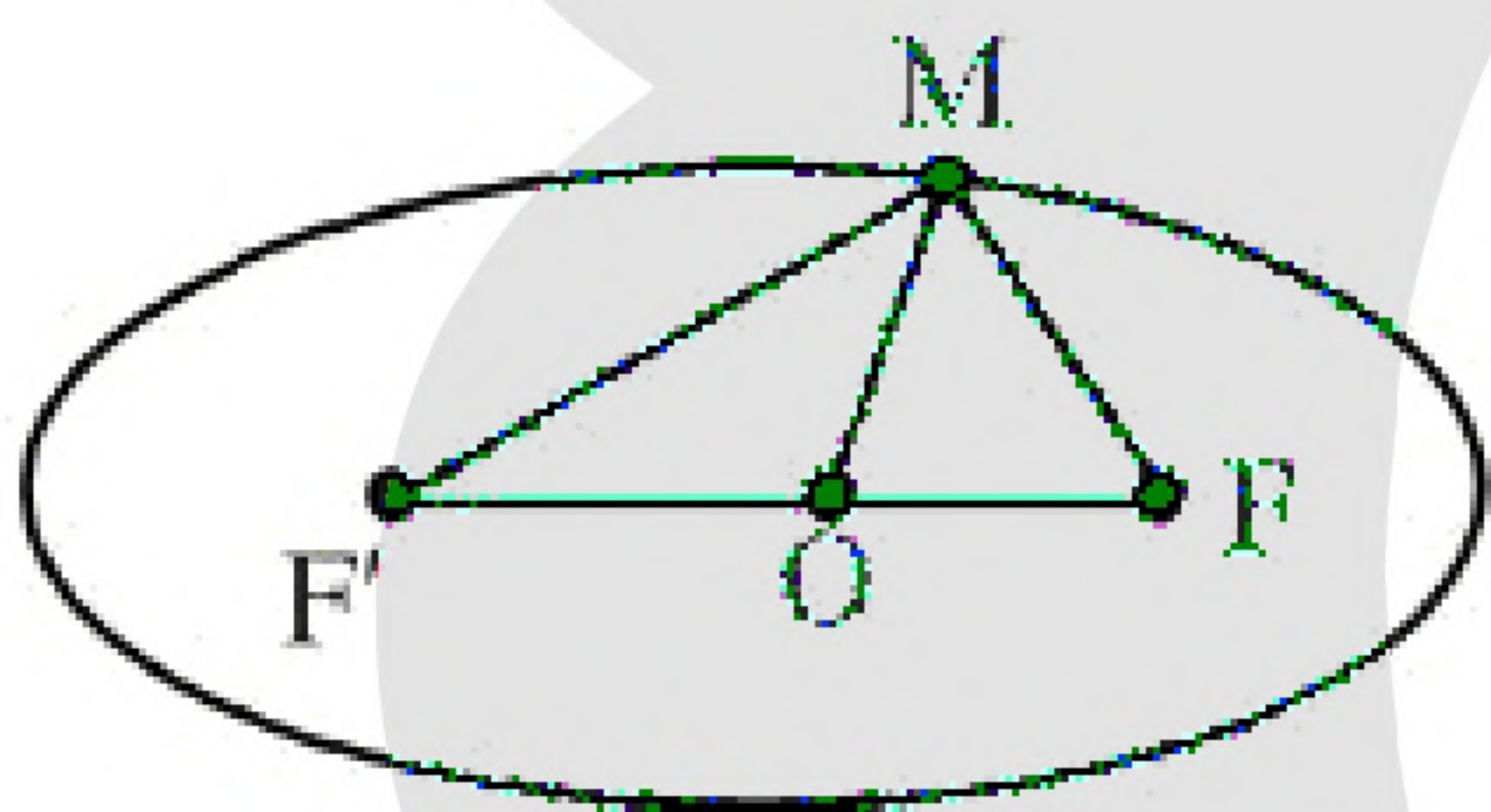
معادله استاندارد دایره: $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 9$

$$x^2 + y^2 - 2x + 10y + 17 = 0$$

$$a = -2 \quad b = 10 \quad c = 17$$

$$a + b + c = -2 + 10 + 17 = 25$$

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{aligned} 2a = 10 &\Rightarrow a = 5 & a^2 = b^2 + c^2 \\ 2b = 6 &\Rightarrow b = 3 & \xrightarrow{\hspace{2cm}} c = 4 \Rightarrow FF' = 8 \end{aligned}$$

میانۀ وارد بر ضلع FF' در $\triangle MFF'$ ($MO = 4$) مطابق فرض سؤال) نصف آن است، پس مثلث قائم‌الزاویه است ($\widehat{M} = 90^\circ$):

$$\begin{cases} FF'^2 = MF^2 + MF'^2 \Rightarrow 8^2 = MF^2 + (10 - MF)^2 \\ \text{تعریف بیضی: } MF + MF' = 2a = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 64 = MF^2 + 100 + MF^2 - 20MF \Rightarrow 2MF^2 - 20MF + 36 = 0 \Rightarrow MF^2 - 10MF + 18 = 0$$

ریشه‌های این معادله طول‌های MF و MF' هستند، پس $18 = \text{ضرب ریشه‌ها} = MF \times MF'$.



$$FF' = 2c = |2 - (-3)| = 5 \Rightarrow c = \frac{5}{2} \quad (1)$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مطابق تعریف مکان هندسی بیضی $MF + MF' = 2a$

$$\sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} + \sqrt{(1-3)^2 + (-3-1)^2} = 2a \Rightarrow \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 2a \Rightarrow a = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad (2)$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

(۱), (۲) \Rightarrow خروج از مرکز بیضی

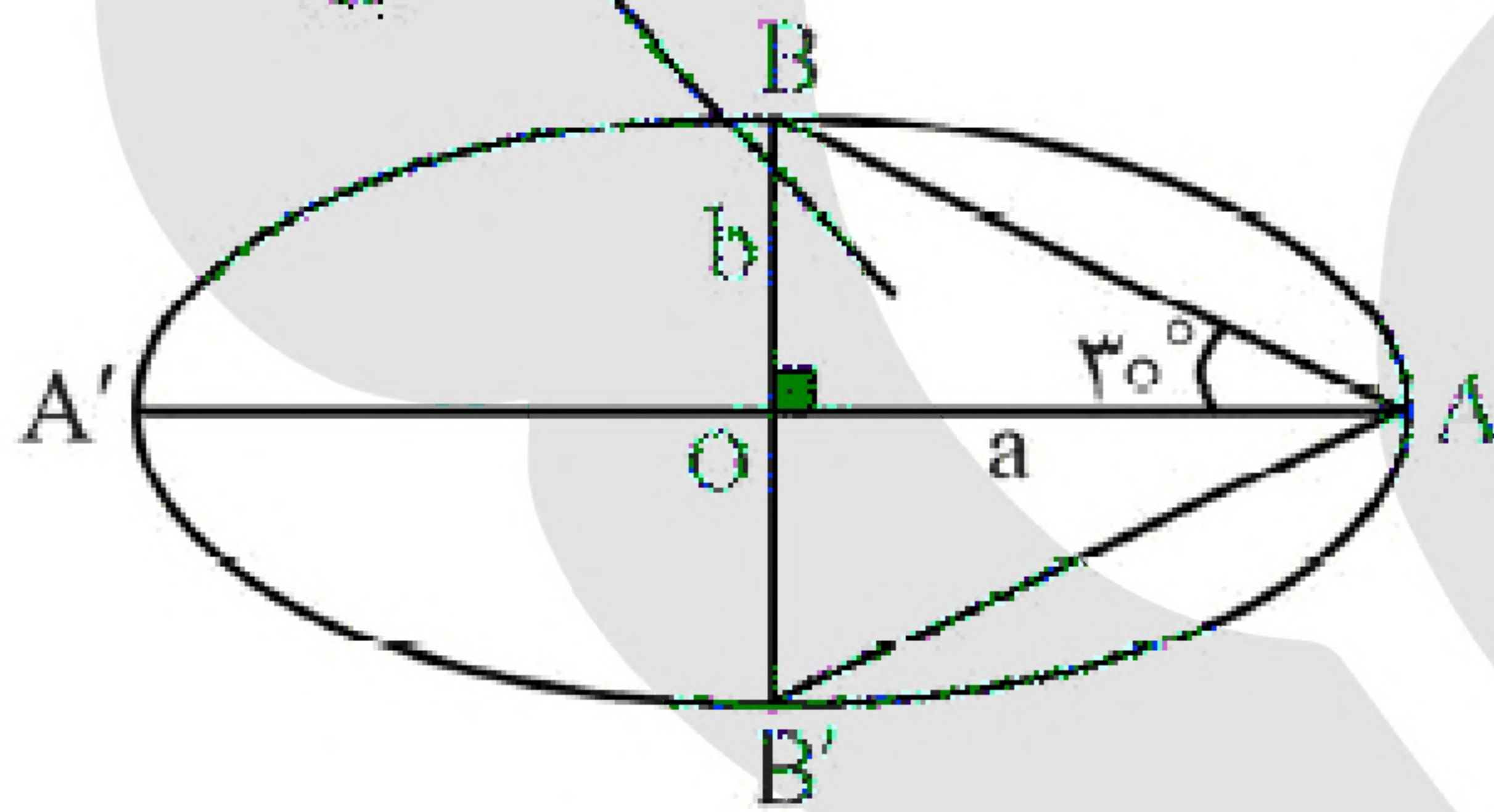
$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^2 = b^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$\text{قطر کوچک بیضی} = 2b = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{\text{اندازه قطر کوچک بیضی}}{\text{خروج از مرکز بیضی}} = \frac{2\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = 6$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال مثلث ABB' متساوی الاضلاع است.

$$\tan 30^\circ = \frac{b}{a}$$



$$\text{در بیضی } a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2$$

$$e^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - (\tan 30^\circ)^2$$

$$e^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. معادله دایره محیطی را به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ در نظر می‌گیریم:

$$\left. \begin{aligned} A(4, 2) &\Rightarrow 4a + 2b + c = -20 \\ B(-4, 6) &\Rightarrow -4a + 6b + c = -52 \\ C(-1, 7) &\Rightarrow -a + 7b + c = -50 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 2, b = -4, c = -20$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0 \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 16 + 80} = 5$$

$$\text{محیط دایره} = 2\pi r = 2\pi(5) = 10\pi$$