

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{4}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان میگیریم}} |A| = \begin{bmatrix} 10^{\frac{a}{4}} & 2^{\frac{a}{2}} \\ 5^{\frac{a}{2}} & 10^{\frac{a}{2}} \end{bmatrix}$$

$$= 10^{\frac{a}{4}} \times 10^{\frac{a}{2}} - 5^{\frac{a}{2}} \times 2^{\frac{a}{2}} = 10^{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}} - (5 \times 2)^{\frac{a}{2}} = 10^{\frac{3a}{4}} - 10^{\frac{a}{2}}$$

از طرف دیگر بنابر فرض داریم:

$$a = (\text{Log } 25)^2 - (\text{Log } 4)^2 = (\text{Log } 25 - \text{Log } 4)(\text{Log } 25 + \text{Log } 4) = \left(\text{Log } \frac{25}{4}\right)(\text{Log } 100)$$

$$= \left(\text{Log } \frac{25}{4}\right)(2) = 2 \text{Log } \frac{25}{4} \quad (1)$$

بنابراین:

$$|A| = 10^{\frac{3a}{4}} - 10^{\frac{a}{2}} \xrightarrow{\text{از (1)}} |A| = 10^{\frac{3}{2} \text{Log } \frac{25}{4}} - 10^{\text{Log } \frac{25}{4}} \Rightarrow |A| = 10^{\text{Log } \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} - 10^{\text{Log } \frac{25}{4}}$$

$$= \left(\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right)^{\text{Log } 10} - \left(\frac{25}{4}\right)^{\text{Log } 10} = \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{25}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{8} - \frac{25}{4} = \frac{125 - 50}{8} = \frac{75}{8}$$

$$\left|\frac{1}{3}A\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^2 |A| = \frac{1}{9} \times \frac{75}{8} = \frac{25}{24}$$

در نتیجه:

تذکر: از روابط $\text{Log } 10 = 1$ و $\text{Log } a - \text{Log } b = \text{Log } \frac{a}{b}$ و $\text{Log } a + \text{Log } b = \text{Log } ab$ و

$a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ و $a^{\text{Log } b} = b^{\text{Log } a}$ در حل سؤال استفاده شده است.



۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} \log_6^3 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{دترمینان}} |A| = \begin{vmatrix} \log_6^3 & \log_6^2 \\ \log_6^2 & \log_6^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = (\log_6^3)^2 - (\log_6^2)^2 = (\log_6^3 - \log_6^2)(\log_6^3 + \log_6^2) \\ = \left(\log_6^{\frac{3}{2}}\right)(\log_6^6) = \left(\log_6^{\frac{3}{2}}\right)(1) = \log_6^{\frac{3}{2}}$$

بنابراین:

$$B = \begin{bmatrix} 6^{|A|} & 2^{|A|} \\ 3^{|A|} & 36^{|A|} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6^{|A|} & 2^{|A|} \\ 3^{|A|} & 36^{|A|} \end{vmatrix} \Rightarrow |B| = 6^{|A|} \times 6^{2|A|} - 3^{|A|} \times 2^{|A|} \\ = 6^{3|A|} - 6^{|A|} = 6^{\frac{3}{2}} - 6^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} \left(6 - 1\right) = 6^{\frac{1}{2}} \times 5 = \sqrt{6} \times 5 \\ = \frac{5\sqrt{6}}{1}$$

نکته: می دانیم $\log_a^a = 1$ و $n \log_b^a = \log_b^{a^n}$ و $\log_c^b = \frac{\log_c^a}{\log_c^b}$ و $\log_c^{ab} = \log_c^a + \log_c^b$

$$\log_c^{\frac{a}{b}} = \log_c^a - \log_c^b$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان A را نسبت به ستون سوم به دست می آوریم.

$$|A| = -(-5)(-1 + 6) = 25$$

از طرف دیگر اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ آنگاه رابطه ماتریس داده شده به صورت $BXC = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

درمی آید. بنابراین $X = B^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} C^{-1}$ داریم:

$$X = \frac{1}{-8+3} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \times \frac{1}{2-4} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{5}{10} \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4/5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$



۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+y & 0 & y+yz \\ 0 & x^2 & 0 \\ 1+z & 0 & y+z^2 \end{bmatrix}$$

در ماتریس اسکالر، درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر هستند. پس:

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+z=0 \Rightarrow z=-1 \\ x^2=1+y \Rightarrow x^2-y=1 \end{cases} \xrightarrow{+} x^2-y+z=0$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 داریم:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = (8+9+0) - (12+6+0) = -1$$

$$\|A\|A = |-A| = (-1)^3 |A| = (-1)(-1) = 1$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$D = ABC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & -1 \\ 1 & 1 & x \\ x & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & x+1 & x-1 \\ x & -x+2 & x \\ -x-2 & -3 & -2x+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+5 & 0 & x+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2x-7 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$x+2 = -x-6 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$

مجموع درایه‌های قطر فرعی = مجموع درایه‌های قطر اصلی

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا درایه‌های ماتریس A^2 را به دست آورید:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

اکنون فقط درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

بنابراین درایه‌های سطر اول ماتریس A^3 به صورت $[1 \ -1 \ 0]$ است.



۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ برابر $A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$ است. پس:

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha + \beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha + \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\alpha + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{3}{5} \Rightarrow \beta = \frac{4}{5} \\ 2\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = 4 \quad \text{در نتیجه}$$

۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا دترمینان A را بدست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1(3-2) + 1(12-4) - 3(4-2) = 1 + 8 - 6 = 3 \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{bmatrix} 2|A| & |A| \\ 1 & \frac{2}{|A|} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

اکنون طرفین تساوی ماتریسی بالا را در وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ یعنی ماتریس $\frac{1}{1} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ از قسمت چپ

$$x = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -3 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix}$$

ضرب می‌کنیم. در نتیجه:

پس کوچکترین درایه‌ی قطر اصلی ماتریس x برابر ۶ است.



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس AB را پیدا می‌کنیم.

$$AB = \begin{bmatrix} x & -1 & -x \\ 0 & 0 & 4 \\ y & z & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2z & \frac{1}{2} & 2 \\ 2z & 0 & -4y \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xz - 2z & 0 & 2x + 4y \\ 0 & 2 & 0 \\ 2yz + 2z^2 & \frac{y}{2} + \frac{z}{2} & 2y - 4yz \end{bmatrix}$$

ماتریس AB اسکالر است پس درایه‌های بالا و پایین قطر اصلی صفر و درایه‌های روی قطر اصلی همگی برابر یکدیگرند. بنابراین:

$$\begin{cases} 2xz - 2z = 2 \Rightarrow xz + z = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} -xy + y = 1 \\ 2y - 4yz = 2 \Rightarrow y - 2yz = 1 \xrightarrow{\text{از (۱)}} y + 2y^2 = 1 \\ 2x + 4y = 0 \Rightarrow x = -2y \\ 2yz + 2z^2 = 0 \xrightarrow{z \neq 0} y = -z \quad (۱) \\ \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases}$$

در نتیجه:

$$2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ غ ق ق}$$

$$-xy + y = 1 \xrightarrow{y = -1} -xy - 1 = 1 \Rightarrow xy = -2$$

بنابراین:

دقت کنید $z \neq 0$ زیرا در غیر این صورت مقدار $2xz - 2z$ برابر صفر است و با اسکالر بودن ماتریس AB در تناقض است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانهاده‌ی ماتریس A) ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد)

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & a & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ a & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 10 & a + 2 \\ a + 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^T B = 52I \Rightarrow |AA^T B| = |52I| \Rightarrow |AA^T| |B| = 52^2 \times 1 \Rightarrow [3(a^2 + 10) - (a + 2)^2] \times 104 = 52^2 \Rightarrow 3a^2 + 30 - a^2 - 4a - 4 = 26 \Rightarrow 2a^2 - 4a = 0 \Rightarrow 2a(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر ممکن برای a، برابر ۲ است.

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فقط درایه‌های قطر اصلی A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 3 \\ 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & ? & ? \\ ? & 7 & ? \\ ? & ? & 5 \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌های قطر اصلی A برابر $9 + 7 + 5 = 21$ است.



۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از تساوی ماتریسی داده شده یک دستگاه می‌سازیم و آنرا حل می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5b_1 - 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4b_1 \\ 4b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5b_1 - 2b_2 = 4b_1 \\ 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 2b_2 \\ 4b_1 + ab_2 = 4b_2 \end{cases} \xrightarrow{b_1 = 2b_2} 8b_2 + ab_2 = 4b_2 \Rightarrow a = -4$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: ماتریس A^T (ترانپوز ماتریس A)، ماتریسی است که از تعویض جای سطرها و ستون‌های ماتریس A حاصل می‌شود. (این تعریف در کتاب هندسه ۳ نظام جدید وجود ندارد.)

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA^T A = 52I \Rightarrow B \times \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 52I \Rightarrow B \times \frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = I$$

بنابراین ماتریس B ، وارون ماتریس $\frac{1}{52} \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ است و در نتیجه داریم:

$$B = 52 \times \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ -8 & 28 \end{bmatrix}$$

بنابراین ماکزیمم درایه‌های ماتریس B ، برابر ۲۸ است.

تذکر: وارون ماتریس kA به صورت $\frac{1}{k}A^{-1}$ است.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ در این

صورت برای به دست آوردن سطر سوم ماتریس A کافیت سطر سوم ماتریس BC را پیدا کرده در ماتریس D ضرب کنیم.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌های سطح سوم ماتریس A برابر $3 = 7 + 1 - 5$ است.



۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\underbrace{\begin{vmatrix} \text{Log } 5 & \text{Log } 2 \\ \text{Log } 2 & \text{Log } 5 \end{vmatrix}}_{(\text{Log } 5)^2 - (\text{Log } 2)^2} \text{Log } \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1$$

$$\underbrace{(\text{Log } 5 + \text{Log } 2)}_{\text{Log } 10} \underbrace{(\text{Log } 5 - \text{Log } 2)}_{\text{Log } \frac{5}{2}}$$

$$\text{Log } \frac{5}{2} \times \text{Log } \frac{5}{2}^{(3x-2)} = 1 \Rightarrow \cancel{\text{Log } \frac{5}{2}} \times \frac{\text{Log } (3x-2)}{\cancel{\text{Log } \frac{5}{2}}} = \text{Log } (3x-2) = 1 \Rightarrow 3x-2 = 10 \Rightarrow x = 4$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دترمینان را بر حسب سطر اول باز می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & x+5 \\ x-1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & x+5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 2(-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & x+5 \\ x-1 & -1 \end{vmatrix} + 3(-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ x-1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-4 - 6x - 30) + (-2)(2 - x^2 - 4x + 5) + 3(-12 - 4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow -6x - 34 + 2x^2 + 8x - 14 - 24 - 12x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 10x - 72 = 0 \xrightarrow{\div 2}$$

$$x^2 - 5x - 36 = 0 \Rightarrow (x-9)(x+4) = 0 \Rightarrow x = 9, x = -4$$

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $AX = A^{-1}$ را از سمت چپ در A^{-1} ضرب می‌کنیم تا ماتریس X به دست آید.

$$AX = A^{-1} \Rightarrow X = (A^{-1})^2 \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\frac{3}{4} - 1} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -4 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})^2 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 & -14 \\ -56 & 25 \end{bmatrix}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس A^2 را به دست می‌آوریم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

حال فقط درایه‌های سطر اول A^4 را پیدا می‌کنیم.

$$A^4 = A^2 \times A^2 = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. حاصل دترمینان را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 3 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2-x \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4(6 + x^2 - 5x = 2) - 1(3 - x - 3) + 1(2 - 6 + 3x) = 0$$

$$\Rightarrow -16 - 4x^2 + 20x + x - 4 + 3x = 0 \Rightarrow -4x^2 + 24x - 20 = 0 \xrightarrow[\text{تقسیم بر } -4]{} x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 5$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ نتیجه می‌گیریم $B^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ و با فرض

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \text{ نتیجه می‌گیریم } C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

حال طرفین رابطه‌ی ماتریسی داده شده را از چپ در B^{-1} و از راست در C^{-1} ضرب می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow X = B^{-1} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} C^{-1}$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 20 & -24 \\ -16 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا سطر اول ماتریس A^2 و سپس سطر اول A^3 را پیدا می‌کنیم.

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ ______ & ______ & ______ \\ ______ & ______ & ______ \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 24 \\ ______ & ______ & ______ \\ ______ & ______ & ______ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 6 & 86 \\ ______ & ______ & ______ \\ ______ & ______ & ______ \end{bmatrix}$$



۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نسبت به سطر دوم که یک درایه صفر دارد، دترمینان می گیریم.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 - 5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 75 - 50 = 25$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با ضرب کردن طرفین رابطه $AX = B$ در A^{-1} از چپ، ماتریس X تنها می شود.

$$AX = B \xrightarrow{A^{-1} \times} X = A^{-1} B$$

با داشتن A^{-1} ، X به راحتی به دست می آید.

$$A^{-1} = \frac{1}{-4+3} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 13 \\ -1 & -8 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که درایه های طرفین قطر اصلی آن همگی صفرند، یعنی $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

دو ماتریس را در هم ضرب می کنیم و درایه های غیرواقع بر قطر اصلی را برابر صفر قرار می دهیم تا X و Y به دست آیند.

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 0 + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 0 + 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 4 + 3 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

پس:

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\|A\|A = |A|^3 |A| = |A|^4 = 4^4 = 256$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی داده شده را در A^{-1} از سمت چپ ضرب می کنیم.

$$AX = A - 2I \xrightarrow{A^{-1} \times} X = I - 2A^{-1} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

حال از تساوی های ۱ و ۲ نتیجه می گیریم:



۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا حاصل ضرب داده شده را به دست می آوریم.

$$[x \quad 2x \quad -1]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3} = [11x - 1 \quad -x - 2 \quad -3x]_{1 \times 3}$$

$$[x \quad 2x \quad -1] \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [11x - 1 \quad -x - 2 \quad -3x]_{1 \times 3} \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ -1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = 0$$

$$\Rightarrow [11x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x]_{1 \times 1} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{2}{9}$$

