

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

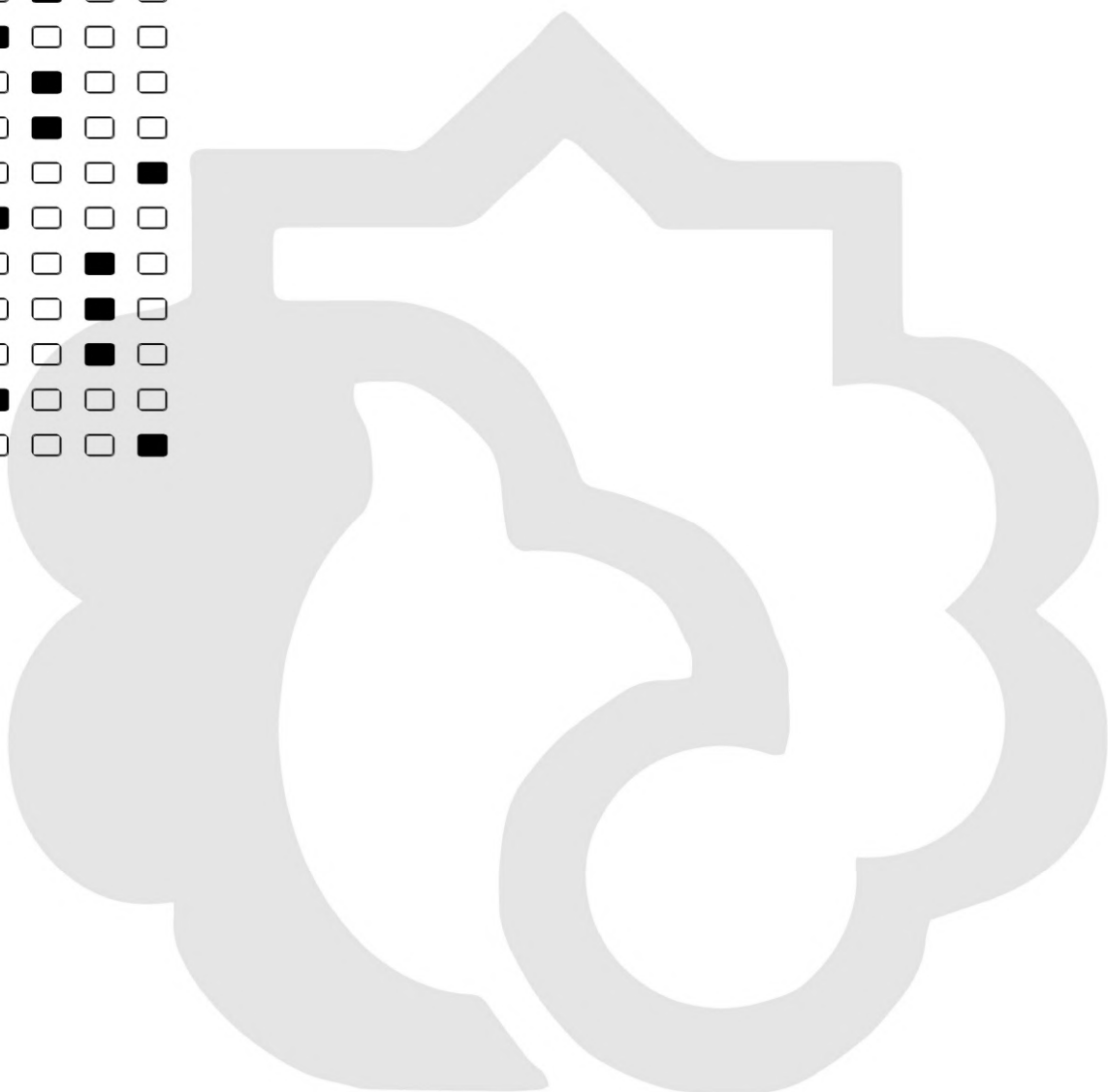
www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

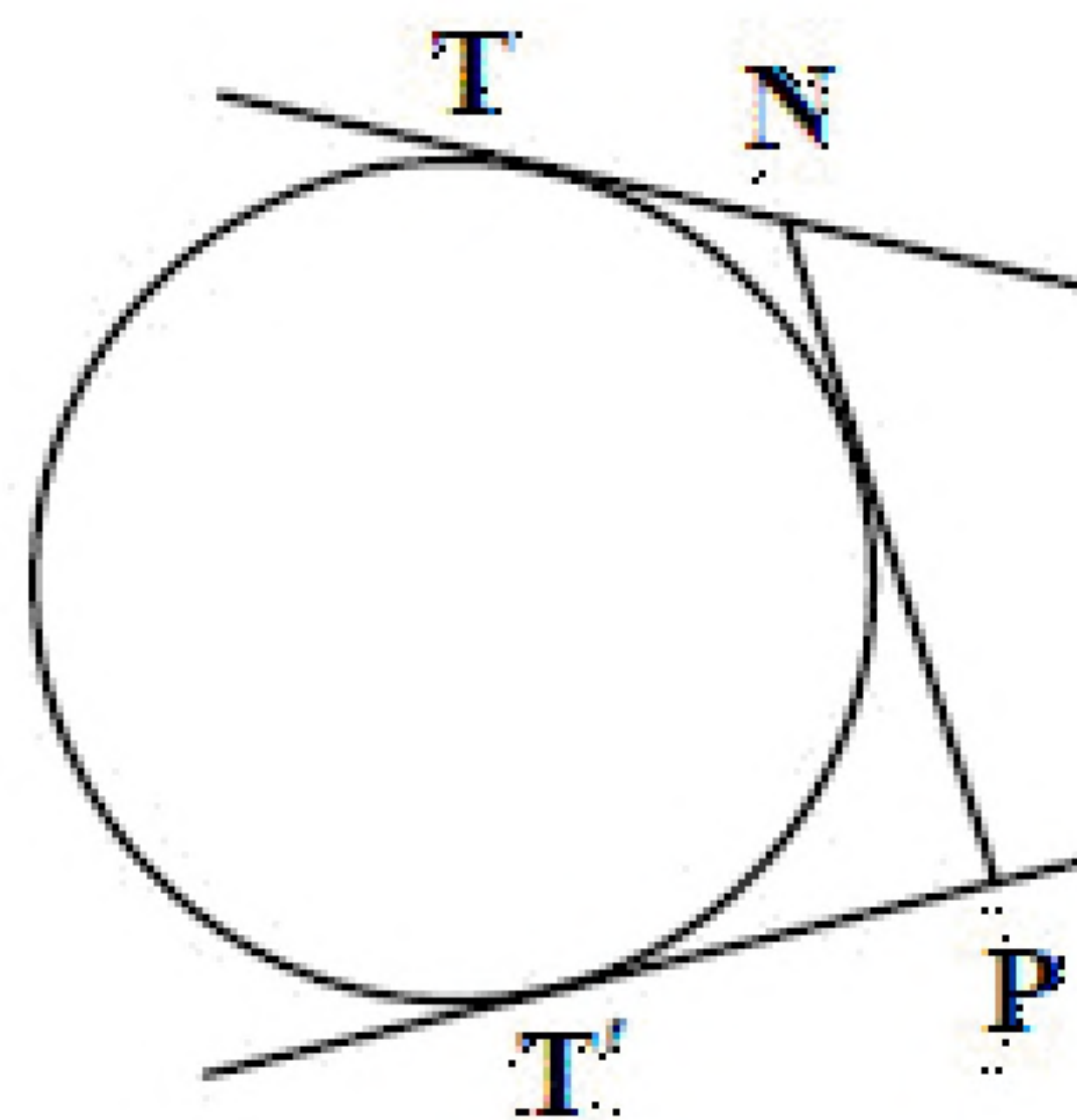


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





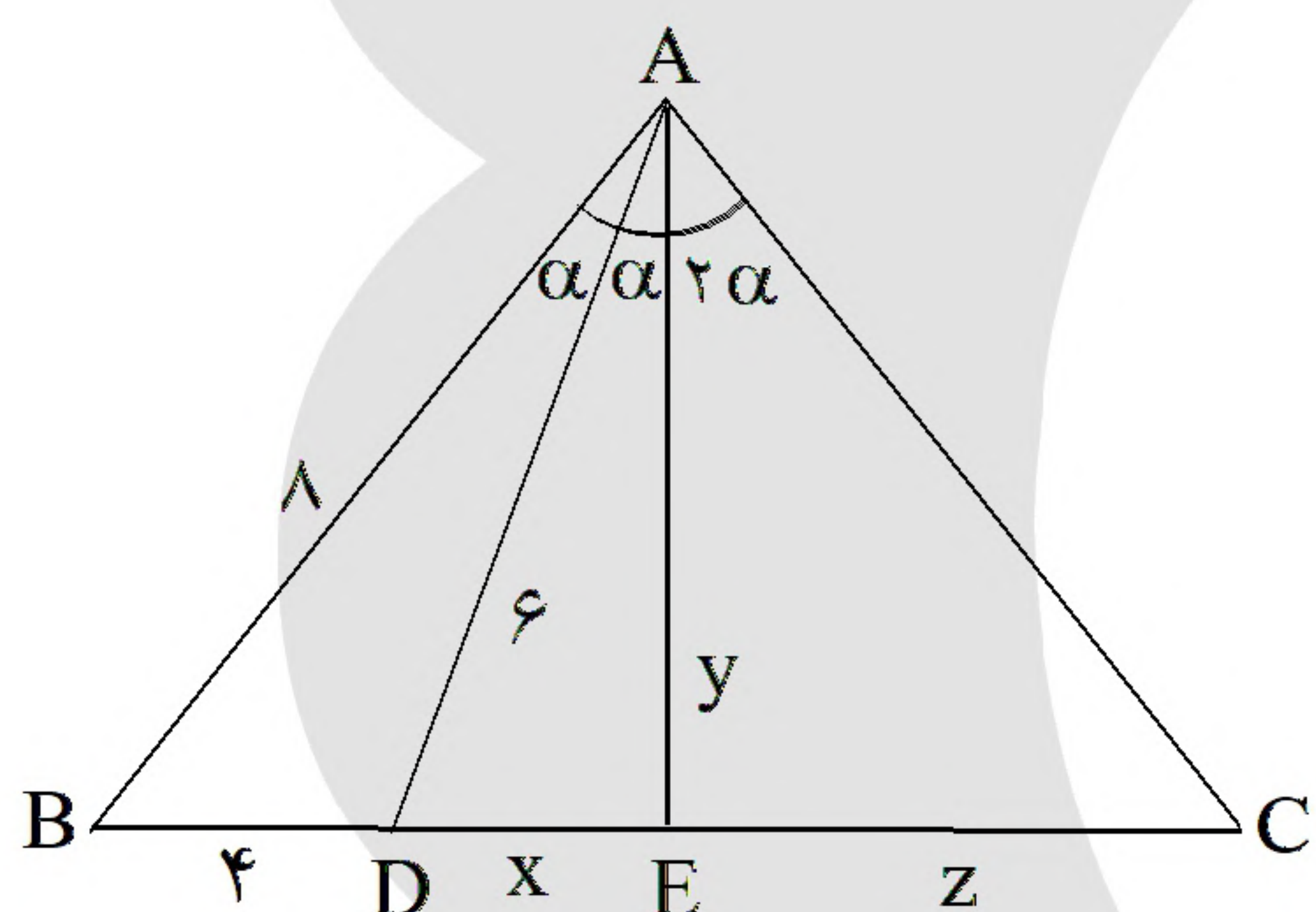
۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $MT = MT' = P$ پس $P = ۱۸$ در نتیجه محیط مثلث MNP برابر ۳۶ است پس:



$$\begin{aligned} MN + MP + NP &= ۳۶ \\ ۱۵ + ۱۲ + NP &= ۳۶ \Rightarrow NP = ۹ \end{aligned}$$

از طرف دیگر اگر r_a شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع NP باشد داریم:

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{S}{P - a} \xrightarrow{a = NP = ۹} r_a = \frac{\sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}}{P - a} = \frac{\sqrt{۱۸(۱۸ - ۱۵)(۱۸ - ۱۲)(۱۸ - ۹)}}{۱۸ - ۹} \\ &= \frac{\sqrt{۱۸ \times ۳ \times ۶ \times ۹}}{۹} = \frac{۱۸ \times ۳}{۹} = ۶ \end{aligned}$$



۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نیمساز زاویه \hat{A} در مثلث ABC یعنی AE را رسم می‌کنیم. در این صورت AD نیمساز مثلث ABE است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$\triangle ABE : \text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DE} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow \frac{۴}{x} = \frac{۸}{y}$$

$$\Rightarrow y = 2x \quad (۱)$$

$$\triangle ABE : \text{نیمساز } AD \Rightarrow AD^2 = AB \times AE - BD \times DE$$

$$\Rightarrow ۳۶ = ۸y - ۴x \xrightarrow{\text{از (۱)}} ۳۶ = ۱۶x - ۴x \Rightarrow x = ۳ \xrightarrow{\text{از (۱)}} y = ۶$$

$$\triangle ABC : \text{نیمساز } AE \Rightarrow \frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{۴+x}{z} = \frac{۸}{AC} \xrightarrow{x=۳} \frac{۷}{z} = \frac{۸}{AC} \Rightarrow z = \frac{۷}{۸}AC$$

$$\triangle ABC : \text{نیمساز } AE \Rightarrow AE^2 = AB \times AC - BE \times EC \Rightarrow y^2 = ۸AC - (۴+x)(z) \xrightarrow{\text{از (۲)}} y=۶$$

$$۳۶ = ۸AC - ۷ \times \frac{۷}{۸}AC \Rightarrow ۳۶ = \left(۸ - \frac{۴۹}{۸}\right)AC \Rightarrow AC = \frac{۳۶}{\frac{۱۵}{۸}} \Rightarrow AC = \frac{۸ \times ۳۶}{۱۵} = \frac{۹۶}{۵} = ۱۹\frac{۲}{۵}$$

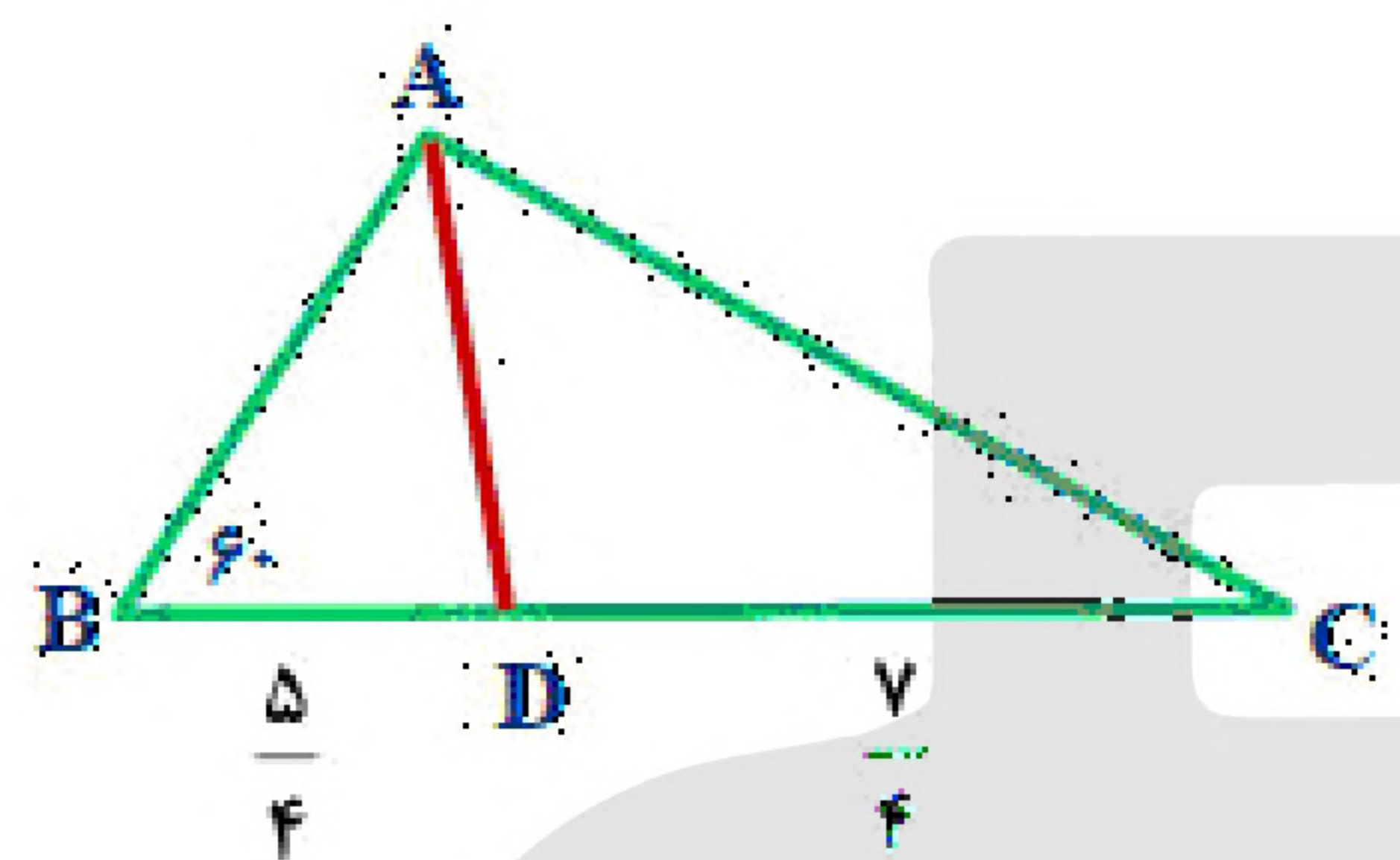


۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{قضیه نیمساز: } \frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{7}{5} \Rightarrow AC = \frac{7}{5}AB$$

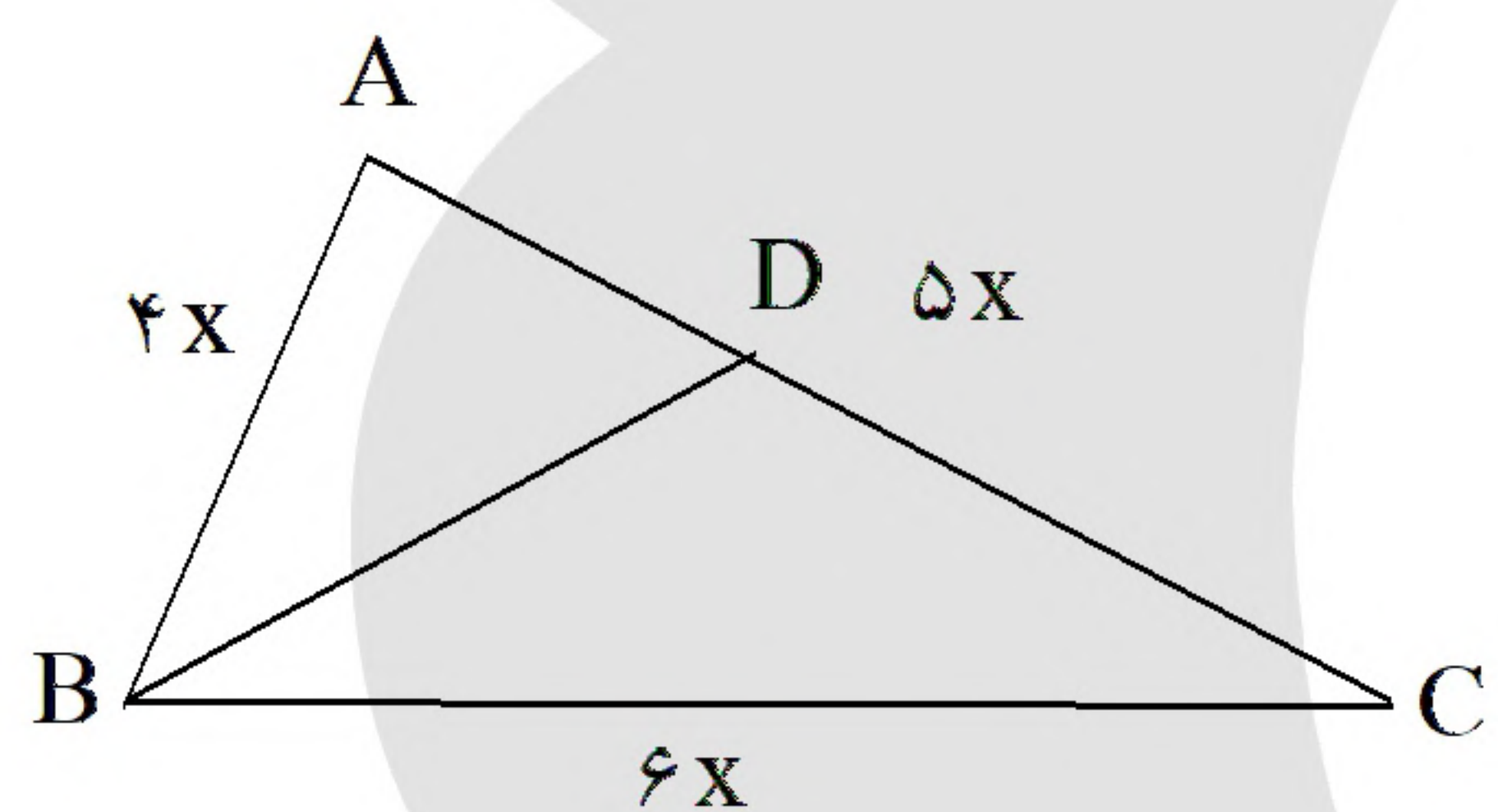
$$\text{قضیه کسینوسها: } AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \times \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{49}{25}AB^2 = AB^2 + 3^2 - 2AB \times 3 \times \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{24}{25}AB^2 + 3AB - 9 = 0 \quad \begin{cases} \text{غ ق ق} \\ AB = -5 \\ AB = \frac{15}{8} \Rightarrow AC = \frac{21}{8} \end{cases}$$



$$AD^2 = AC \times AB - DC \times BD$$

$$AD^2 = \frac{21}{8} \times \frac{15}{8} - \frac{5}{4} \times \frac{7}{4} = \frac{25 \times 7}{64} \Rightarrow AD = \frac{5}{8}\sqrt{7}$$



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC فرض کنیم $AB = 4x$ و $AC = 5x$ و $BC = 6x$. در این صورت زاویه B زاویه متوسط است. فرض کنیم BD نیمساز زاویه B باشد. در این صورت دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس B هستند پس نسبت مساحت‌های آنها برابر نسبت قاعده‌های نظیرشان است. پس:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

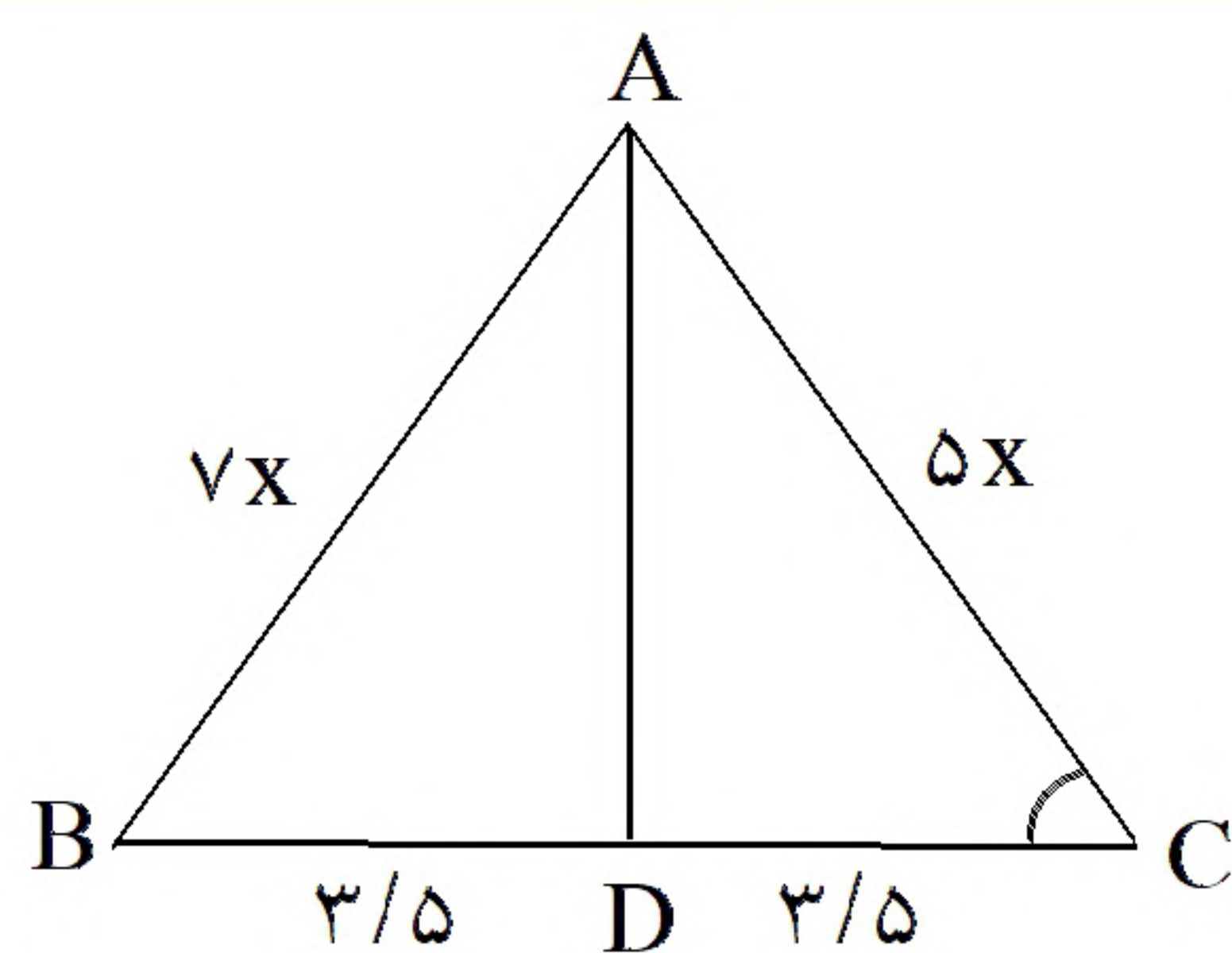
از طرف دیگر بنابر قضیه نیمساز داخلی می‌نویسیم:

$$\text{BD نیمساز} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD + DC} = \frac{AB}{AB + BC} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{4x}{4x + 6x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{4x}{10x} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{2}{5} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}} = \frac{5}{2}$$

بنابراین:



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی استفاده کرده می‌نویسیم.

$$AD = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{3/5}{2/5} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{35}{25} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{7}{5} = \frac{AB}{AC}$$

با توجه به تناسب بدست آمده فرض می‌کنیم $AB = 7x$ و $AC = 5x$ اکنون از قضیه‌ی کسینوسها داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos 60^\circ \xrightarrow{BC=6} 49x^2 = 25x^2 + 36 - 2(5x)(6)\left(\frac{1}{2}\right)$$

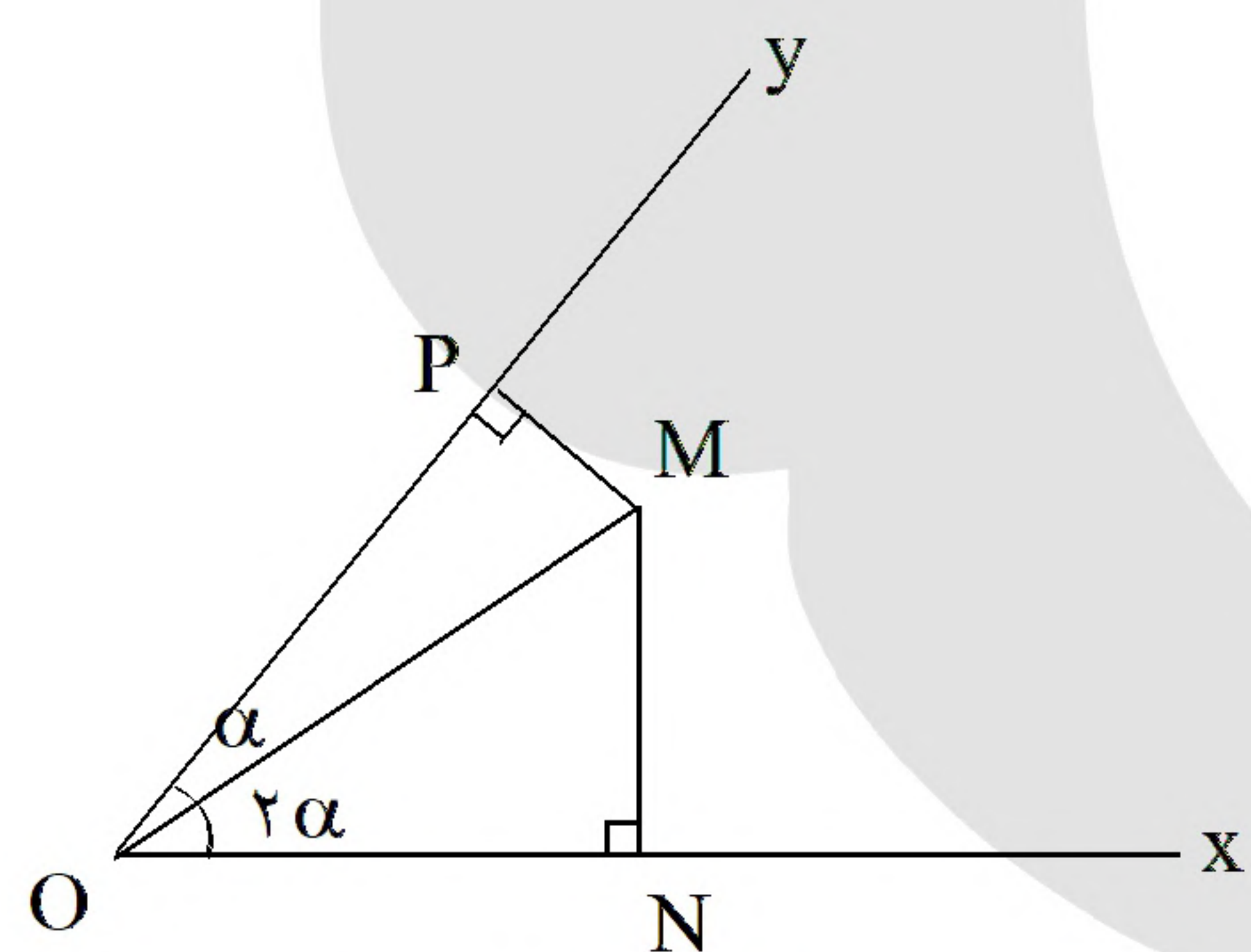
$$\Rightarrow 49x^2 = 25x^2 + 36 - 30x \Rightarrow 24x^2 + 30x - 36 = 0 \xrightarrow{\div 6} 4x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{-5 \pm 11}{8} \Rightarrow x = \frac{-5 + 11}{8} \Rightarrow x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

بنابراین ضلع کوچکتر این مثلث یعنی AC برابر $\frac{15}{4} = 3.75$ است. (توجه کنید اگر $BD = 2/5$ و

$DC = 3/5$ آنگاه مسئله جواب نخواهد داشت. پس بهتر بود از ابتدا مطرح می‌شد $AB > AC$)

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره‌های محیطی دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی OMP و OMN مساوی $\frac{OM}{2} = R$ است. پس با استفاده از قضیه‌ی سینوسها داریم.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle OMN : \frac{MN}{\sin 2\alpha} = 2R \\ \triangle OMP : \frac{MP}{\sin \alpha} = 2R \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{\sin 2\alpha} = \frac{MP}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{MN}{MP} = 2 \cos \alpha \quad (1)$$

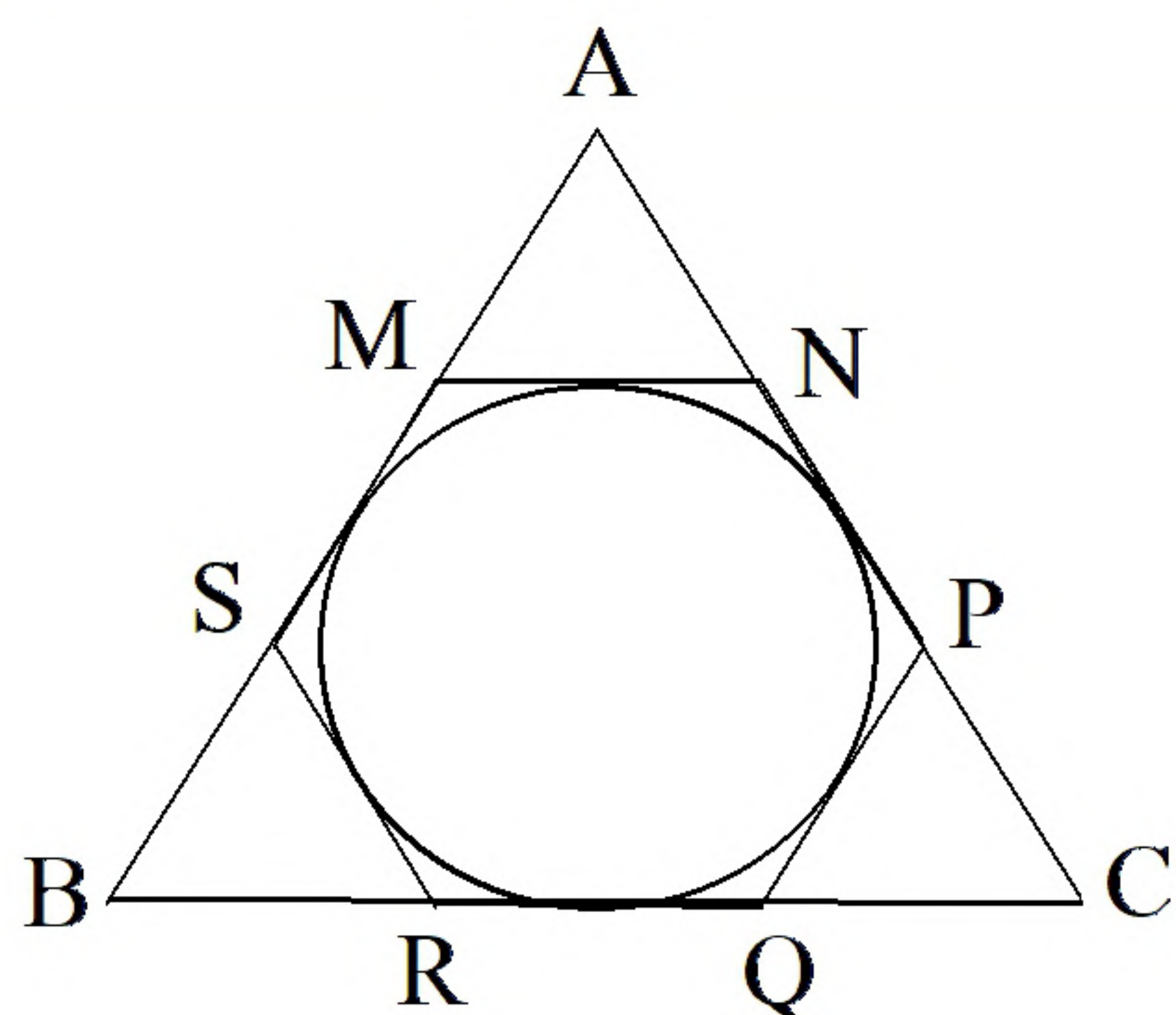
$$\cos \alpha = \frac{OP}{OM} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{MP} = \frac{2OP}{OM} \quad \text{از (1) و (2)}$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OMP می‌نویسیم:



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



مطابق شکل شش ضلعی MNPQRS که درون مثلث ABC محاط شده است، بر دایره محاطی داخلی این مثلث، محیط است. بنابراین کافی است شعاع دایره محاطی داخلی مثلث ABC را محاسبه کرده و سپس طول هر ضلع شش ضلعی منتظم محیطی این دایره را به دست آوریم.

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

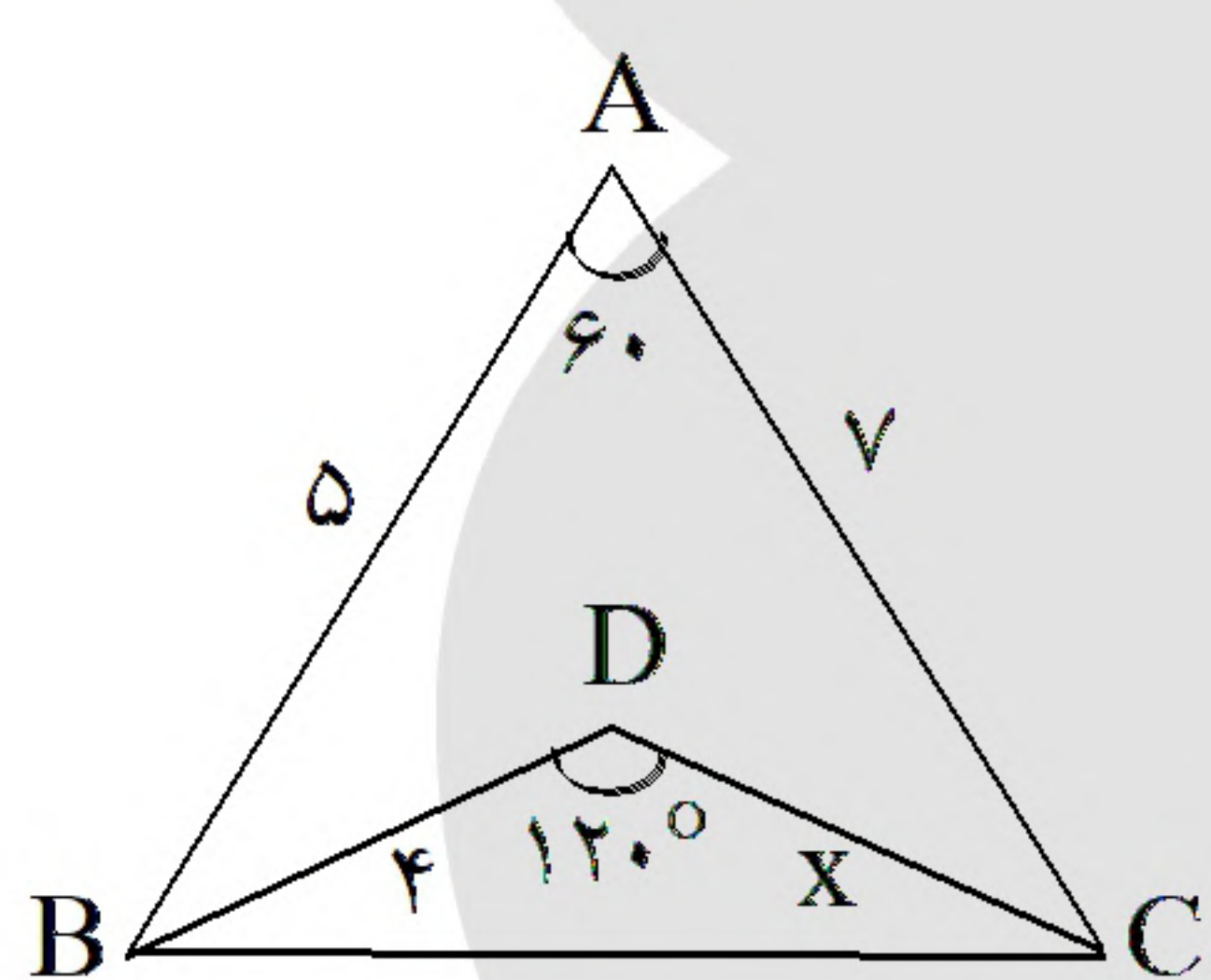
$$r = \frac{S}{p} = \frac{84}{21} = 4$$

$$MN = 2r \tan \frac{180^\circ}{6} = 2 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

توجه کنید شش ضلعی منتظم در مثلث ABC محاط شده است پس مثلث ABC متساوی الاضلاع باید باشد که خلاف فرض سؤال است و اگر منتظم در نظر گرفته نشود هر ضلع آن هر اندازه‌ای می‌تواند داشته باشد.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از B به C وصل کرده با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌نویسیم.



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = 25 + 49 - 2(5)(7)\left(\frac{1}{2}\right) = 39$$

$$\triangle BDC : BC^2 = BD^2 + DC^2 - 2BD \times DC \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 39 = 16 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 39 = 16 + x^2 + 4x$$

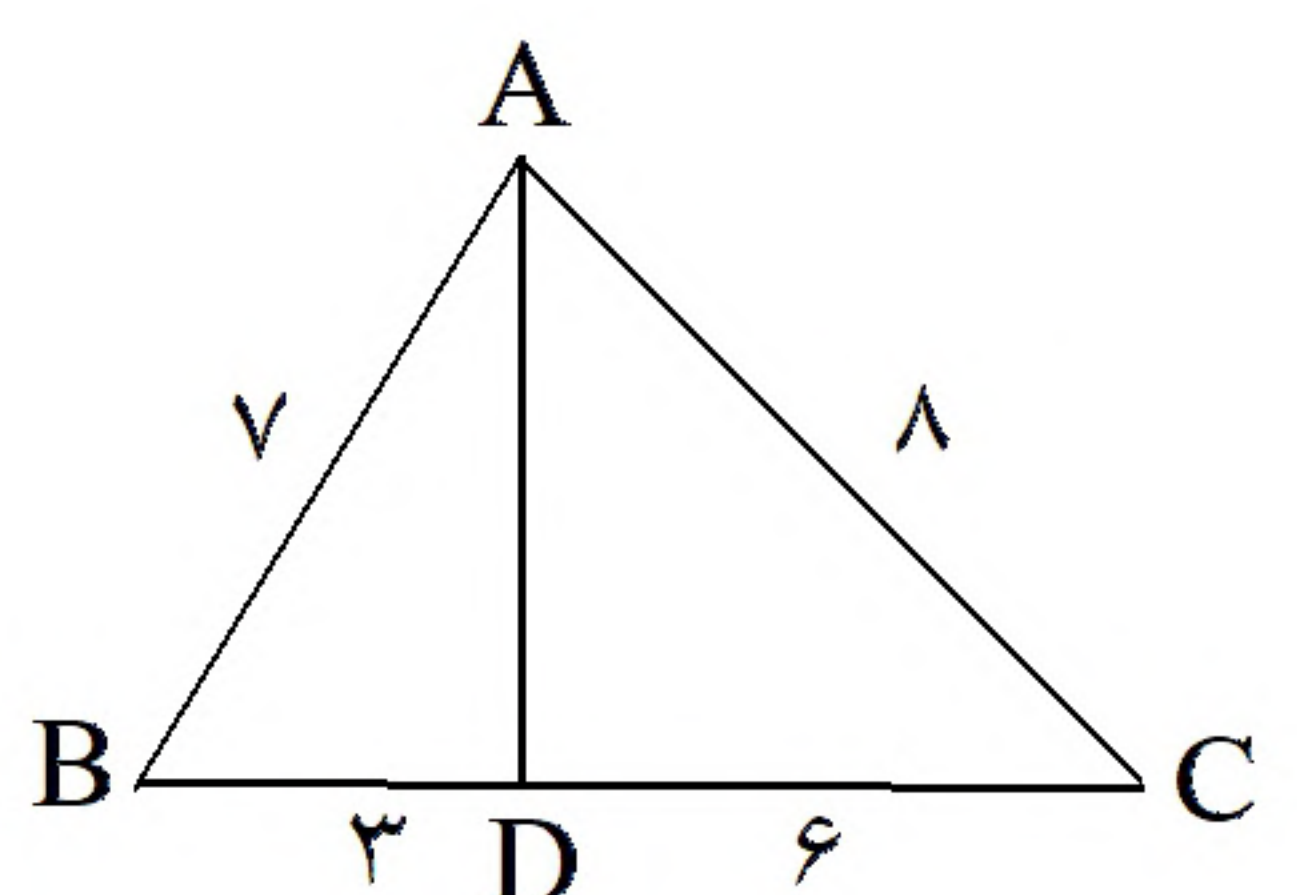
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 23 = 0$$

این معادله را با فرمول b' حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 23}}{1} = -2 \pm \sqrt{27}$$

مسئله $x = -2 - \sqrt{27}$ قابل قبول نیست پس $x = -2 + \sqrt{27}$ بنابراین $x + 2 = \sqrt{27}$.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت داریم.



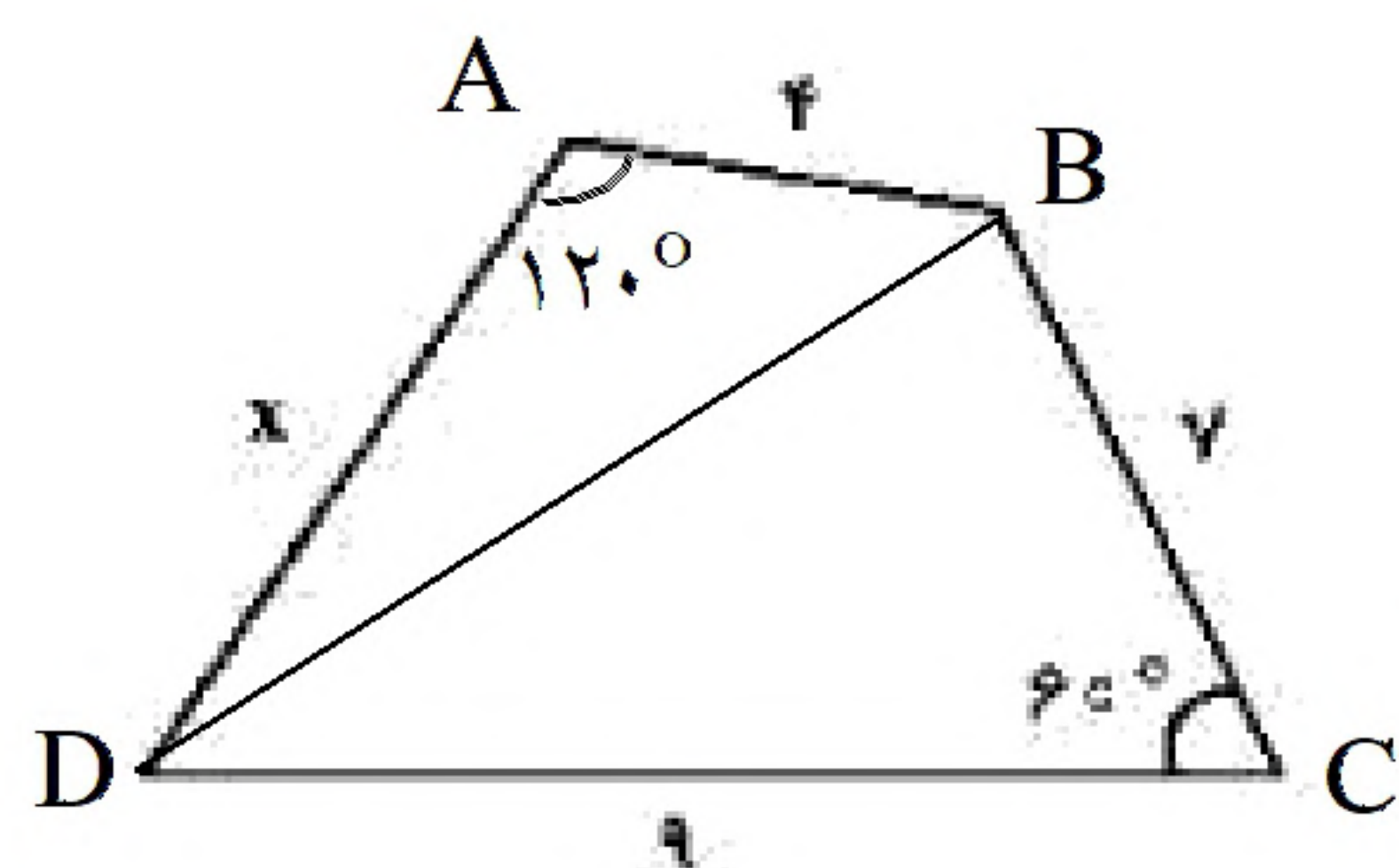
$$AB^2 \times DC + AC^2 \times BD = AD^2 \times BC + BD \times DC \times BC$$

$$\Rightarrow 49 \times 6 + 64 \times 3 = AD^2 \times 9 + 3 \times 6 \times 9 \xrightarrow{\div 3} 49 \times 2 + 64$$

$$= AD^2 \times 3 + 6 \times 9 \Rightarrow 162 = 3AD^2 + 54 \Rightarrow AD^2 = 36 \Rightarrow AD = 6$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چهارضلعی ABCD محاطی است پس زاویه‌های مقابل آن مکمل‌اند پس $\hat{A} = 120^\circ$. با رسم قطر BD و استفاده از قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:



$$\triangle BDC : BD^2 = BC^2 + DC^2 - 2BC \times DC \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow BD^2 = 49 + 81 - 2(7)(9)\left(\frac{1}{2}\right) = 67 \Rightarrow BD = \sqrt{67}$$

$$\triangle ABD : BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow 67 = 16 + x^2 - 2(4)(x)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

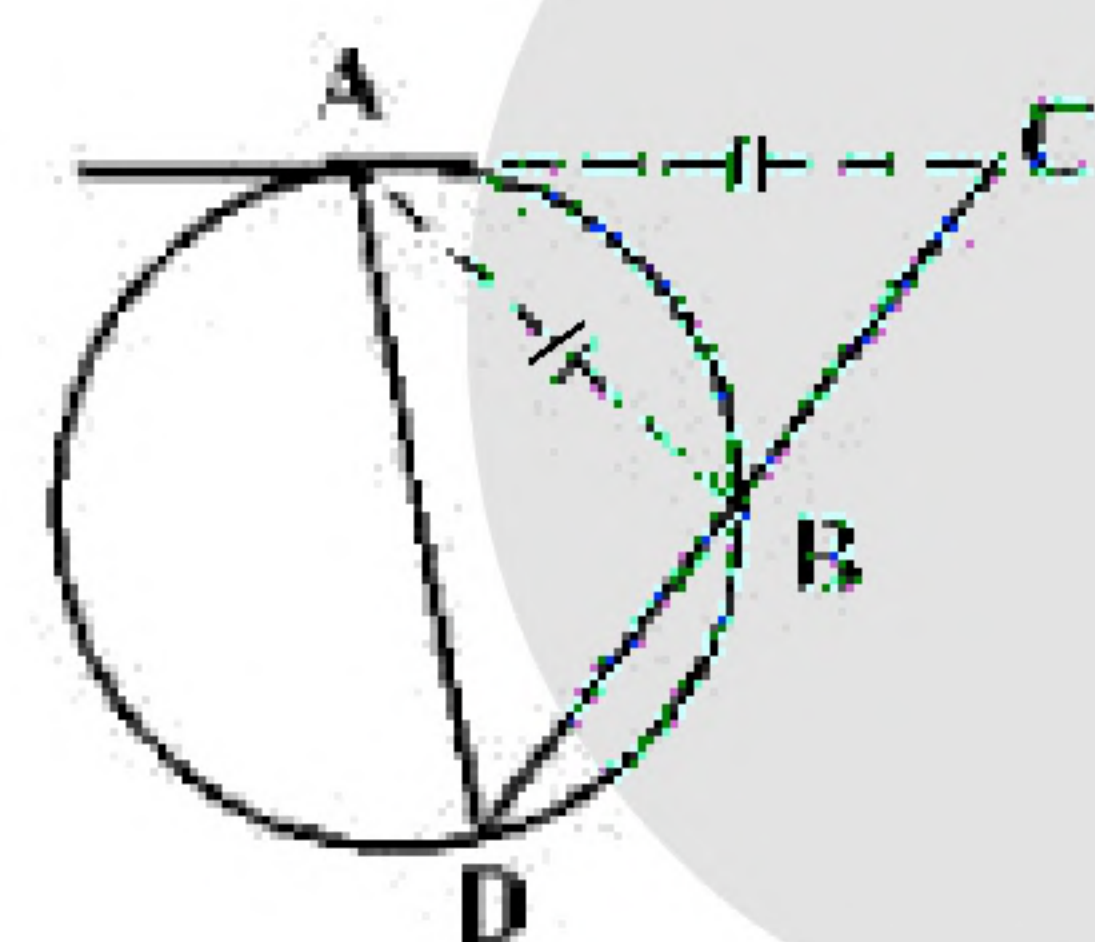
$$67 = 16 + x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x - 51 = 0$$

جواب‌های این معادله را از دستور b' به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 51}}{1} \Rightarrow x = -2 + \sqrt{55}$$

بنابراین $x + 2$ مساوی $\sqrt{55}$ است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی تساوی $CA^2 = CB \times CD$ برقرار است و بنابر قضیه‌ی استوارت در مثلث ADC می‌نویسیم:



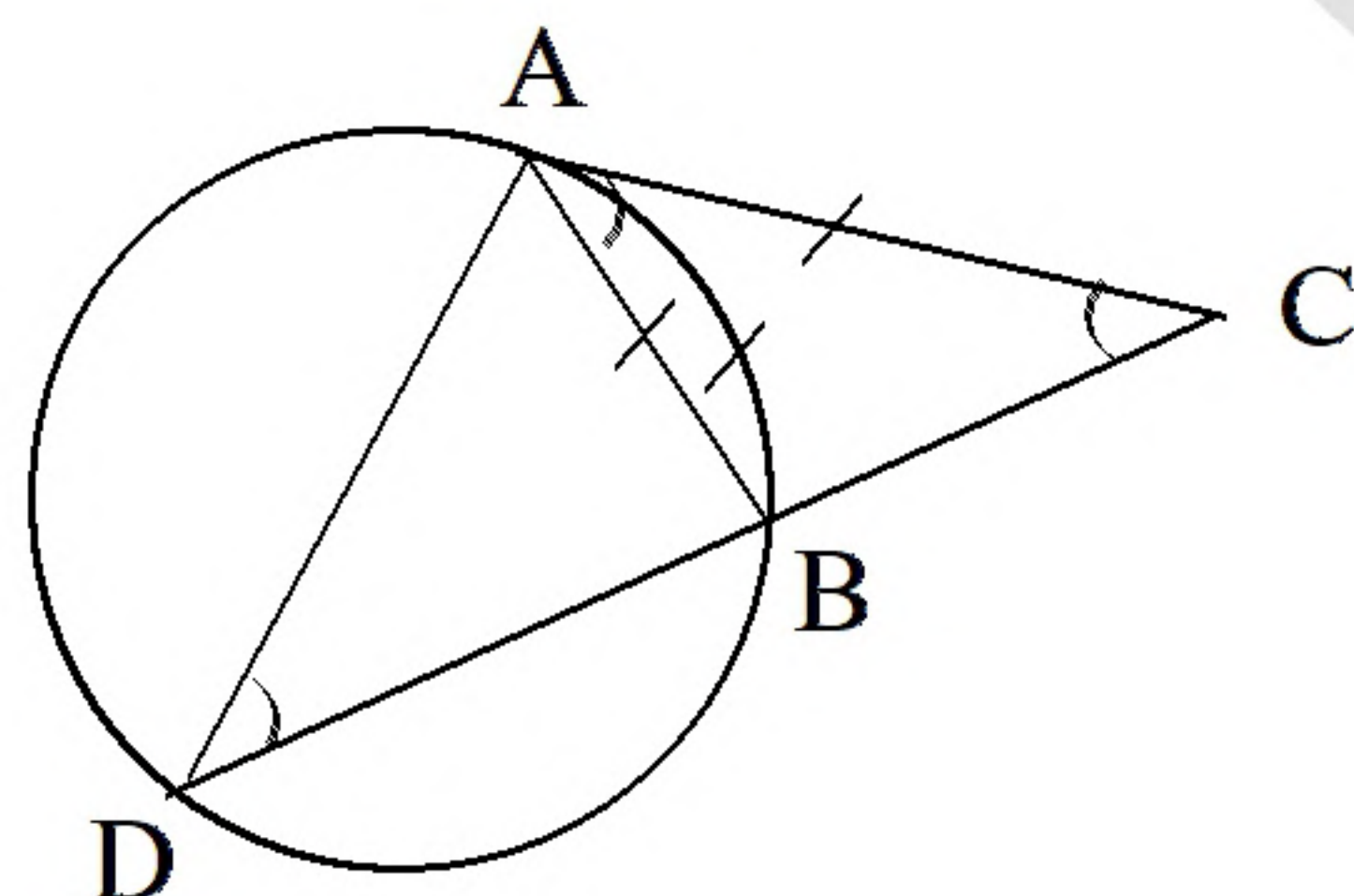
$$AC^2 \times BD + AD^2 \times BC = AB^2 \times DC + BD \times BC \times DC$$

$$\frac{AC^2 = CB \times CD}{AB = AC} \rightarrow CB \times \cancel{CD} \times BD + AD^2 \times BC$$

$$= CB \times CD \times DC + BD \times \cancel{BC} \times DC \Rightarrow AD^2 \times BC$$

$$= CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^2 = CD^2 \Rightarrow AD = CD$$

راه حل دوم: دو زاویه‌ی ظلی A_1 و زاویه‌ی محاطی D برابرند زیرا:

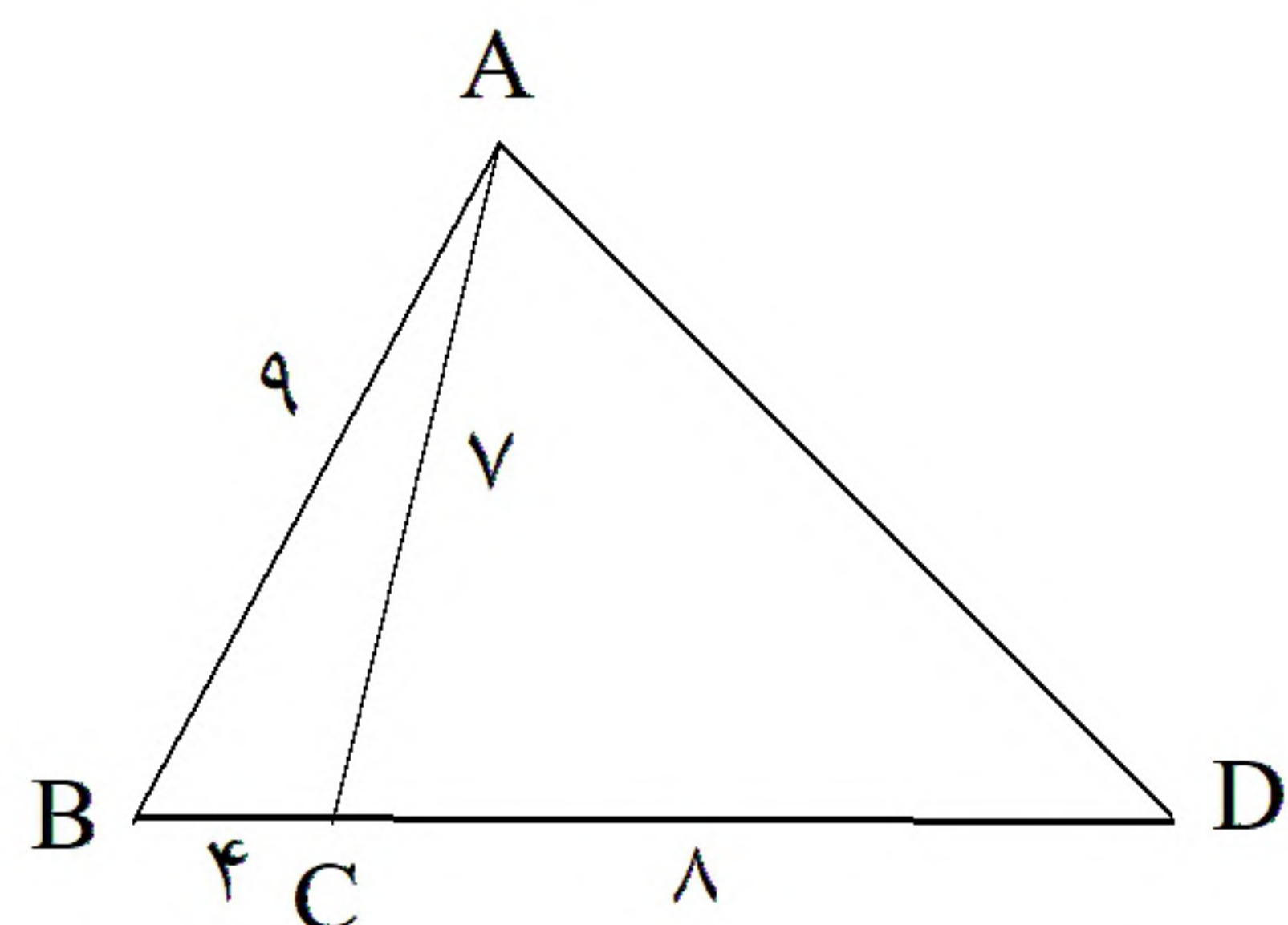


$$\left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ ظلی} \\ \hat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{A}_1 = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(ز ز)} \triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB = AC} AD = DC$$



۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی استوارت می‌نویسیم:

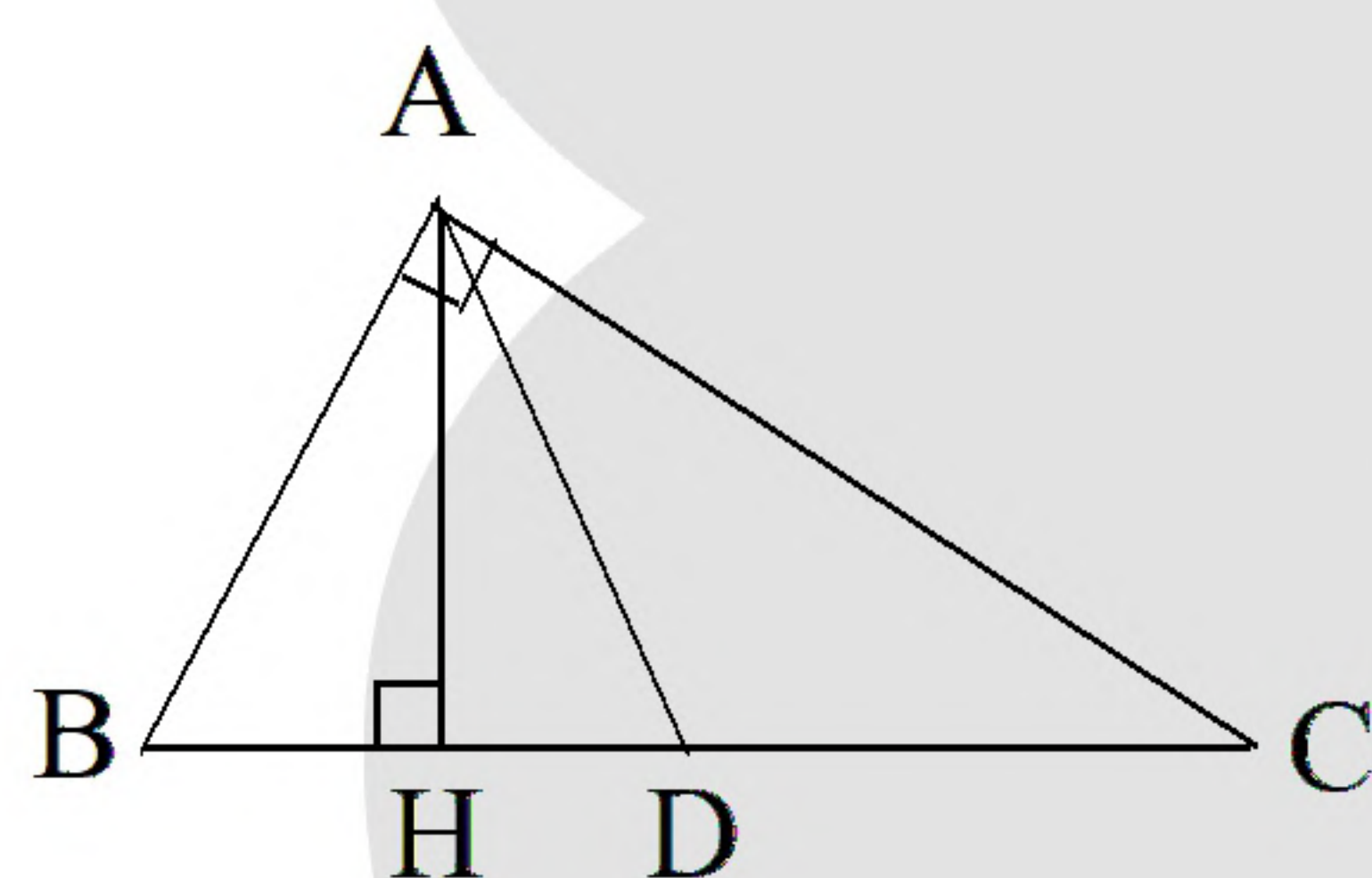


$$AB^2 \times CD + AD^2 \times BC = AC^2 \times BD + BC \times CD \times BD$$

$$\Rightarrow 81 \times 8 + 4AD^2 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12 \xrightarrow{\div 4}$$

$$162 + AD^2 = 147 + 96 \Rightarrow AD^2 = 81 \Rightarrow AD = 9$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \Rightarrow BC = 5$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow 9 = BH \times 5 \Rightarrow BH = \frac{9}{5}$$

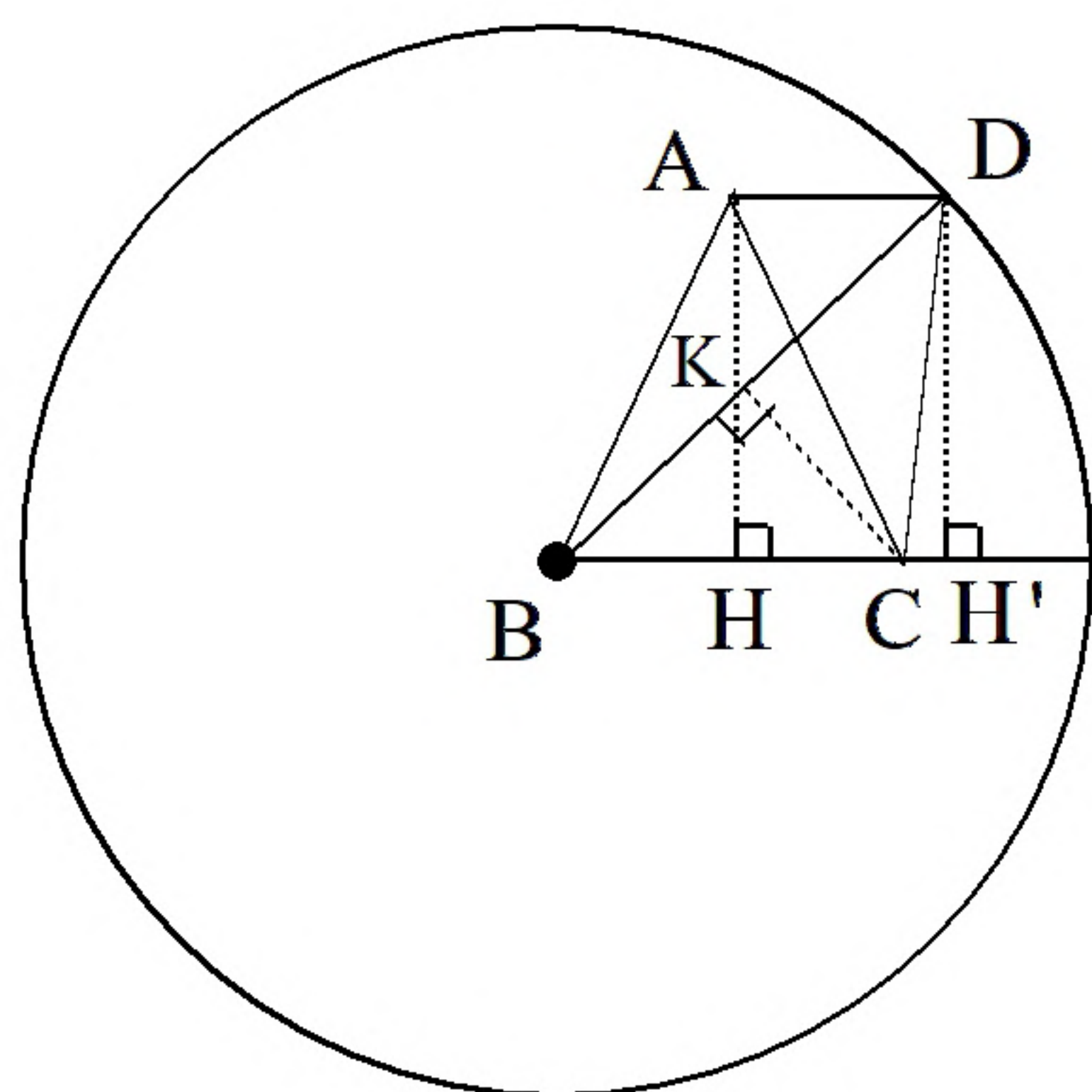
از طرفی طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BD + DC} = \frac{3}{4 + 3} \Rightarrow \frac{BD}{5} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{7}$$

$$DH = BD - BH = \frac{15}{7} - \frac{9}{5} = \frac{75 - 63}{35} = \frac{12}{35}$$



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مثلث ABC متساوی الساقین است، بنابراین ارتفاع AH ، میانه نظیر ضلع BC نیز هست و داریم:



$$\triangle AHB: AH^2 = AB^2 - BH^2 = 17^2 - 8^2 = 225 \Rightarrow AH = 15$$

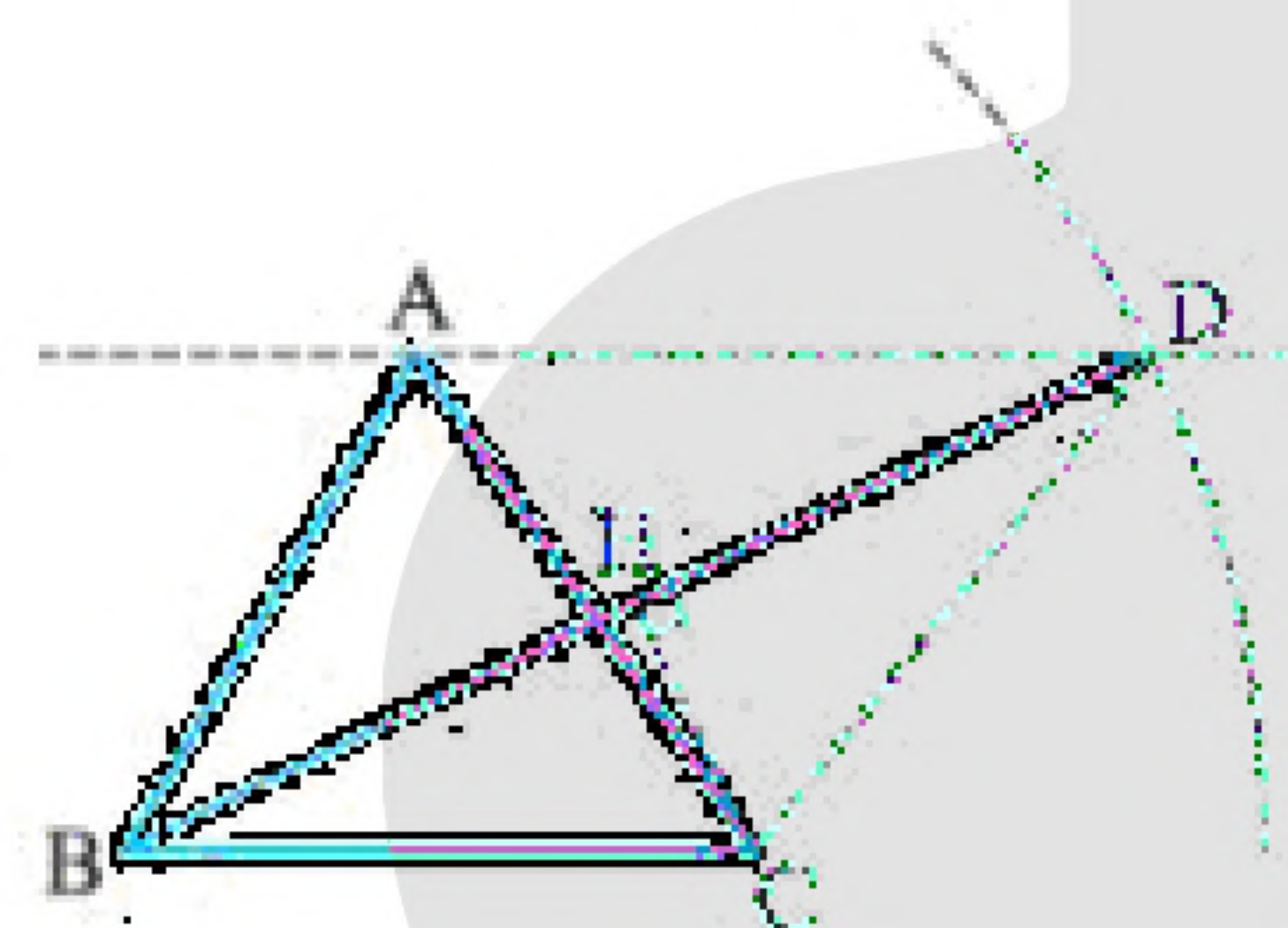
اگر پای ارتفاع وارد از نقطه C بر پاره خط BD را K بنامیم، آنگاه داریم:

$$\left. \begin{aligned} S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} CK \times BD \\ S_{\triangle BCD} &= \frac{1}{2} DH' \times BC \end{aligned} \right\} \Rightarrow CK \times BD = DH' \times BC$$

$$\Rightarrow CK \times 25 = 15 \times 16 \Rightarrow CK = \frac{240}{25} = 9/6$$

دقت کنید که AH و DH' فاصله دو خط موازی AD و BC هستند و برابر یکدیگرند.
روش دوم:

دو مثلث ABC و BCD در قاعده BC مشترک و ارتفاع برابر دارند، پس مساحت آن‌ها برابر است. طبق قضیه هرون داریم:



$$P = \frac{17 + 17 + 16}{2} = 25$$

$$S_{ABC} = \sqrt{25(25-17)(25-17)(25-16)} \\ = \sqrt{25 \times 8 \times 8 \times 9} = 5 \times 8 \times 3 = 120$$

پس $S_{BCD} = 120$ ، اگر CH بر BD عمود باشد، داریم:

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} BD \times CH \Rightarrow 120 = \frac{1}{2} \times 25 \times CH \Rightarrow CH = \frac{240}{25} = 9/6$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. قطر AC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ADC می‌نویسیم:

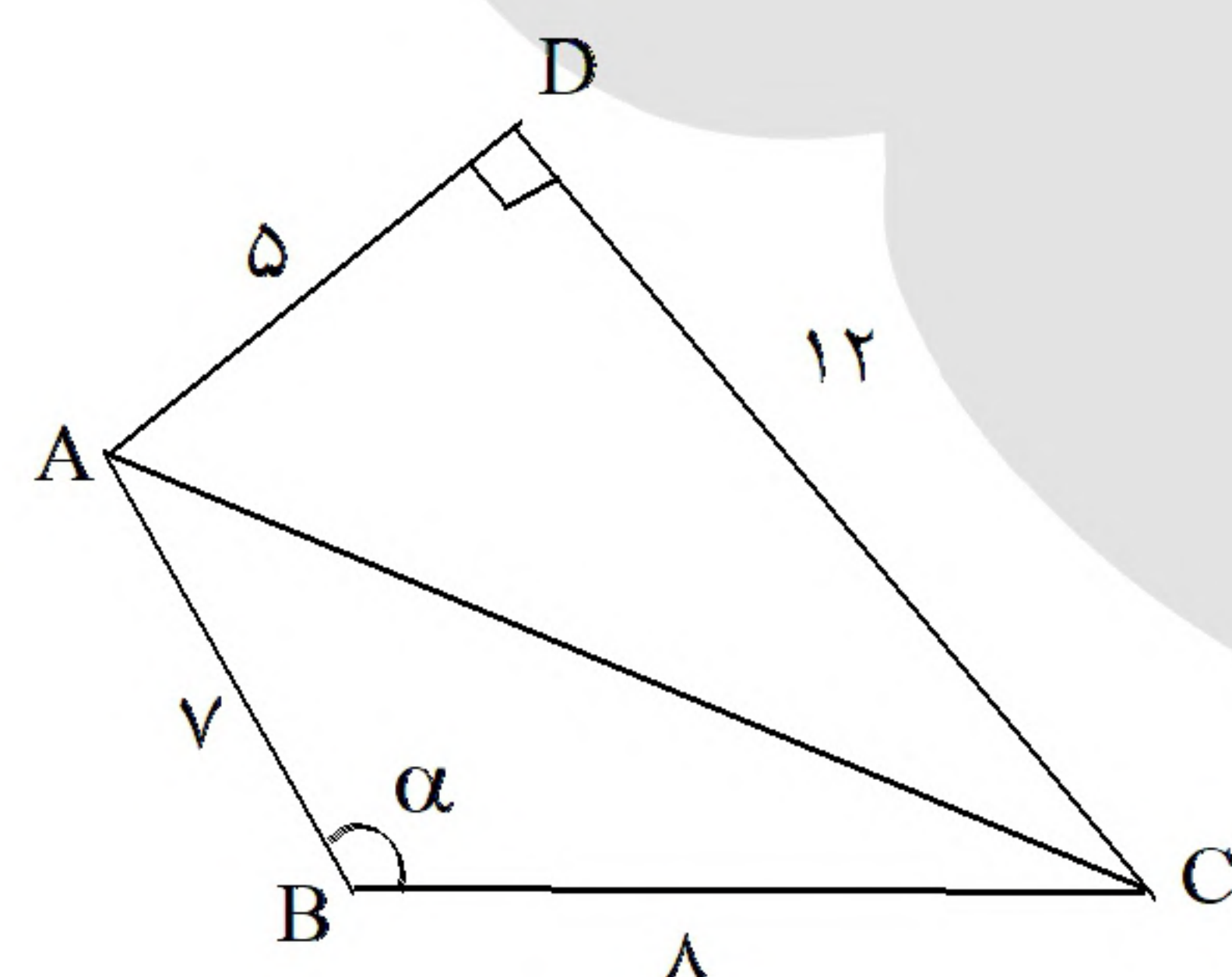
$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow AC = 13$$

حال با استفاده از قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC می‌توان نوشت.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \alpha$$

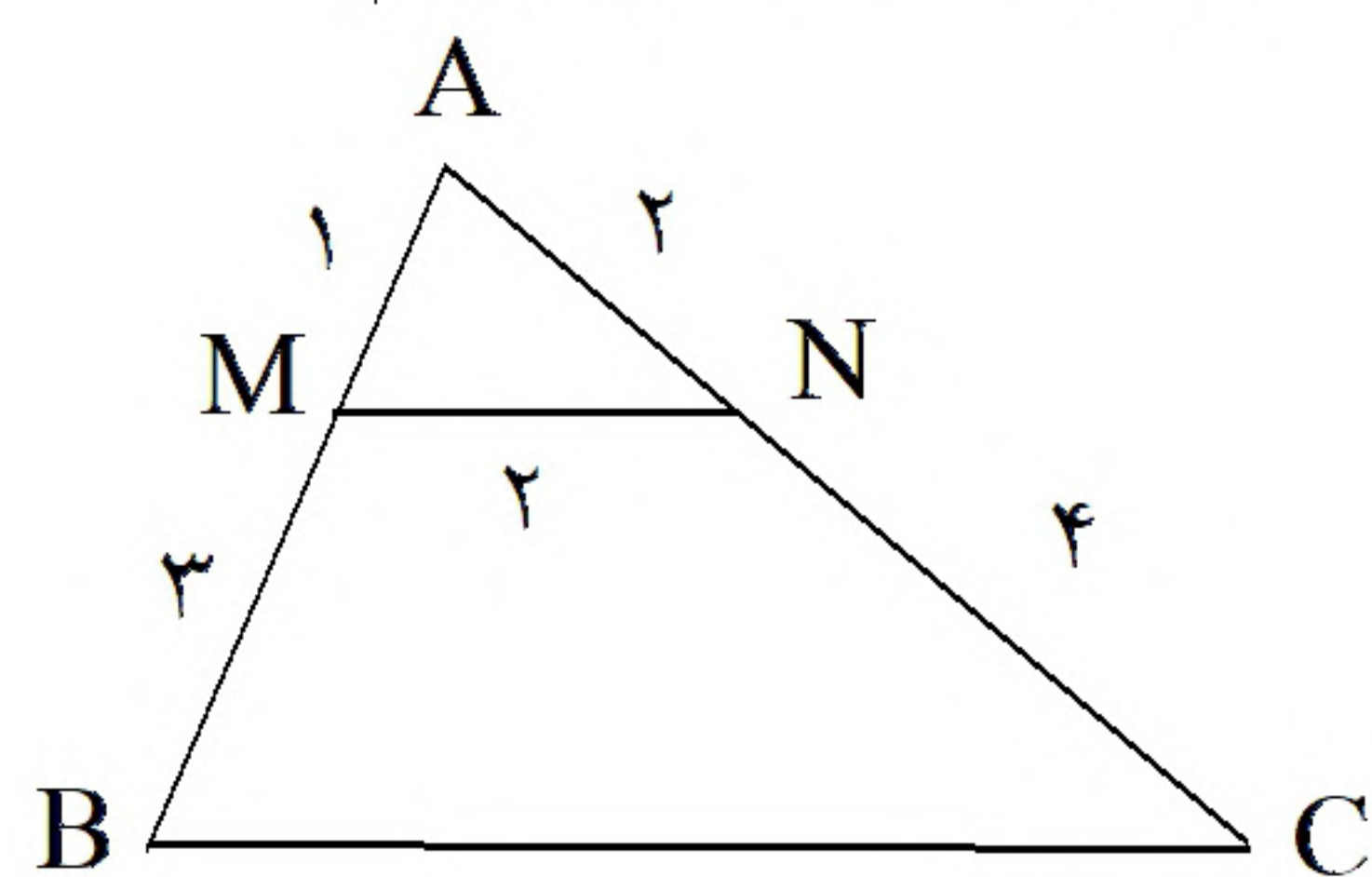
$$\Rightarrow 13^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\text{بنابراین } \alpha = 120^\circ \text{ در نتیجه } \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$





۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه ی کسینوس ها در مثلث AMN زاویه ی A را به دست می آوریم:



$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos A$$

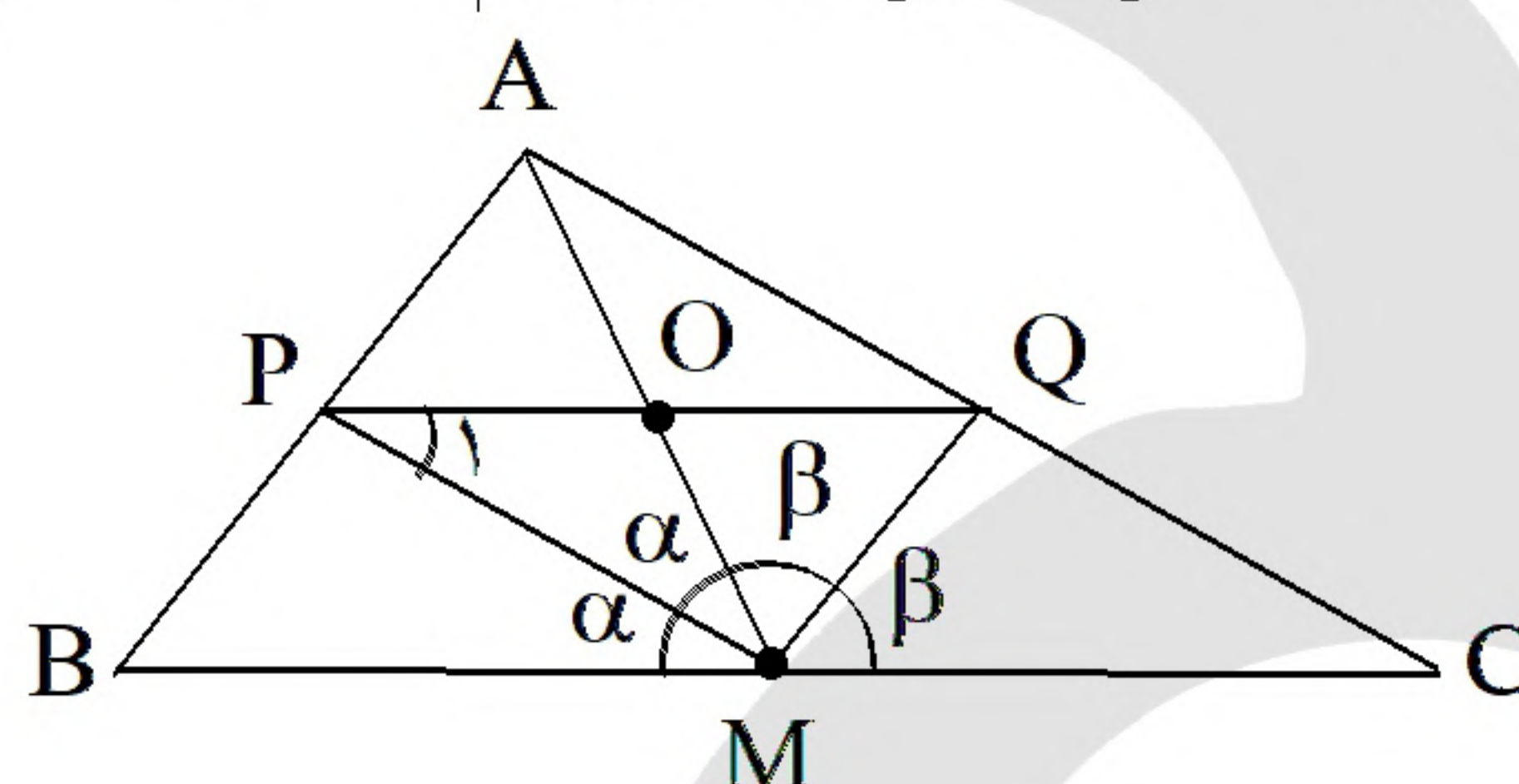
$$4 = 1 + 4 - 2(1)(2) \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{1}{4}$$

حال از قضیه ی کسینوس ها در مثلث ABC استفاده می کنیم.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A \Rightarrow BC^2 = 16 + 36 - 2(4)(6) \left(\frac{1}{4}\right) = 40$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت:



بنابر قضیه ی نیمساز می نویسیم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AMB : \text{نیمساز } MP \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AM}{BM} \\ \triangle AMC : \text{نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{MC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$$

$$PQ \parallel BC \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{قضیه خطوط مورب}} \hat{P}_1 = \alpha \Rightarrow OM = OP$$

در نتیجه: