

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} (k-1)x - 2y = 3 \\ 2x - 2ky = k+2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{k-1}{2} = \frac{-2}{-2k} \neq \frac{3}{k+2} \Rightarrow k^2 - k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = -1 \Rightarrow \frac{-2}{2} = \frac{-2}{2} \neq \frac{3}{1} \\ k = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow k = -1$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 2m - 1 = 3 \Rightarrow m = 2 \\ n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1 \\ k + 2 = 0 \Rightarrow k = -2 \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 10$$

$$|-2|B^{-1}|B^2| = (-2)^3 \frac{1}{|B|^3} |B|^2 = \frac{-8}{|B|} = \frac{-8}{10} = -0.8$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|\sqrt{3}A| = (|A| + 2)(|A| + 3) - |A|(|A| - 2)$$

↓
ماتریس 2×2
↓

$$(\sqrt{3})^2 |A| = \cancel{|A|^4} + 5|A| + 6 - \cancel{|A|^4} + 2|A|$$

$$3|A| = 7|A| + 6 \Rightarrow |A| = -\frac{3}{4}$$

$$\sqrt{3}A = \begin{bmatrix} \frac{-3}{4} + 2 & \frac{-3}{4} \\ \frac{-3}{4} - 2 & \frac{-3}{4} + 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-11}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{5}{4\sqrt{3}} & \frac{-3}{4\sqrt{3}} \\ \frac{-11}{4\sqrt{3}} & \frac{9}{4\sqrt{3}} \end{bmatrix} \Rightarrow A \text{ حاصل ضرب تمام درایه‌های } A = \frac{1(-3)(3)(-7)}{(2\sqrt{3})^4} = \frac{7}{16}$$



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$5A - 5B = -8AB \xrightarrow[\text{از چپ}]{\times A^{-1}} \underbrace{5A^{-1} \times A}_I - 5A^{-1}B = -8 \underbrace{A^{-1} \times A}_I \times B$$

$$5I - 5A^{-1}B = -8B \xrightarrow[\text{از راست}]{\times B^{-1}} 5B^{-1} - 5A^{-1} = -8I \xrightarrow{\times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}} A^{-1} - B^{-1} = \frac{8}{5}I$$

$$\Rightarrow |A^{-1} - B^{-1}| = \left| \frac{8}{5}I \right| = \left(\frac{8}{5} \right)^3 \times |I| = \frac{512}{125} \times 1 = 4.096$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق دستور ساروس:

$$|A| = (3 - 4 - 12) - (-12 + 2 - 6) \Rightarrow |A| = 3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -15 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow X = 45 \text{ حاصل ضرب درایه‌های قطر فرعی } X$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{m}{2} & 3 & 4 \\ 0 & \frac{m}{2} & 5 \\ 0 & 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ماتریس بالا مثلثی}} |A| = \left(\frac{m}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} m^3$$

تذکر: دترمینان ماتریس‌های بالامثلثی، پایین‌مثلثی و قطری همگی برابر حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی است.

$$||A| \cdot A| = |A| \text{ چون } A_{3 \times 3} \xrightarrow{\text{مطابق فرض سوال}} |A|^3 \times |A| = |A|$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \text{ غ ق چون } A \text{ وارون پذیر است} \\ |A| = 1 \Rightarrow \frac{1}{8} m^3 = 1 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2 \end{cases}$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} mx + 3y = -4 \\ 2x + (m-1)y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{شرطی شمار جواب}} \frac{m}{2} = \frac{3}{m-1} = \frac{-4}{4}$$

$$\downarrow$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m-3)(m+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$$

$$m = -2 \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} |A| & |A| \\ -8 & 2|A| \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{به دو طرف}]{\text{اعمال دترمینان}} |A|^3 = 2|A|^2 + 8|A|$$

$$|A|^3 - 2|A|^2 - 8|A| = 0$$

$$|A|(|A|^2 - 2|A| - 8) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$|A| = 0, (|A| - 4)(|A| + 2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$|A| = 4$$

$$|A| = -2$$

$$|A| \text{ مجموع تمام مقادیر } = 0 + 4 + (-2) = 2$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $A^{-1} + B^{-1} = M$ رابطه را از سمت چپ در A و از سمت راست در B ضرب می‌کنیم:

$$A^{-1} + B^{-1} = M \xrightarrow{\times A \text{ چپ}} I + A \cdot B^{-1} = AM \xrightarrow{\times B \text{ راست}}$$

$$B + A \cdot B^{-1} \cdot B = AMB \Rightarrow B + A = AMB \xrightarrow{\text{اعمال دترمینان}}$$

$$|A + B| = |A| \times |M| \times |B| \Rightarrow -30 = |AB| \times |M| \Rightarrow -30 = -2 \times |M| \Rightarrow |M| = 15$$

$$\Rightarrow |A^{-1} + B^{-1}| = 15$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|A| = 1 \times 0 - (1 \times (-1)) = 1 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A^{-1}$$

$$A^6 = A^5 \times A = A^{-1} \cdot A = I$$

$$A^7 = A^6 \times A = A$$

$$A^8 = A^7 \times A = A \times A = A^2$$

$$A^9 = A^8 \times A = A^2 \times A = A^3$$

$$A^{10} = A^9 \times A = A^3 \times A = A^4$$

$$A^{11} = A^4 \times A = A^5 = A^{-1} \Rightarrow A^5, A^{11}, A^{17}, \dots \text{ برابرند با } A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{1403} = A^{6 \times 233 - 1} = A^{-1} = A^{-1} \text{ می شود} \Rightarrow A^{1403} = A^{-1} \Rightarrow 6n - 1 = 1403 \Rightarrow n = 234$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$6A^{-1} + A^2 - I = 6 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -6 & -3 \end{bmatrix} \right) = 9 - (-18) = 27$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A^3 = A^2 \times A = I \times A = A$$

$$A^{2022} = I \text{ و } A^{1401} = A$$

$$A^{2022} - 7A^{1401} = I - 7 \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$$

$$|A^{2022} - 7A^{1401}| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ -7 & -6 \end{vmatrix} = 8(-6) - (0 \times (-7)) = -48$$



۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{m}{2} = \frac{3}{m-1} = \frac{-4}{4} \Rightarrow m = -2 \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} |A| & |A| \\ -8 & 2|A| \end{bmatrix}$$

از دو طرف دترمینان

$$\xrightarrow{\quad} |A|^3 = |A|(2|A|) - (-8)|A| \Rightarrow |A|^3 - 2|A|^2 - 8|A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A|^2 - 2|A| - 8) = 0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \\ |A|^2 - 2|A| - 8 = 0 \Rightarrow (|A| - 4)(|A| + 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| = -2 \\ |A| = 4 \end{cases}$$

$$|A| = -8 = \text{حاصلضرب مقادیر غیر صفر}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & -\beta \\ \beta^2 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS = 3^3 - 3 \times 7 \times 3 = -36$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$-36 = \text{حاصل دترمینان مورد نظر}$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 7$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دستور ساروس:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (4 - 9 - 8) - (-8 - 12 + 3) = 4$$

$$|(4A^{-1})^3| = |4A^{-1}|^3 = \left(4^3 \times \frac{1}{|A|}\right)^3 = \left(4^3 \times \frac{1}{4}\right)^3 = (4^2)^3 = 4^6 = 2^{12} = 4096$$

$$|A^n| = |A|^n, |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}, |K \times A_{n \times n}| = K^n \times |n \times n|$$

↓
عدد حقیقی غیر صفر



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3a & 2a-8 \\ b-3 & -2b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow{AB \text{ قطری}} \begin{cases} 2a-8=0 \Rightarrow a=4 \\ b-3=0 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -4 - 12 = -16 \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{16} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{-1}{4} \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 12 \\ 9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{16} + \beta &= 28, \frac{\alpha}{4} = 12 \\ \frac{3\alpha}{16} = 9, \frac{-\alpha}{4} + \beta &= 13 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = 48 \Rightarrow \alpha + \beta = 73$$

$$\Rightarrow \beta = 25$$

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ماتریس ضرایب دستگاه داده شده $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ است. پس داریم:

$$(I - A)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow I - A = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-3}{2} \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 2 & 0 \\ -36 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 2 \Rightarrow |2B^{-1}| = 2^3 \times \frac{1}{|B|} = 4$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از طرفین تساوی $AB^{-1} = 3I$ وارون می‌گیریم:

$$(AB^{-1})^{-1} = (3I)^{-1} \Rightarrow BA^{-1} = \frac{1}{3}I$$

$$B(CA)^{-1} = B(A^{-1}C^{-1}) = (BA^{-1})C^{-1} = \frac{1}{3}I \left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس برابر با صفر است.



۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ 5 & -2 \\ -b & a+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2b+10 & b-2a-6 \\ -a-4b+15 & 4a-b-2 \end{bmatrix}$$

چون ماتریس AB ، یک ماتریس قطری است، پس درایه‌های خارج از قطر اصلی (درایه‌های قطر فرعی آن) صفر است:

$$\begin{cases} b-2a-6=0 \\ -a-4b+15=0 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=4$$

$$I_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ می‌دانیم}$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 & 18 \\ 7 & 4 & -18 \\ -4 & -8 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow BA - 3I = \begin{bmatrix} -8 & 10 & 18 \\ 7 & 1 & -18 \\ -4 & -8 & 5 \end{bmatrix}$$

$|BA - 3I| = 546$ (محاسبه دترمینان 3×3 به روش ساروس یا بسط دادن)

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \xrightarrow{\times A} \alpha A^2 + \beta A = I \quad (1)$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -16 & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1)} \alpha \begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -16 & 17 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9\alpha & -8\alpha+2\beta \\ -16\alpha+4\beta & 17\alpha-3\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9\alpha - \beta = 1 \\ -8\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1/2 \\ \beta = 1/8 \end{cases}$$

$$\alpha + \beta = 1/2 + 1/8 = 5/8$$

راه حل دوم:

ماتریس A^{-1} را پیدا می‌کنیم در تساوی داده شده قرار می‌دهیم.

$$\alpha A + \beta I = A^{-1} \Rightarrow \alpha \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\alpha+\beta & 2\alpha \\ 4\alpha & -3\alpha+\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & 2/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 3/5 \Rightarrow \beta = 3/5 + \alpha \\ 2\alpha = 4/5 \Rightarrow \alpha = 2/5 \end{cases}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$3A = 6I - 12A^{-1} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} A = 2I - 4A^{-1} \xrightarrow{\times A} A^2 = 2A - 4I$$

$$\Rightarrow A^2 = 2(2I - 4A^{-1}) - 4I$$

$$A^2 = -8A^{-1} \xrightarrow{\times A} A^3 = -8I \xrightarrow{\times (-2)} -2A^3 = 16I \Rightarrow |-2A^3| = |16I| = 16^3 \times 1 = 4096$$



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A = \begin{bmatrix} |A| & 3|A| \\ 3 & |A| \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = |A|^2 - 9|A| \Rightarrow |A|^2 - 10|A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A| - 10) = 0 \quad \begin{cases} |A| = 0 \text{ غ ق ق} \\ |A| = 10 \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -\frac{3}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow x = -5 \\ \searrow y = 2 \end{matrix}$$

$$x^2 + y^2 = 25 + 4 = 29$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر عدد از داخل دترمینان خارج شود، به توان مرتبه ماتریس می‌رسد، یعنی:

$$|KA| = K^n |A|$$

$$|A| = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| 16 \times \frac{1}{2} A \right| = |8A| = 8^2 \times |A| = 64 \times \frac{1}{2} = 32$$

$$|B| = 2 \cos^2 15^\circ - 2 \sin^2 15^\circ = 2(\cos 30^\circ) = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{3}$$

$$|3 \times \sqrt{3} B| = |3\sqrt{3} B| = (3\sqrt{3})^2 |B| = 27|B| = 27\sqrt{3}$$

$$\text{عبارت مورد نظر سؤال} = 32 + \sqrt{3}(27\sqrt{3}) = 32 + 81 = 113$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دترمینان 3×3 را بر حسب ستون دوم آن بسط می‌دهیم و داریم:

$$(x+2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x-1 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+2)(-x+2) = 0$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$x = -2 \quad x = 2$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها} = 2(-2) = -4$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید حاصل دترمینان $A^{-1} + B^{-1}$ برابر K باشد:

$$|A^{-1} + B^{-1}| = K \xrightarrow[\text{از چپ}]{\text{ضرب } |A|} |I + A \cdot B^{-1}| = K|A| \xrightarrow[\text{از راست}]{\text{ضرب } |B|} |B + A| = K|A||B|$$

$$\Rightarrow K = \frac{|B + A|}{|A||B|} \Rightarrow K = \frac{|A + B|}{|AB|} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 7 & 14 \end{vmatrix}}{2} = \frac{14 \times 5 - 7 \times 12}{2} = -7$$



۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$|A| = 28|A|^3 - 6|A| \Rightarrow 28|A|^3 - 7|A| = 0 \Rightarrow 7|A|(4|A|^2 - 1) = 0$$

$$\begin{cases} |A| = 0 \Rightarrow \text{ماتریس وارون پذیر نیست} \\ |A|^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \Rightarrow |A^{-1}|^4 = \left(\frac{1}{|A|}\right)^4 = \left(\frac{1}{|A|^2}\right)^2 = 16$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|A^{-1} + B^{-1}| = K \xrightarrow{\text{از چپ } \times |A|} |A(A^{-1} + B^{-1})| = |A|.K$$

$$\Rightarrow |I + AB^{-1}| = |A|.K \xrightarrow{\text{از راست } \times |B|} |(I + AB^{-1})B| = |A|.|B|.K$$

$$\Rightarrow |B + A| = K|AB| \Rightarrow K = \frac{|A+B|}{|AB|} = \frac{28}{4} = 7$$

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طرفین تساوی $|A^{-1} + I| = 8$ را در $|A|$ ضرب می کنیم. داریم:

$$|A| \times |A^{-1} + I| = 8|A| \Rightarrow |A \times A^{-1} + A \times I| = 8 \times 4 \Rightarrow |I + A| = 32$$

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2 \times A = I \times A = A$$

بنابراین توان های زوج A برابر I و توان های فرد A با خود A برابر است.

$$A^{2021} - 3A^{1400} = A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\det (\text{ماتریس نهایی}) = (-4)(-2) - (0)(1) = 8$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ماتریس های A^3 و B^3 را به دست می آوریم.

$$A^2 = A \Rightarrow A^3 = A^2 \Rightarrow A^3 = A$$

$$B^3 = (2A - I)^3 = 8A^3 - 3(2A)^2 + 3(2A) - I^3 = 8A - 12A + 6A - I \Rightarrow B^3 = 2A - I$$

$$\begin{cases} A^3 + B^3 = A + 2A - I = 3A - I \\ A^3 + B^3 = \alpha A + \beta I \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = -1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 10$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{m}{2} = \frac{3}{m-1} = \frac{-4}{4} \Rightarrow m = -2 \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} |A| & |A| \\ 4(-2) & 2|A| \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |A|^3 = 2|A| \times |A| - (-8)|A| \Rightarrow |A|^3 = 2|A|^2 + 8|A| \Rightarrow |A|^3 - 2|A|^2 - 8|A| = 0$$

$$\Rightarrow |A|(|A|^2 - 2|A| - 8) = 0 \Rightarrow |A|(|A| - 4)(|A| + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |A| = 0 \\ |A| = 4 \\ |A| = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |A| = -8 = \text{حاصل ضرب مقادیر غیر صفر}$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A_1 \times A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1+2

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1+2+3

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}$$

1+2+3+4

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+2+3+\dots+n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{n(n+1)}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

با استقراء روی نتایج بالا

$$\text{مجموع درایه های ماتریس نهایی} = \frac{n(n+1)}{2} + 1 + 1 + 0 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} + 2 = 1277 \Rightarrow n = 50$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2y & x+2z \\ -6+y & -3x+z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6+y=0 \Rightarrow y=6 \\ 2+2y=-3x+z \xrightarrow{y=6} 14=-3x+z \\ x+2z=0 \Rightarrow x=-2z \end{cases}$$

$$14 = -3(-2z) + z \Rightarrow z = 2 \Rightarrow x = -4$$

$$x+y+z = -4+6+2 = 4$$



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|(A^{-1})^3| = |A^{-1}|^3 = \frac{1}{|A|^3}$$

نکته:

از طرفین دترمینان می‌گیریم. برای محاسبه دترمینان نسبت به سطر اول بسط می‌دهیم:

$$|A| = |A| (|A| - 2) + 1(2) \Rightarrow |A|^2 - 3|A| + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \Rightarrow \frac{1}{1} |2(A^{-1})^3| = \frac{1}{1} \times 2^3 \times \frac{1}{|A|^3} = \frac{4}{1} = 4 \\ |A| = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} |2(A^{-1})^3| = \frac{4}{2^3} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{مجموع مقادیر ممکن} = 4 + \frac{1}{2} = \frac{4}{5}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$AX = 3A - 4I \Rightarrow A^{-1} AX = A^{-1} (3A - 4I)$$

$$\Rightarrow X = 3I - 4A^{-1}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \times \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 10 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 & 0 \\ 0 & 49 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های قطر اصلی} = 65 + 49 = 114$$



۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

نکته: اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد، آن گاه $A^2 = (a+d)A - |A|I$

$$A^2 = \frac{2}{3}A - \frac{1}{3}I$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} A^4 &= \left(\frac{2}{3}A - \frac{1}{3}I \right)^2 = \frac{4}{9}A^2 - \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}I \\ &= \frac{4}{9} \left(\frac{2}{3}A - \frac{1}{3}I \right) - \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}I = \frac{8}{27}A - \frac{4}{27}I - \frac{4}{9}A + \frac{1}{9}I = \frac{-4}{27}A - \frac{1}{27}I \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{4}{27} \\ \beta = -\frac{1}{27} \end{cases} \Rightarrow \beta - \alpha = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{3m+1} = \frac{m}{1} = \frac{m-2}{3m-4}$$

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای این که دستگاه بی شمار جواب داشته باشد باید:

$$\Rightarrow \begin{cases} 3m^2 + m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (1) \\ 3m^2 - 5m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow m = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{m^2}{2} = \frac{\frac{4}{9}}{2} = \frac{2}{9}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$|A| = (\log 2)^2 - (\log 5)^2 = (\log 2 - \log 5)(\log 2 + \log 5) = \log \frac{2}{5}$$

$\log 1 = 1$

$$|B| = \frac{1}{5} |A| - \frac{1}{5} |A| = \frac{1}{5} |A| \left(\frac{1}{5} |A| - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{5} \log \frac{2}{5} \left(\frac{1}{5} \log \frac{2}{5} - 1 \right) = \frac{2}{5} \left(\frac{4}{25} - 1 \right) = \frac{2}{5} \times \left(-\frac{21}{25} \right) = -\frac{42}{125}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5}{2} B \right| = \frac{25}{4} |B| = \frac{25}{4} \times \left(-\frac{42}{125} \right) = -\frac{21}{10} = -2.1$$



۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$|A^{-1} + B^{-1}| = \frac{|A + B|}{|AB|}$$

نکته:

$$|A^{-1} + B^{-1}| = t \Rightarrow |A (A^{-1} + B^{-1})| = |A| t$$

اثبات:

$$\Rightarrow |I + AB^{-1}| = |A| t \Rightarrow |(I + AB^{-1})B| = |A||B| t$$

$$\Rightarrow |A + B| = t |AB| \Rightarrow t = \frac{|A + B|}{|AB|} = \frac{۴۲}{۳} = ۱۴$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون دو صفر در سطر دوم داریم، بهتر است نسبت به سطر دوم بسط دهیم:

$$f(\alpha) = ۱ \times (-۱)^{۱+۲} \begin{vmatrix} \cos^2 \alpha - ۱ & \tan \alpha \\ \cot \alpha & -۲ \end{vmatrix} = (-۱) \times (-۲ \cos^2 \alpha + ۲ - ۱)$$

$$= ۲ \cos^2 \alpha - ۱ = \cos 2\alpha \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{۱۲}\right) = \cos \frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{3}}{۲}$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{bmatrix} x & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+۳ & ۲x+۳ & x+۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow x^2 + ۶x + ۴ = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{\alpha^2} + \frac{۱}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - ۲P}{P^2}$$

$$\begin{array}{l} S = \frac{-b}{a} = -۶ \\ P = \frac{c}{a} = ۴ \end{array} \rightarrow \frac{(-۶)^2 - ۲(۴)}{۱۶} = \frac{۲۸}{۱۶} = \frac{۷}{۴}$$