

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



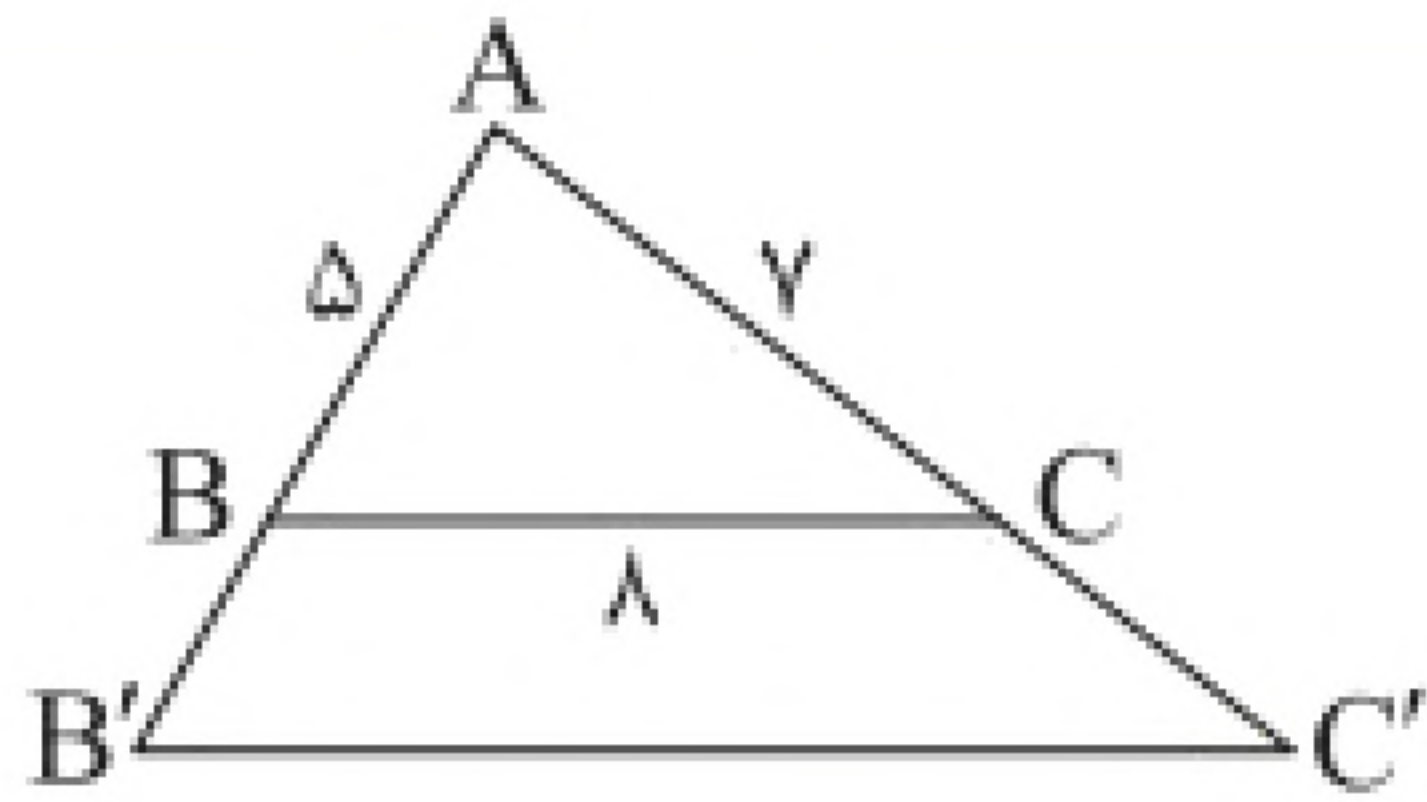
	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت و مثلث $AB'C'$ مجانس مثلث ABC به مرکز A و نسبت $\frac{3}{2}$ است. پس این دو مثلث با نسبت $\frac{3}{2}$ متشابه هستند.



بنابراین:

$$\frac{S_{\Delta AB'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \xrightarrow[\text{از صورت}]{\text{تفضیل}} \frac{S_{BCC'B'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{5}{4} \quad (1)$$

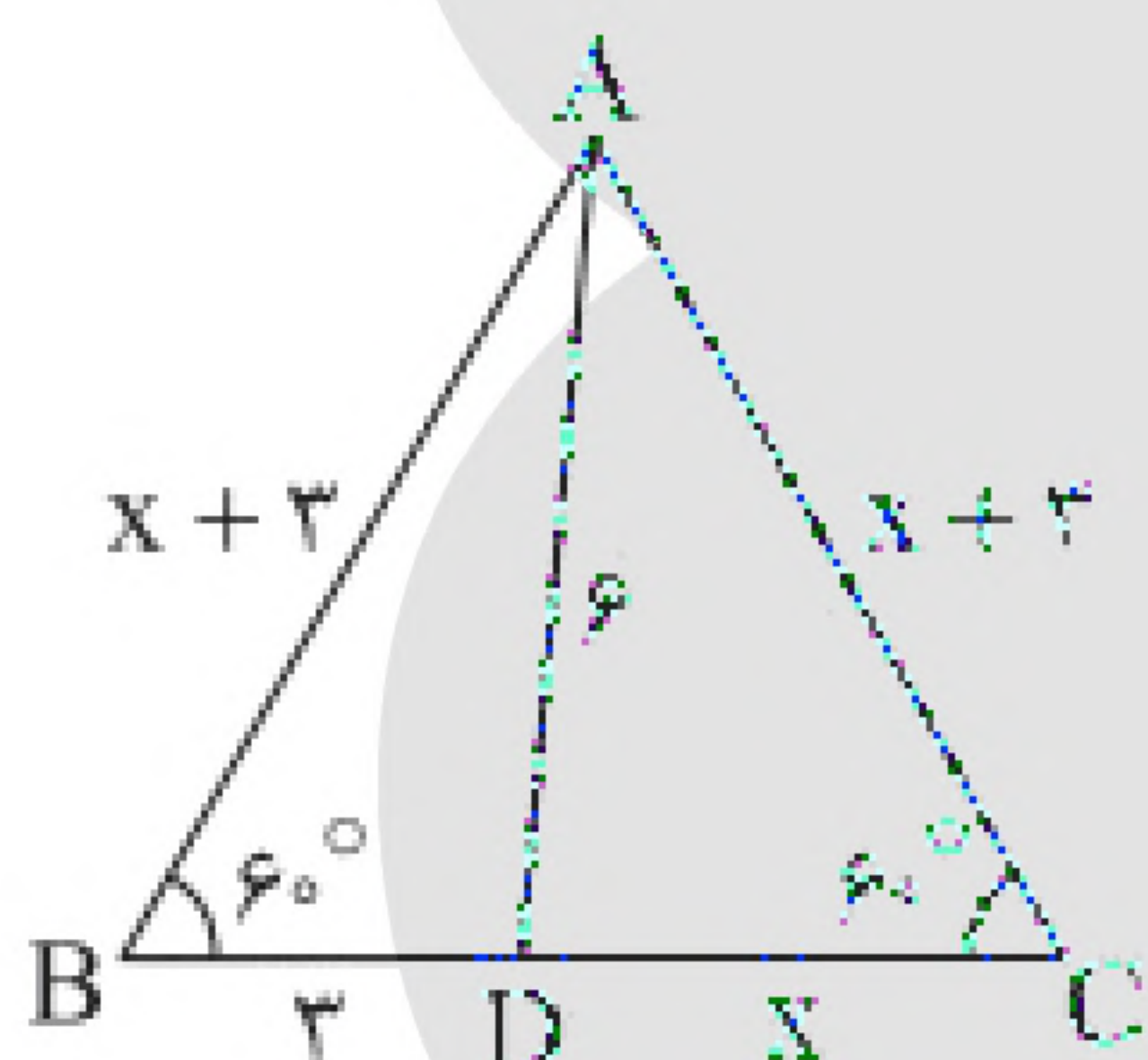
اکنون مساحت مثلث ABC را با رابطه‌ی هران به دست می‌آوریم.

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{10 \times 2 \times 3 \times 5} = 10\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} S_{BCC'B'} = \frac{5}{4} \times S_{\Delta ABC} = \frac{5}{4} \times 10\sqrt{3} = \frac{25}{2}\sqrt{3}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از فرض $AD = 2BD = 6$ نتیجه می‌گیریم: $BD = 3$ و $AD = 6$.
در صورتی که $DC = x$ باشد آنگاه $AB = AC = BC = x + 3$.
به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:



$$\Delta ADB : AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \times BD \cos 60^\circ$$

$$6^2 = (x+3)^2 + 3^2 - 2(x+3)(3)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$36 = x^2 + 9 + 6x + 9 - 3x - 9$$

$$x^2 + 3x - 27 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = 27 \quad (1)$$

اکنون مساحت مثلث ADC را به دست می‌آوریم.

$$S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} AC \times DC \sin \hat{C} = \frac{1}{2} (x+3)(x) \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (x^2 + 3x) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} S_{\Delta ADC} = \frac{1}{2} (27) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{27}{4}\sqrt{3}$$



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با رسم قطر AC چهارضلعی ABCD به دو مثلث ABC و ADC تقسیم می‌شود.

$$\triangle ABC : AC^2 = AB^2 + BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow AC = 10$$

اکنون مساحت هر دو مثلث ABC و ADC را پیدا می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} (6)(8) = 24$$

$$S_{\triangle ADC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{5+7+10}{2} = 11$$

$$\rightarrow S_{\triangle ADC} = \sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)}$$

$$= \sqrt{11 \times 6 \times 4 \times 1} = 2\sqrt{66}$$

بنابراین:

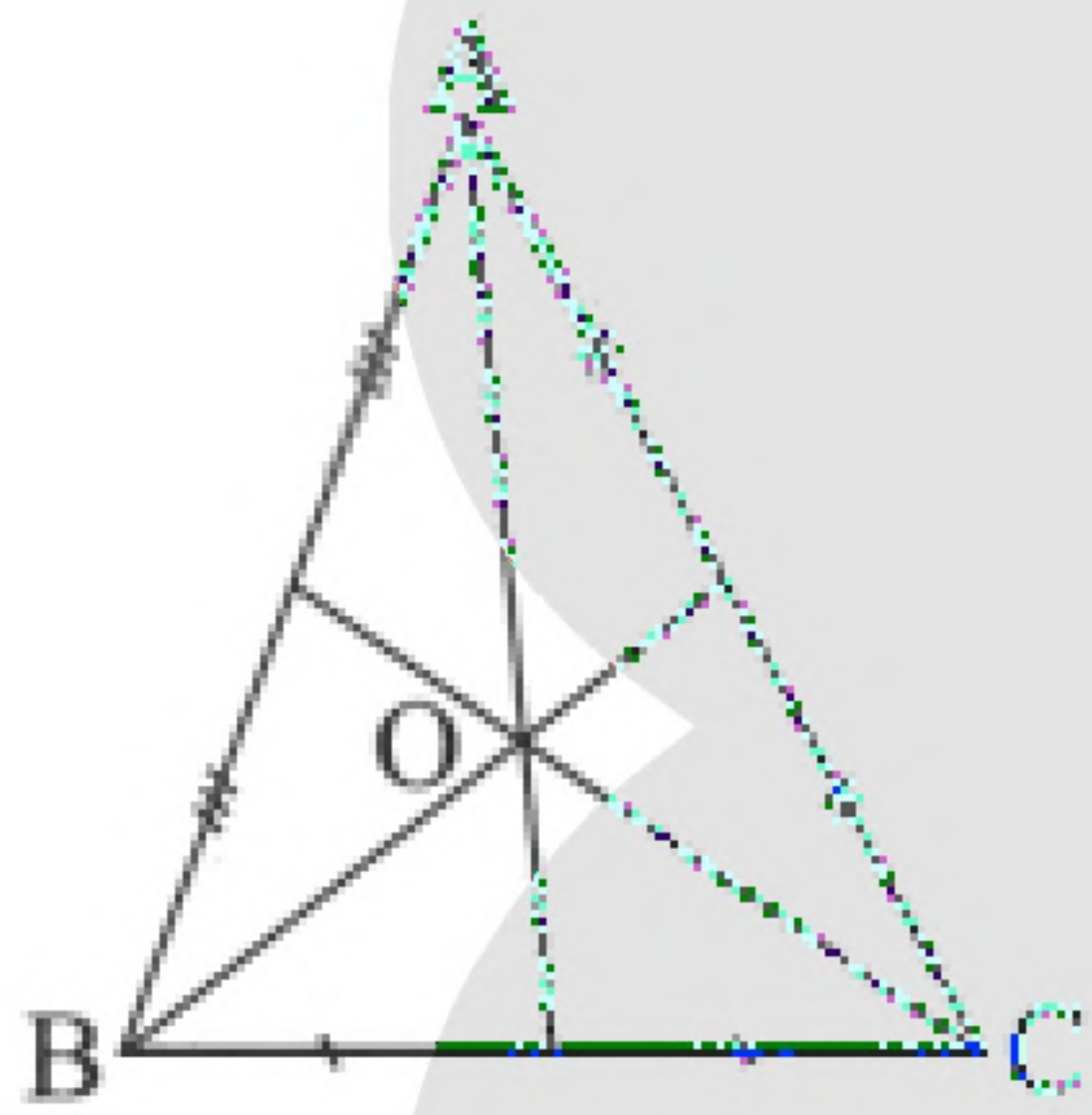
$$S_{ABCD} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ABC} = 24 + 2\sqrt{66}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با رسم سه میانه‌ی مثلث، این مثلث به ۶ مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌شود، مساحت مثلث

AOC، $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است. کافی است مساحت مثلث ABC را به کمک

قضیه‌ی هرون به دست آوریم.



$$P = \frac{5+6+9}{2} = 10$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{10(10-5)(10-9)(10-6)}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \sqrt{10 \times 5 \times 1 \times 4} = \sqrt{2 \times 5 \times 5 \times 1 \times 4} = 10\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با فرض $AD = x$ و با استفاده از قضیه‌ی نیمساز زاویه‌ی داخلی می‌نویسیم:

$$\triangle ADC : \text{نیمساز } DE \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{DC} \Rightarrow DC = 2x$$

$$\triangle ABC : \text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{2x} = \frac{3}{6} \Rightarrow BD = x$$

اکنون با استفاده از رابطه‌ی طول نیمساز داخلی داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow x^2 = 3 \times 6 - x \times 2x$$

$$\Rightarrow x^2 = 18 - 2x^2 \Rightarrow 3x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$



۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

پاره خط AM نیمساز زاویه A است. با استفاده از قضیه طول نیمساز زاویه داخلی داریم:

$$AM = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \quad \begin{matrix} b=6, c=4 \\ \hat{A}=60^\circ \end{matrix} \rightarrow AM = \frac{2(6)(4)}{6+4} \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow AM = \frac{2(6)(4)}{10} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{5} \sqrt{3}$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با استفاده از قضیه نیمساز می نویسیم:

$$\text{نیمساز } AD \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{6} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BD}{BC} = \frac{5}{11} \quad (1)$$

از طرف دیگر دو مثلث ABD و ABC دارای ارتفاع مشترک از رأس A هستند پس نسبت مساحت‌های این دو مثلث برابر با نسبت قاعده‌های نظیرشان است.

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{BD}{BC} \xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5}{11}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

به کمک قضیه استوارت در مثلث ABC ابتدا طول ضلع AB را به دست می آوریم.

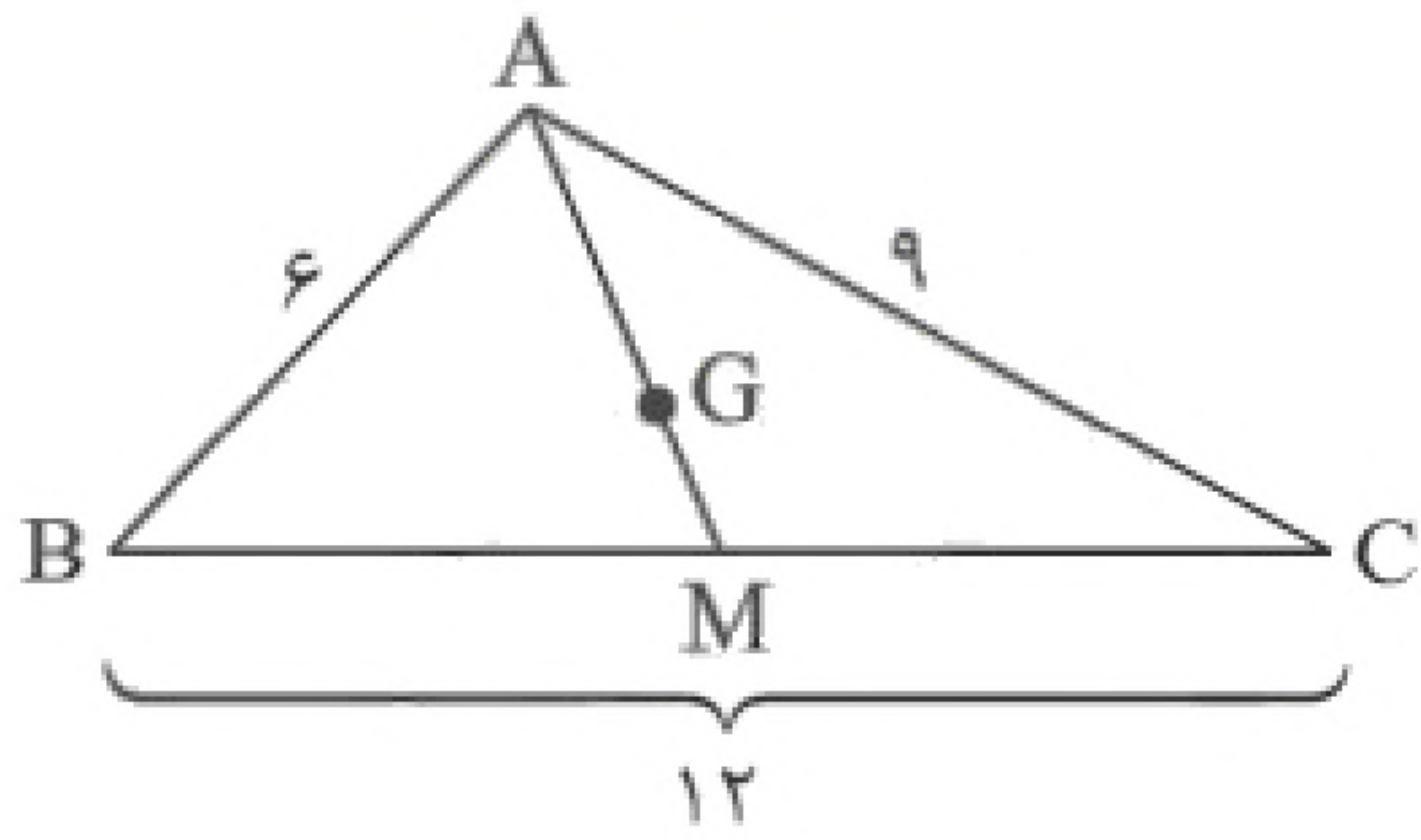
$$AB^2 \times DC + BC^2 \times AD = BD^2 \times AC + AD \times DC \times AC$$

$$\Rightarrow AB^2 \times 3 + 49 \times 1 = 25 \times 4 + 1 \times 3 \times 4$$

$$\Rightarrow 3AB^2 = 63 \Rightarrow AB^2 = 21 \Rightarrow AB = \sqrt{21}$$

بنابراین:

$$ABD \text{ محیط مثلث} = AB + BD + AD = \sqrt{21} + 5 + 1 = \sqrt{21} + 6$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض سؤال، شکل مقابل را داریم:

می‌دانیم میانه‌ی وارد بر بزرگ‌ترین ضلع، کوچک‌ترین میانه است. پس میانه‌ی AM وارد بر ضلع BC (بزرگ‌ترین ضلع مثلث ABC) کوچک‌ترین میانه است و اگر G نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها باشد آنگاه GA کمترین فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی میانه‌ها تا رأس این مثلث است در ضمن $GA = \frac{2}{3}AM$ است پس باید طول

میانه‌ی AM را به کمک قضیه‌ی میانه‌ها به دست آوریم.

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 6^2 + 9^2 = 2AM^2 + \frac{12^2}{2}$$

$$\Rightarrow 36 + 81 = 2AM^2 + 72$$

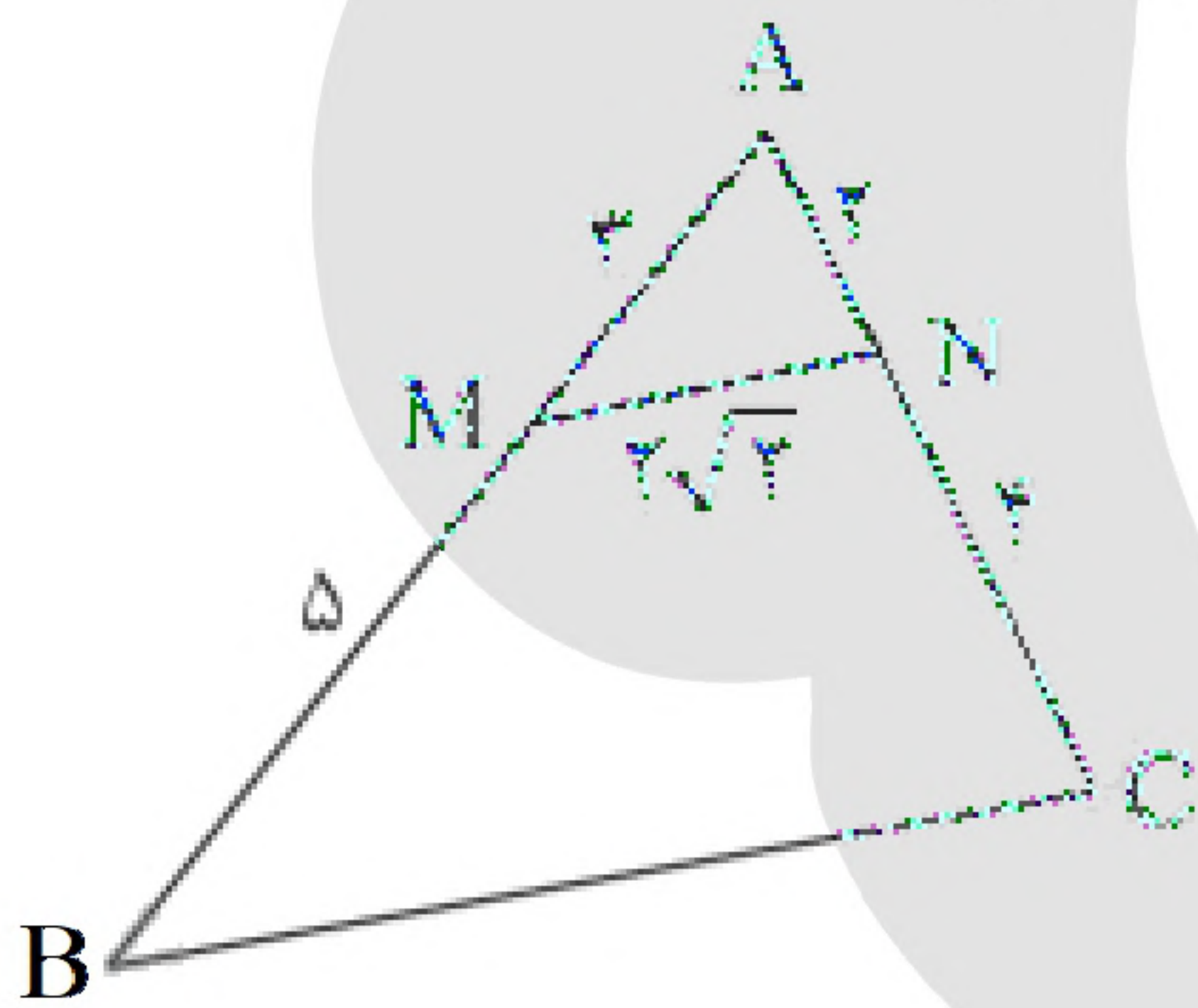
$$\Rightarrow 2AM^2 = 45 \Rightarrow AM^2 = \frac{45}{2} \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{45}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{10}$$

بنابراین:

$$GA = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}\sqrt{10} \right) = \sqrt{10}$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث AMN ، مقدار $\cos \hat{A}$ را به دست می‌آوریم.



$$\triangle AMN : MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 8 = 9 + 4 - 2(3)(2) \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{5}{12}$$

اکنون $\sin \hat{A}$ را پیدا می‌کنیم تا به کمک مساحت سینوسی، مساحت چهارضلعی را پیدا کنیم.

$$\sin \hat{A} = \sqrt{1 - \cos^2 \hat{A}} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{25}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$$

بنابراین:

$$S_{BMNC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}AB \times AC \sin \hat{C} - \frac{1}{2}AM \times AN \sin \hat{A}$$

$$= \frac{1}{2}(8)(6) \left(\frac{\sqrt{119}}{12} \right) - \frac{1}{2}(3)(2) \left(\frac{\sqrt{119}}{12} \right) = 2\sqrt{119} - \frac{\sqrt{119}}{4} = \frac{7}{4}\sqrt{119}$$

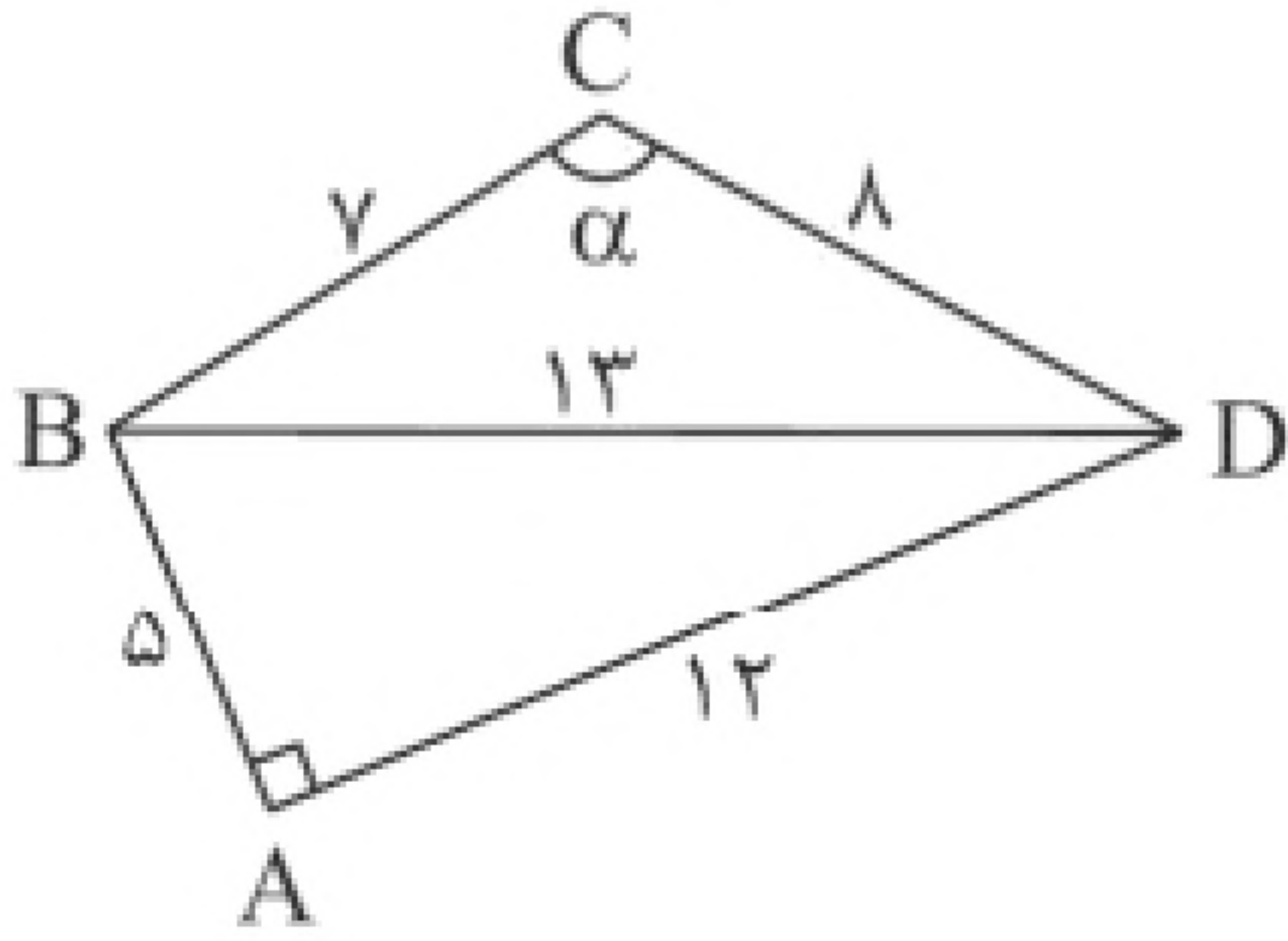


۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بنابر داده‌های روی شکل، مثلث ABD قائم‌الزاویه است. پس:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2$$

$$= 5^2 + 12^2 = 169 \Rightarrow BD = 13$$



حال با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \cos \hat{C}$$

$$13^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos \alpha$$

$$169 = 49 + 64 - 112 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

بنابراین: $\tan \alpha = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با استفاده از داده‌ی سؤال فرض کنیم در مثلث ABC داشته باشیم $AB = 9$ و $AC = 5$. در این صورت داریم:

$$\text{محیط} = 21 \Rightarrow AB + AC + BC = 21 \Rightarrow 9 + 5 + BC = 21 \Rightarrow BC = 7$$

از آنجا که $AB = 9$ بزرگ‌ترین ضلع است پس زاویه‌ی مقابل آن یعنی زاویه‌ی \hat{C} بزرگ‌ترین زاویه است. اکنون با استفاده از قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \times BC \cos \hat{C}$$

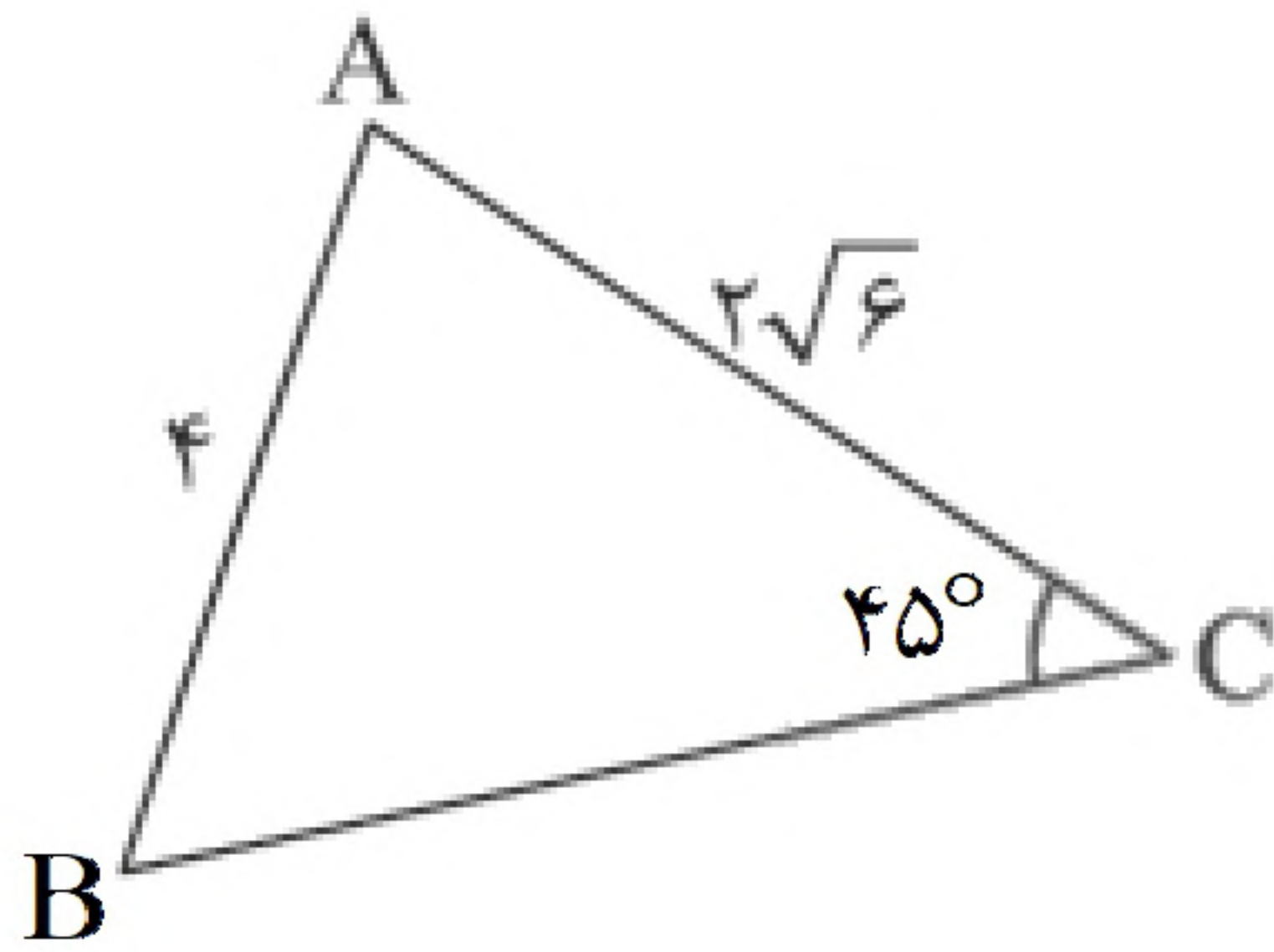
$$9^2 = 5^2 + 49 - 70 \cos \hat{C} \Rightarrow \cos \hat{C} = -\frac{1}{2}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ابتدا به کمک قضیه سینوسها اندازهی زاویهی \hat{B} را به دست می‌آوریم.



$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin \hat{B}} = \frac{4}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{\sin \hat{B}} = \frac{4}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

بنابراین $\hat{B} = 60^\circ$ یا $\hat{B} = 120^\circ$ خواهد بود. (توجه کنید! معادلهی $\sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ دو دسته جواب دارد.)

حالت اول: $\hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

حالت دوم: $\hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم مجموع زاویه‌های مثلث 180° است. پس:

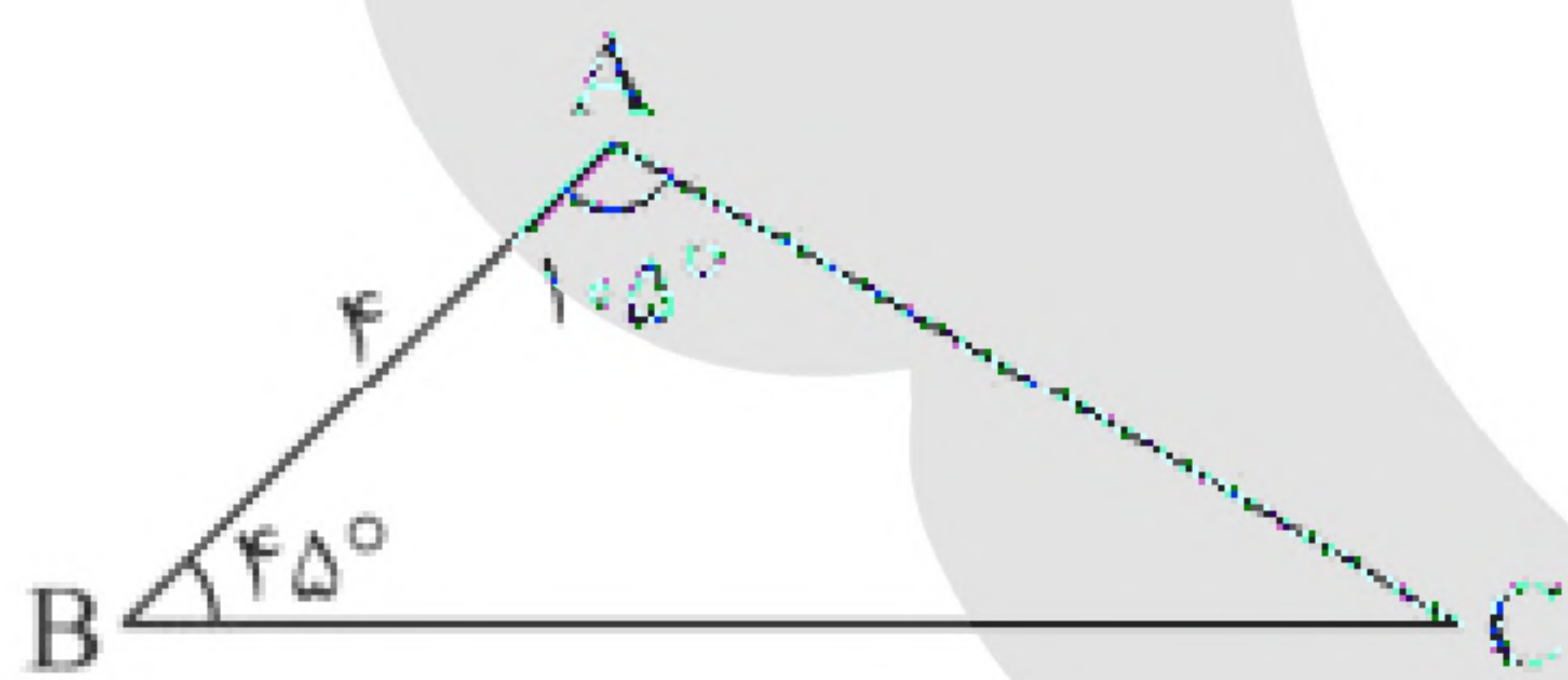
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 105^\circ + 45^\circ + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

اندازه‌های AB و \hat{C} را داریم پس با استفاده از قضیه سینوسها می‌نویسیم:

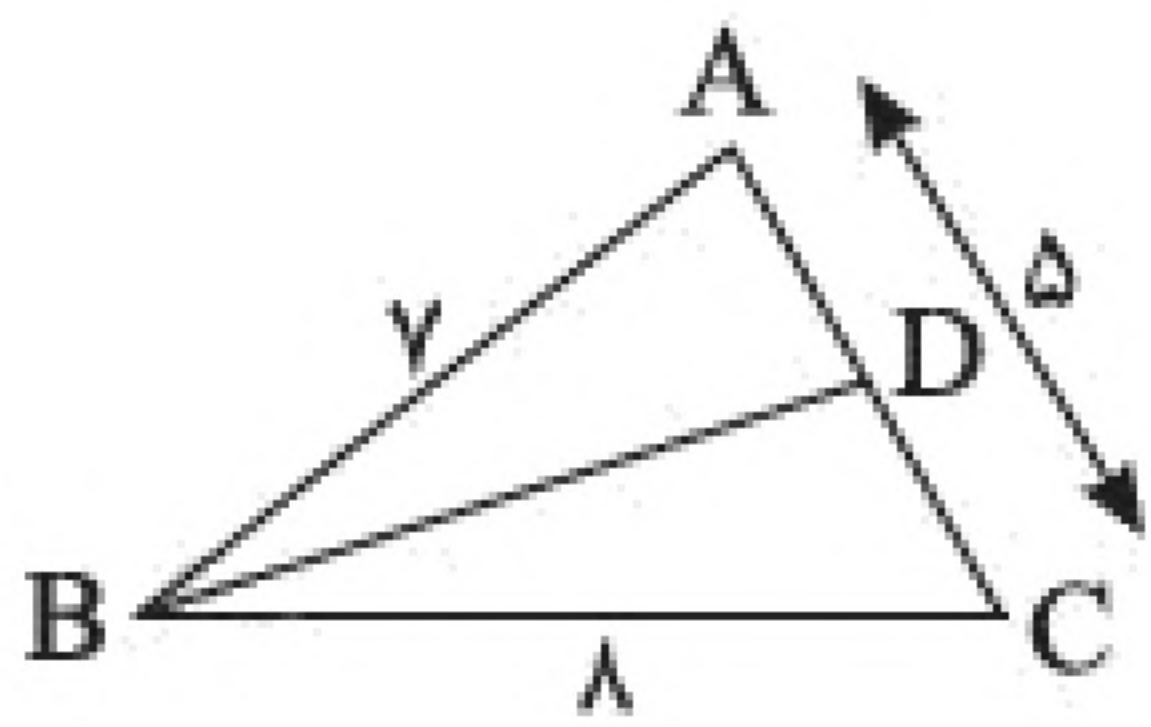
$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{4}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow R = 4$$





۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر BD نیمساز داخلی زاویه B باشد آنگاه با استفاده از قضیهی نیمساز داخلی داریم:



$$BD \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{7}{8} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{ترکیب در}} \frac{AD}{5} = \frac{7}{15} \Rightarrow AD = \frac{7}{3}$$

$$DC = AC - AD = 5 - \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

بنابراین:

$$BD \Rightarrow BD^2 = AB \times BC - AD \times DC \Rightarrow BD^2 = 7 \times 8 - \frac{7}{3} \times \frac{8}{3} = 56 - \frac{56}{9}$$

$$= \frac{9 \times 56 - 56}{9} = \frac{8 \times 56}{9} = \frac{8 \times 7 \times 7}{9} \Rightarrow BD = \frac{8}{3} \sqrt{7}$$

پس طول نیمساز زاویه B مساوی $\frac{8}{3} \sqrt{7}$ عدد است.

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم شعاع دایره‌ی محاطی برابر است با:

$$r = \frac{S}{P}$$

$$P = \frac{14 + 12 + 6}{2} = 16$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$S = \sqrt{16(16-6)(16-12)(16-14)} = 16\sqrt{5}$$

برای محاسبه مساحت از رابطه‌ی هرون استفاده می‌کنیم.

$$r = \frac{S}{P} = \frac{16\sqrt{5}}{16} = \sqrt{5}$$

بنابراین:

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر AD نیمساز زاویه A باشد آنگاه داریم:

$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} \quad (1)$$

طول اضلاع b و c ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 8x + 5 = 0$ است پس bc برابر با ضرب ریشه‌های این معادله و $b+c$ برابر با جمع ریشه‌های آن است.

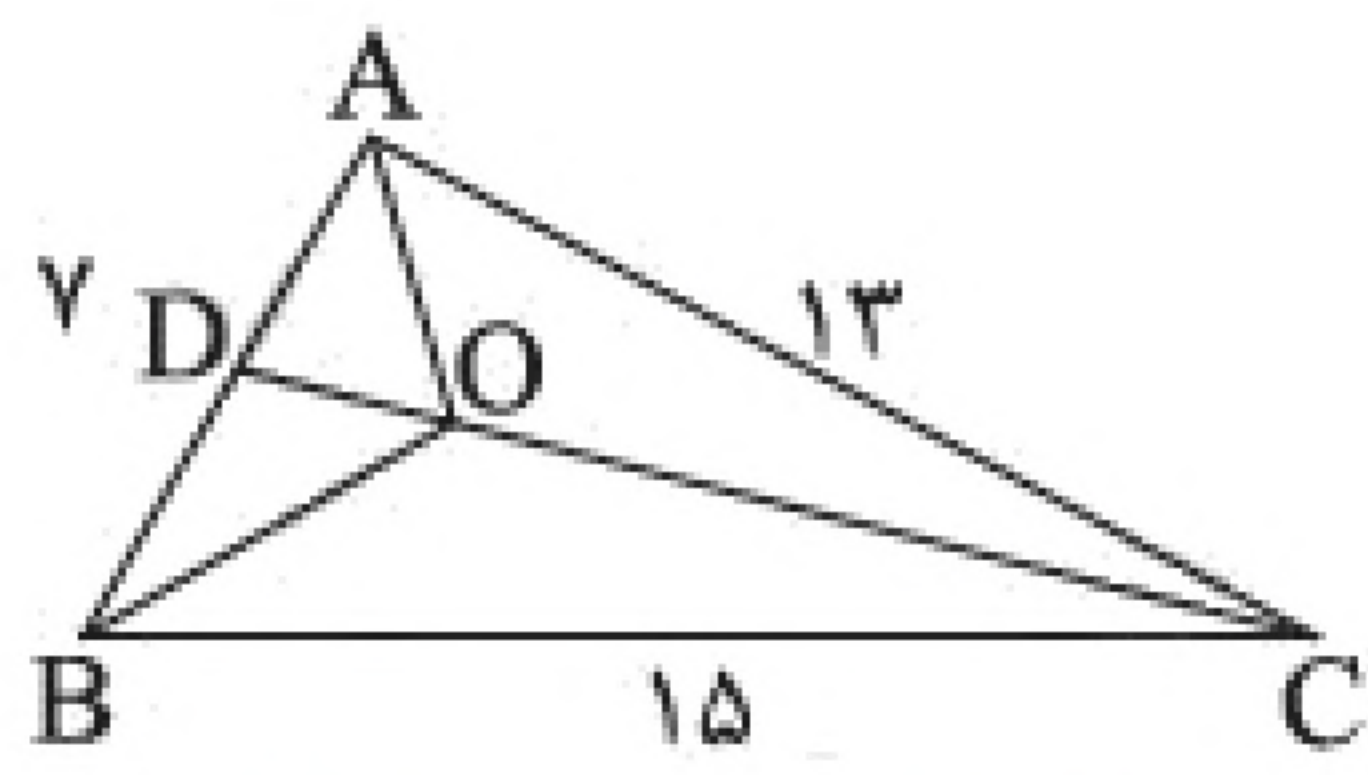
$$bc = \text{ضرب ریشه‌ها} = 5$$

$$b+c = \text{جمع ریشه‌ها} = 8$$

$$(1) \Rightarrow AD = \frac{2 \times 5}{8} \cos \frac{120^\circ}{2} = \frac{10}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$



۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم O نقطه‌ی تلاقی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC باشد و CD نیمساز زاویه‌ی کوچک‌تر یعنی زاویه‌ی \hat{C} باشد. باید نسبت $\frac{OD}{OC}$ یا $\frac{OC}{OD}$ را به دست آوریم. با استفاده از قضیه‌ی نیمساز داریم:

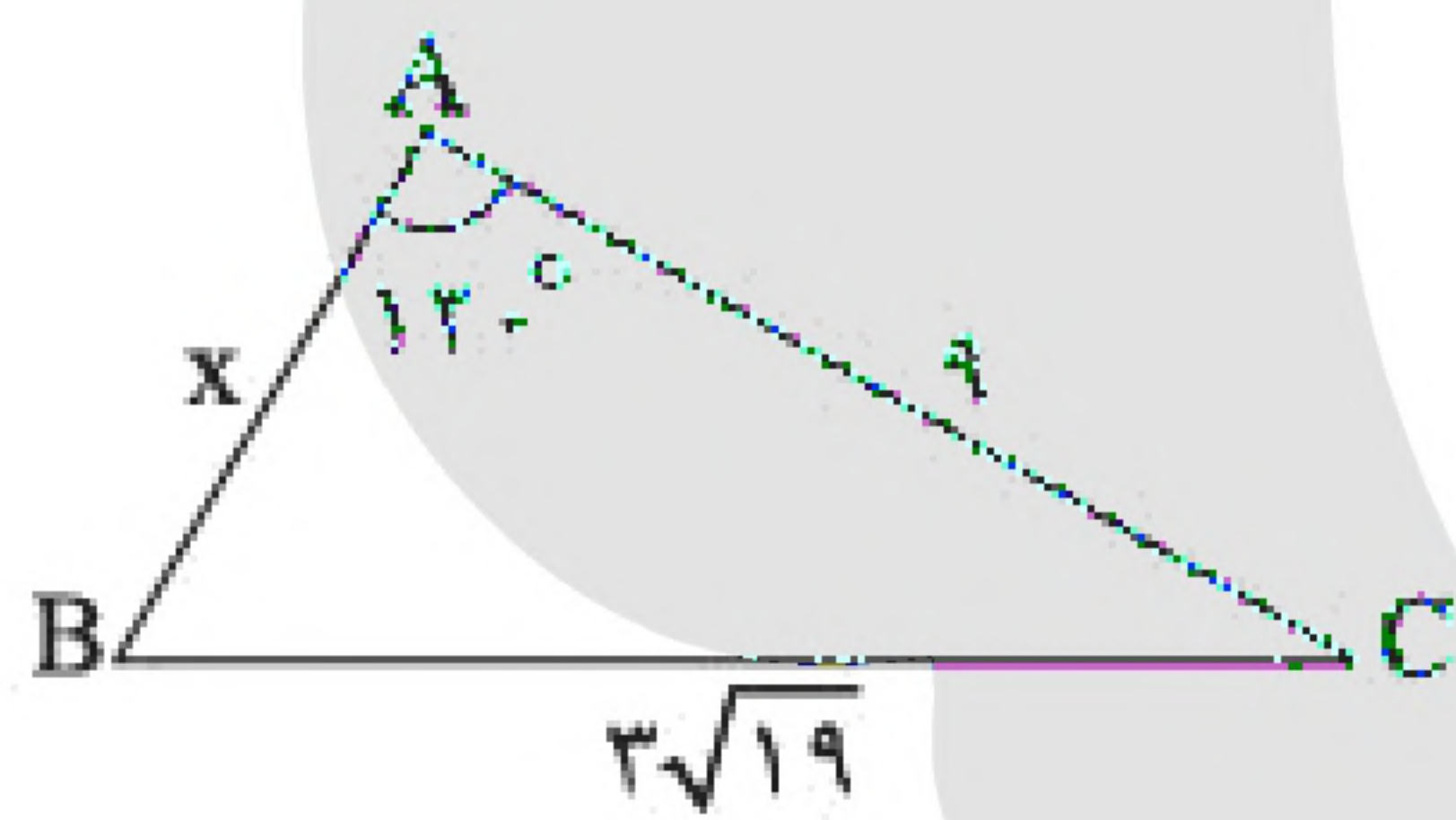


$$\triangle ADC : \text{نیمساز } AO \Rightarrow \frac{OD}{OC} = \frac{AD}{AC} \quad (1)$$

$$\triangle ABC : \text{نیمساز } CD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}}$$

$$\frac{AD}{AD+DB} = \frac{AC}{AC+BC} \Rightarrow \frac{AD}{7} = \frac{13}{13+15} \Rightarrow AD = \frac{91}{28} = \frac{13}{4} \quad (2)$$

$$\text{از (1) و (2) } \Rightarrow \frac{OD}{OC} = \frac{\frac{13}{4}}{13} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OC}{OD} = 4$$



۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها داریم:

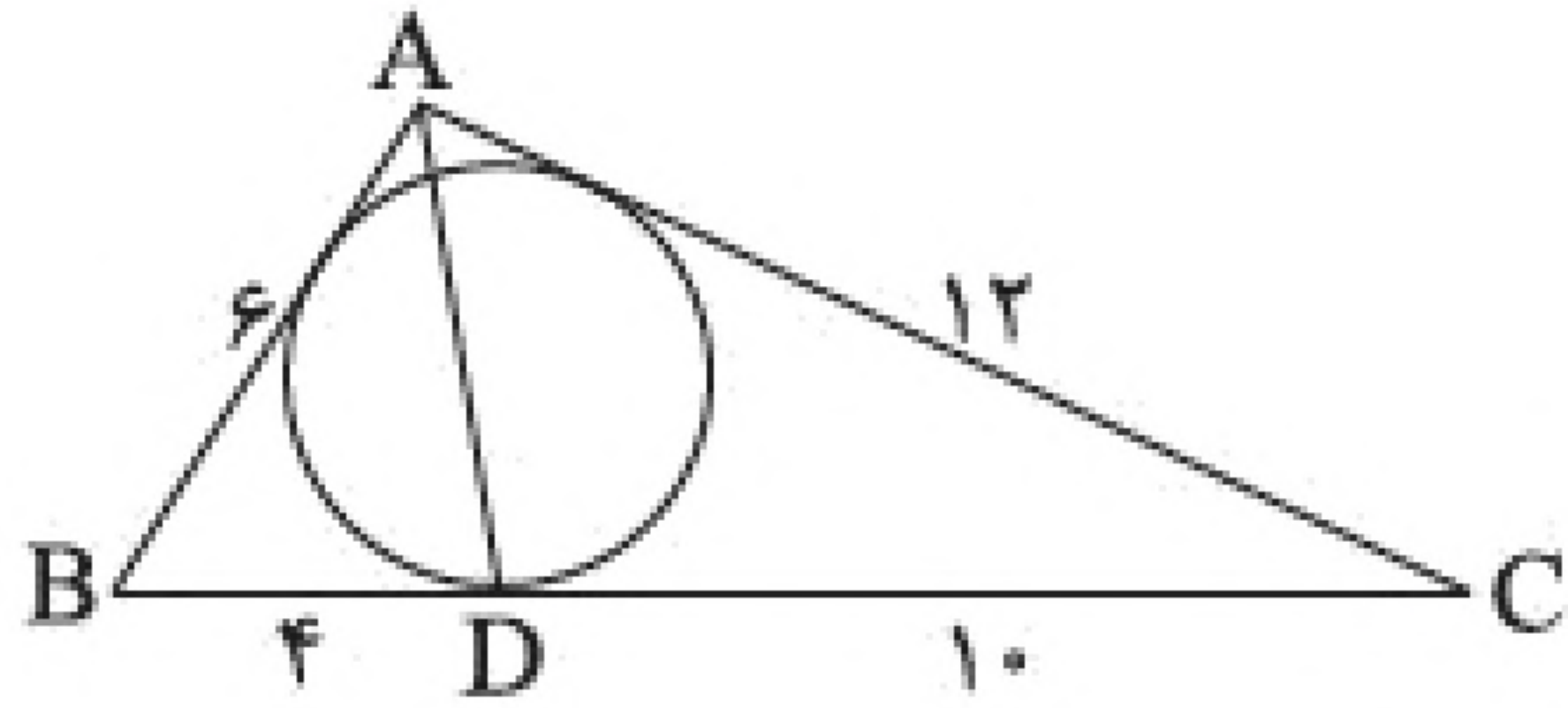
$$(3\sqrt{19})^2 = x^2 + (9)^2 - 2(x)(9)\underbrace{\cos 120^\circ}_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$171 = x^2 + 81 + 9x \Rightarrow x^2 + 9x - 90 = 0$$

$$(x-6)(x+15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-15 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$



۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} BC = 14 \\ BD = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow DC = 14 - 4 = 10$$

حال با استفاده از قضیه استوارت طول AD را می‌یابیم:

$$DC \times AB^2 + BD \times AC^2 = BC(BD \times DC + AD^2)$$

$$\Rightarrow 10 \times 6^2 + 4 \times 12^2 = 14(4 \times 10 + AD^2)$$

$$\Rightarrow 6^2(10 + 16) = 14(40 + AD^2)$$

$$40 + AD^2 = \frac{36 \times 26}{14} = \frac{36 \times 13}{7}$$

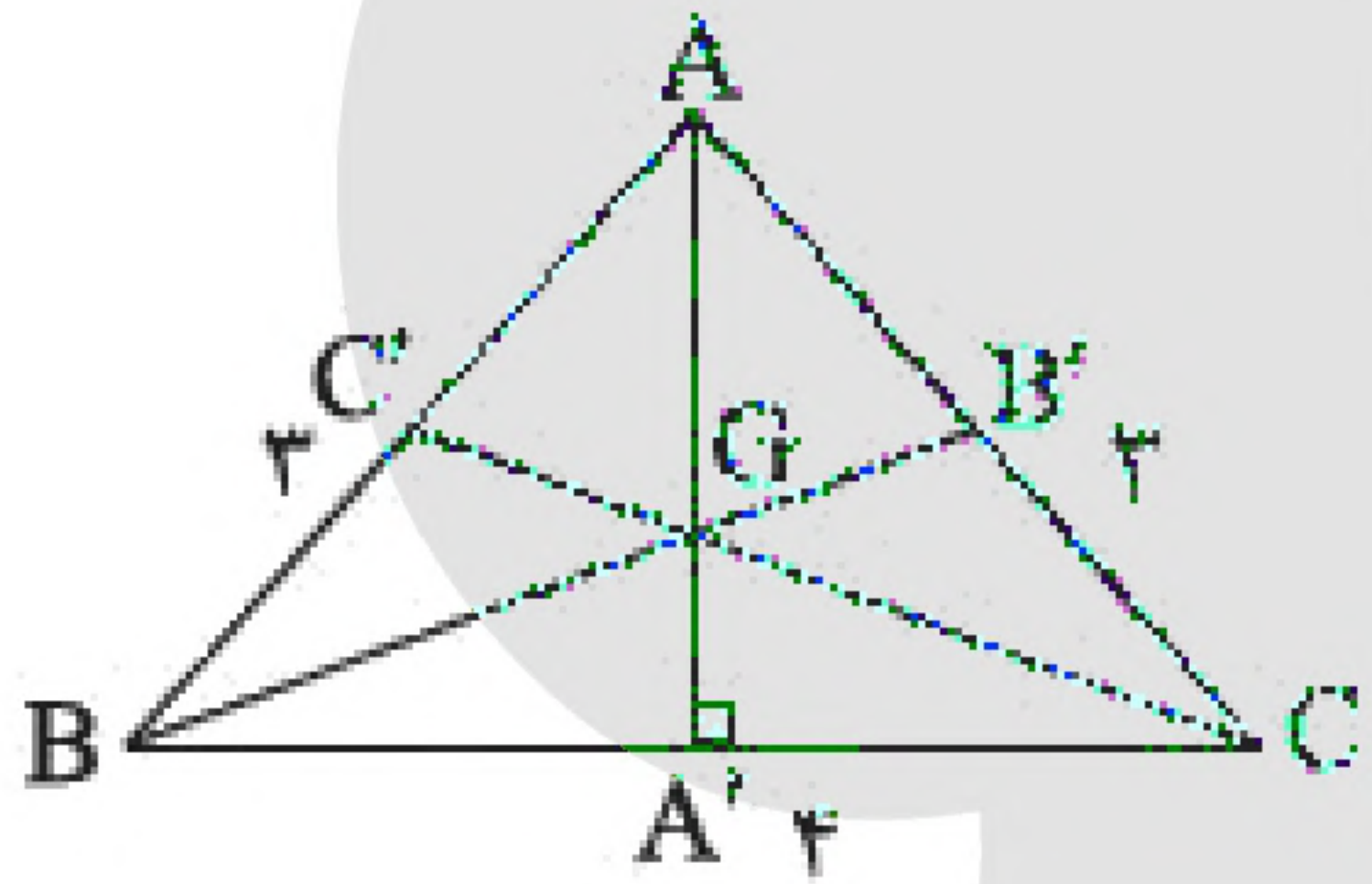
$$AD^2 = \frac{13 \times 36}{7} - 40 = \frac{13 \times 36 - 280}{7} = \frac{188}{7}$$

$$AD = 2\sqrt{\frac{47}{7}}$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در مثلث روبه‌رو AA' ، BB' و CC' میانه‌های مثلث هستند. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین BB' با CC' برابر است. پس: $GB' = GC'$. مسئله طول GB' یا GC' را از ما می‌خواهد.

می‌دانیم $GB' = \frac{1}{3}BB'$ است. با استفاده از قضیه میانه‌ها طول BB' را به دست می‌آوریم.



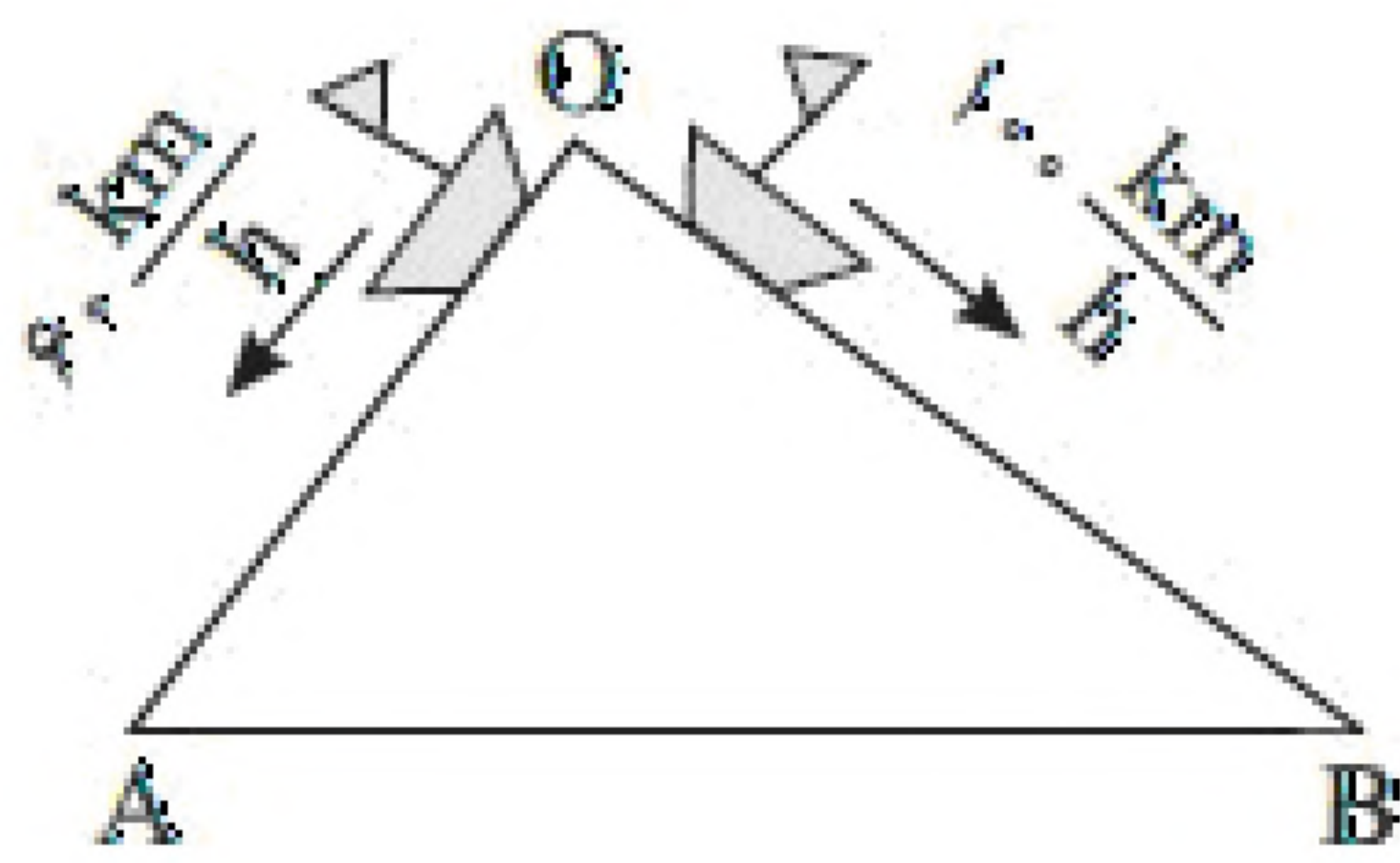
$$AB^2 + BC^2 = 2BB'^2 + \frac{AC^2}{2}$$

$$9 + 16 = 2BB'^2 + \frac{9}{2} \Rightarrow BB'^2 = \frac{41}{4} \Rightarrow BB' = \frac{\sqrt{41}}{2}$$

$$GB' = \frac{1}{3}BB' = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{41}}{2} = \frac{1}{6}\sqrt{41}$$



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



دو قایق از نقطه‌ی O شروع به حرکت کرده‌اند. مسافت طی شده توسط دو قایق بعد از نیم ساعت برابر با طول OA و طول OB است.

$$OA = 60 \times 0.5 = 30 \text{ کیلومتر}$$

$$OB = 100 \times 0.5 = 50 \text{ کیلومتر}$$

به کمک قضیه‌ی کسینوس‌ها می‌توانیم طول AB (فاصله‌ی دو قایق بعد از نیم ساعت از شروع حرکت) را به دست آوریم.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos 120^\circ$$

$$\Rightarrow AB^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = 4900 \Rightarrow AB = 70$$

بنابراین نیم ساعت بعد از شروع حرکت از نقطه‌ی O، دو قایق در فاصله‌ی ۷۰ کیلومتری از هم قرار می‌گیرند.

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با نوشتن قضیه‌ی سینوس‌ها در دو مثلث $\triangle ADB$ و $\triangle BDC$ داریم:

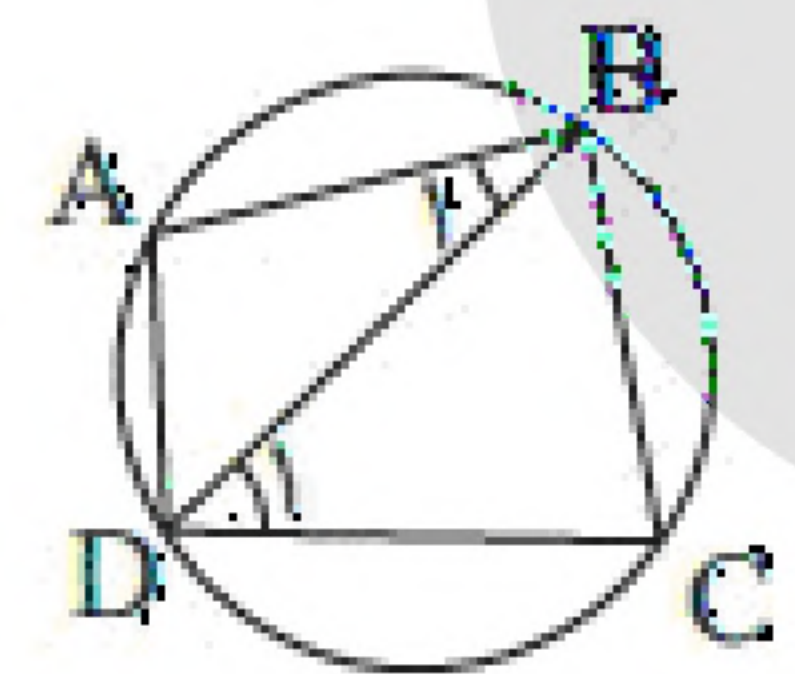
داریم:

$$\triangle ADB : \frac{AD}{\sin \hat{B}_1} = 2R \Rightarrow AD = 2R \sin 30^\circ = R$$

$$\triangle BDC : \frac{BC}{\sin \hat{D}_1} = 2R \Rightarrow BC = 2R \sin 45^\circ = \sqrt{2} R$$

بنابراین:

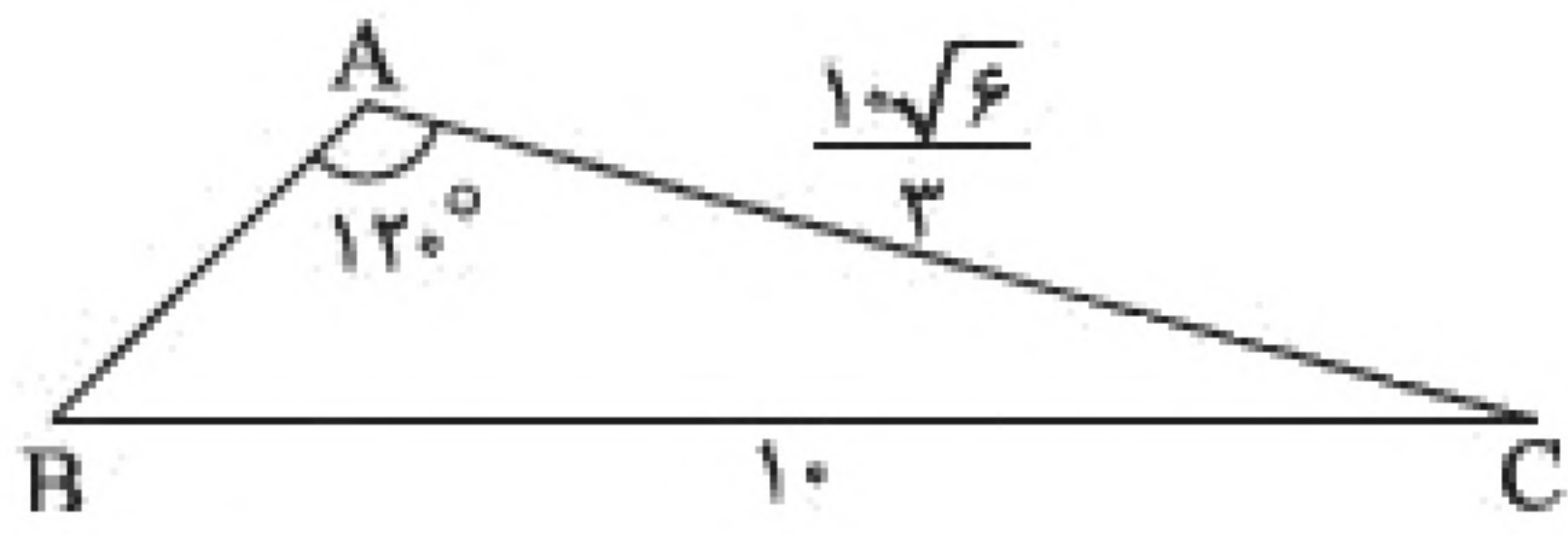
$$\frac{AD}{BC} = \frac{R}{\sqrt{2} R} \xrightarrow{AD=6} BC = 6\sqrt{2}$$





۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با نوشتن قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم:



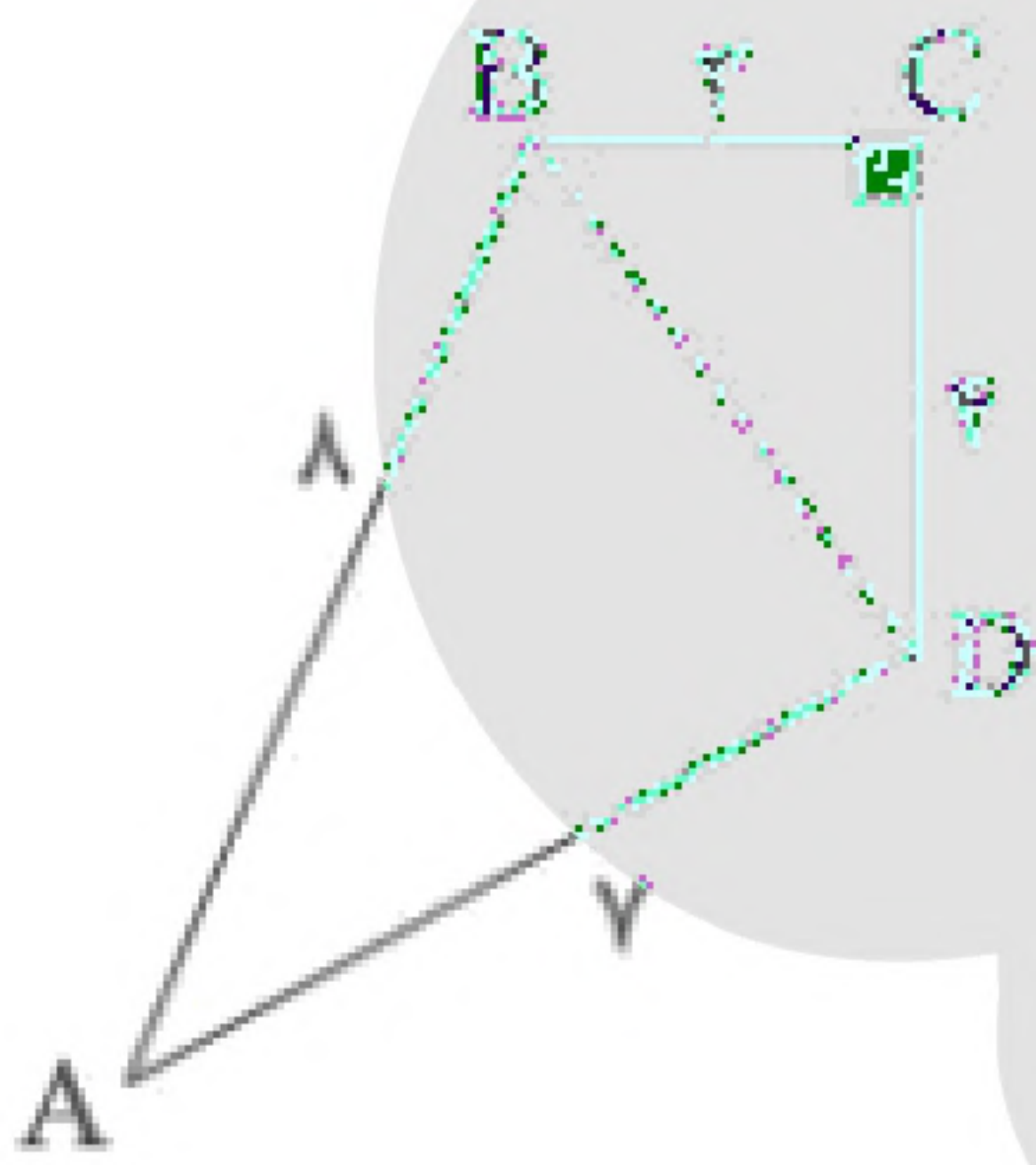
$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{10}{\sin 120^\circ} = \frac{\frac{10\sqrt{6}}{3}}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10\sqrt{6}}{3 \sin \hat{B}}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

زاویه B می‌تواند ۴۵° یا ۱۳۵° باشد ولی چون $\hat{A} = 120^\circ$ است پس $\hat{B} = 135^\circ$ قابل قبول نیست. بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 120^\circ \\ \hat{B} = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 45^\circ) = 15^\circ$$

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مساحت دو مثلث ABD و BCD را جداگانه محاسبه می‌کنیم:



$$BD^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow BD = 5$$

$$S_{BCD} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

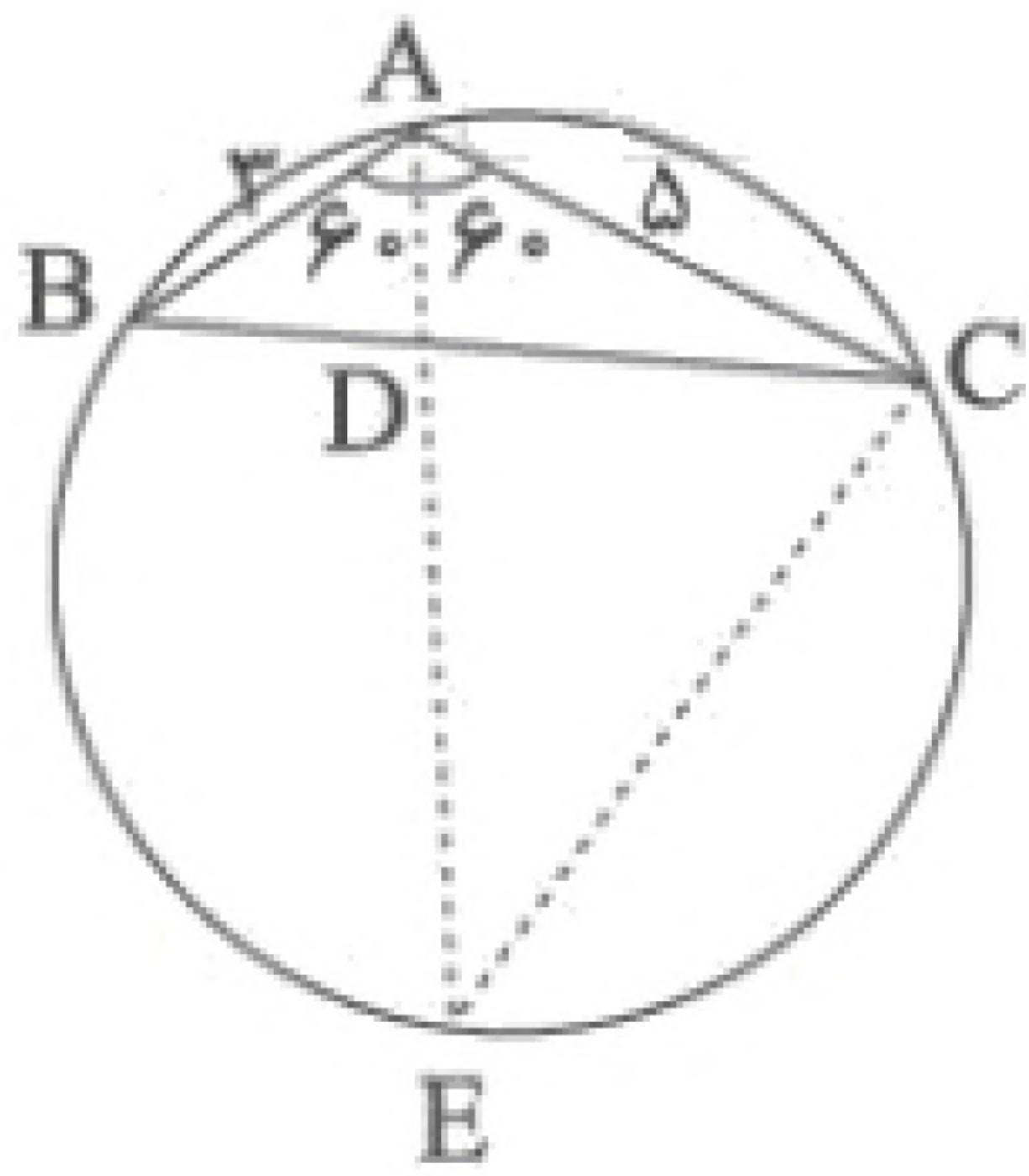
$$P = \frac{5 + 8 + 7}{2} = 10$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \sqrt{10 \times 2 \times 3 \times 5} = 10\sqrt{3}$$

$$S_{\text{کل}} = 6 + 10\sqrt{3} = 2(3 + 5\sqrt{3})$$



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا طول نیمساز AD را به دست می آوریم.



$$AD = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\hat{A}}{2}}{b+c} = \frac{2 \times 5 \times 3 \times \frac{1}{2}}{5+3} = \frac{15}{8}$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در \widehat{ABC} ، داریم:

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 25 + 9 - 2 \times 5 \times 3 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = 49 \Rightarrow BC = 7$$

طبق قضیه‌ی نیمسازها، داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{3}{5} \Rightarrow BD = \frac{3}{5} CD, BD + CD = 7 \Rightarrow \frac{3}{5} CD + CD = 7 \Rightarrow CD = \frac{35}{8} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}$$

طبق روابط طولی در دایره، داریم:

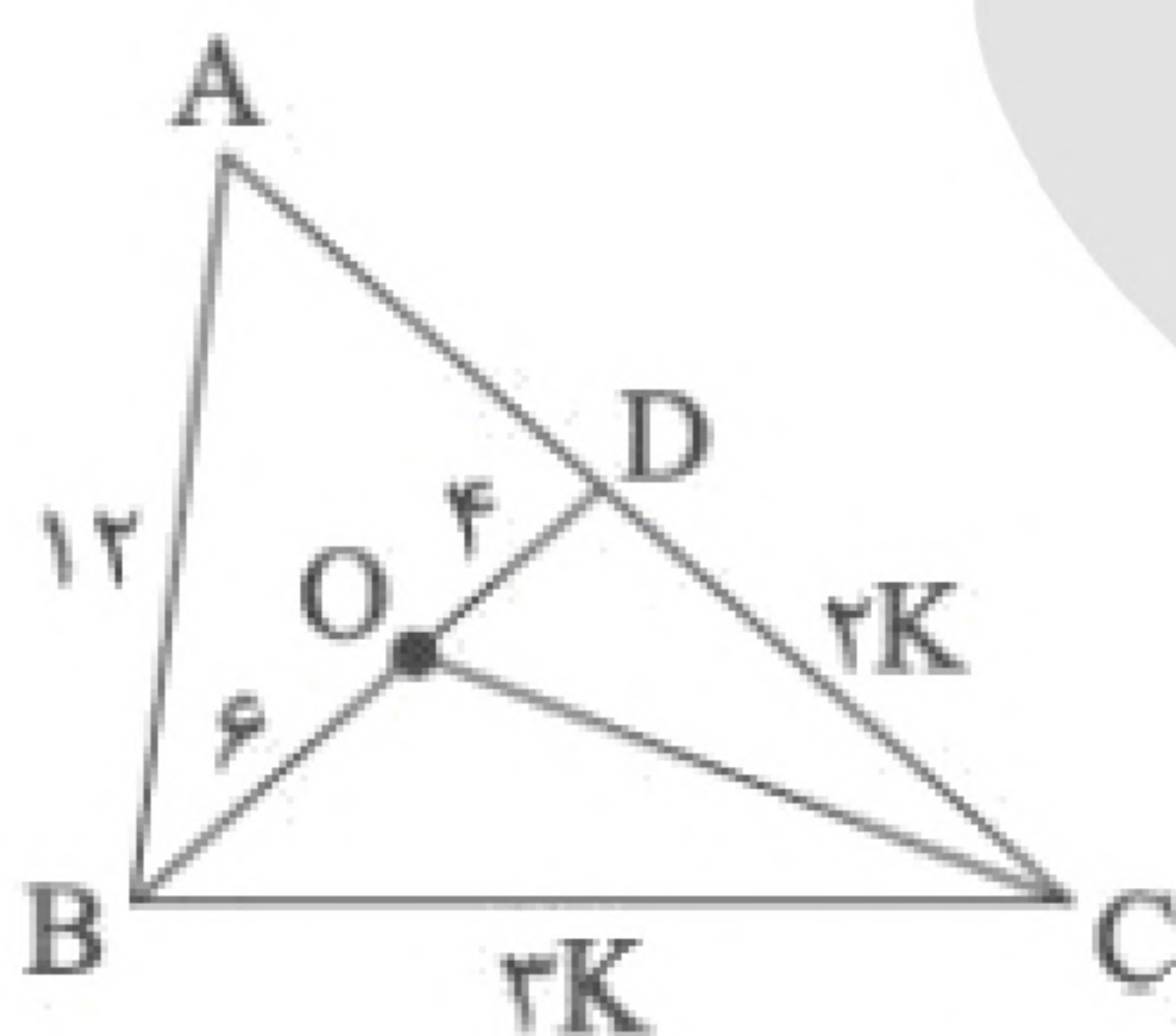
$$AD \times DE = BD \times CD \Rightarrow \frac{15}{8} \times DE = \frac{21}{8} \times \frac{35}{8} \Rightarrow DE = \frac{49}{8}$$

روش ۲:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{E} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\ \widehat{BAD} = \widehat{DAC} \end{array} \right\} \widehat{ABD} \Rightarrow \sim \widehat{ACE} \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{8} = \frac{3}{AE} \Rightarrow AE = 8 \Rightarrow DE = 8 - \frac{15}{8} = \frac{49}{8}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی نیمسازها داریم:



$$CO : \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} BC = 3K \\ CD = 2K \end{cases}$$

$$BD : \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AD = 8$$

طبق رابطه‌ی محاسبه طول نیمساز، داریم:

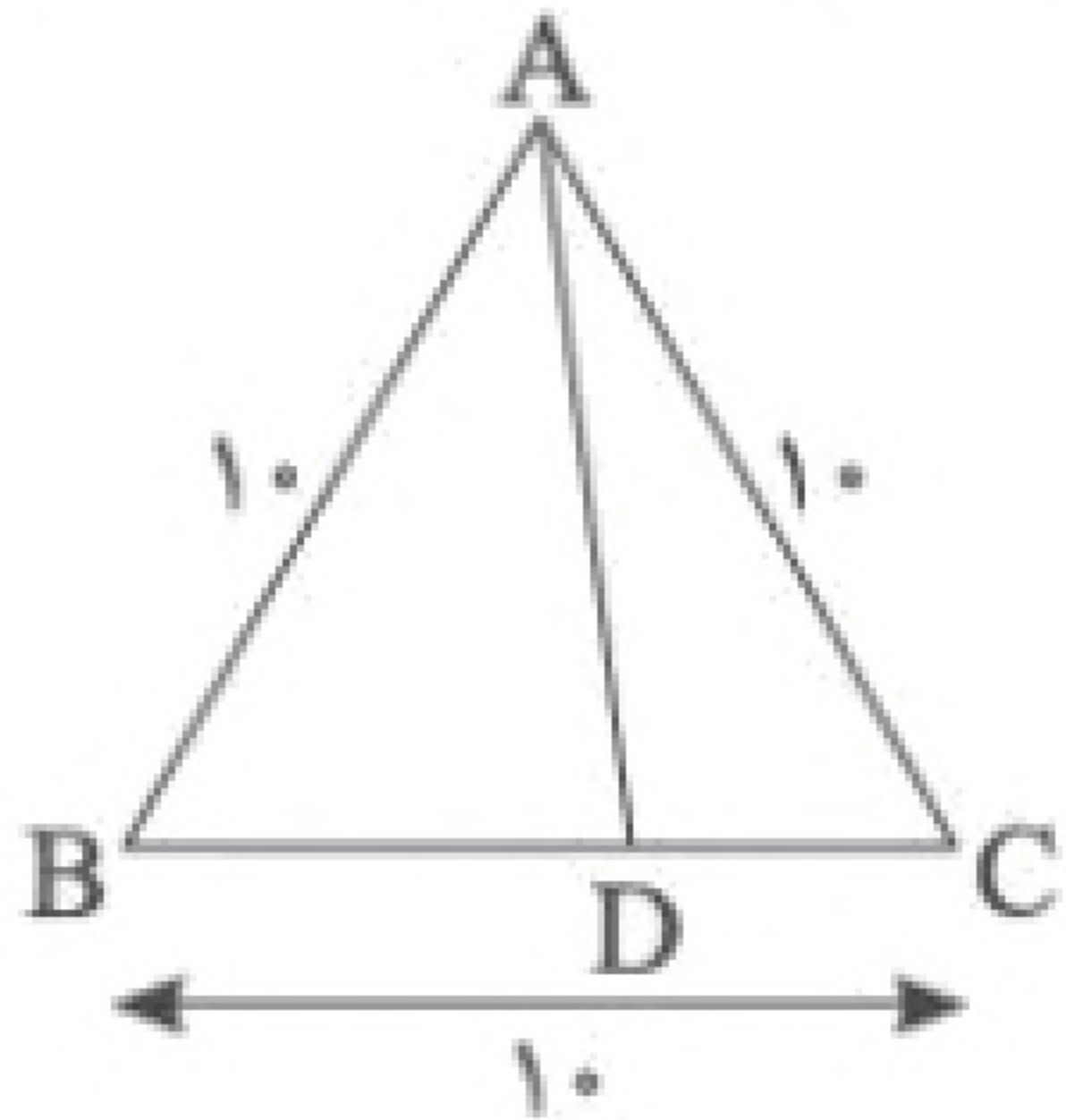
$$BD^2 = AB \times BC - AD \times DC \Rightarrow 100 = 12 \times 3K - 8 \times 2K \Rightarrow K = 5 \Rightarrow BC = 3 \times 5 = 15$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق قضیه استوارت، داریم:

$$AB^2 \times CD + AC^2 \times BD = BC (AD^2 + BD \times CD)$$

$$\Rightarrow 100 \times CD + 100 \times BD = 10(76 + BD \times CD)$$



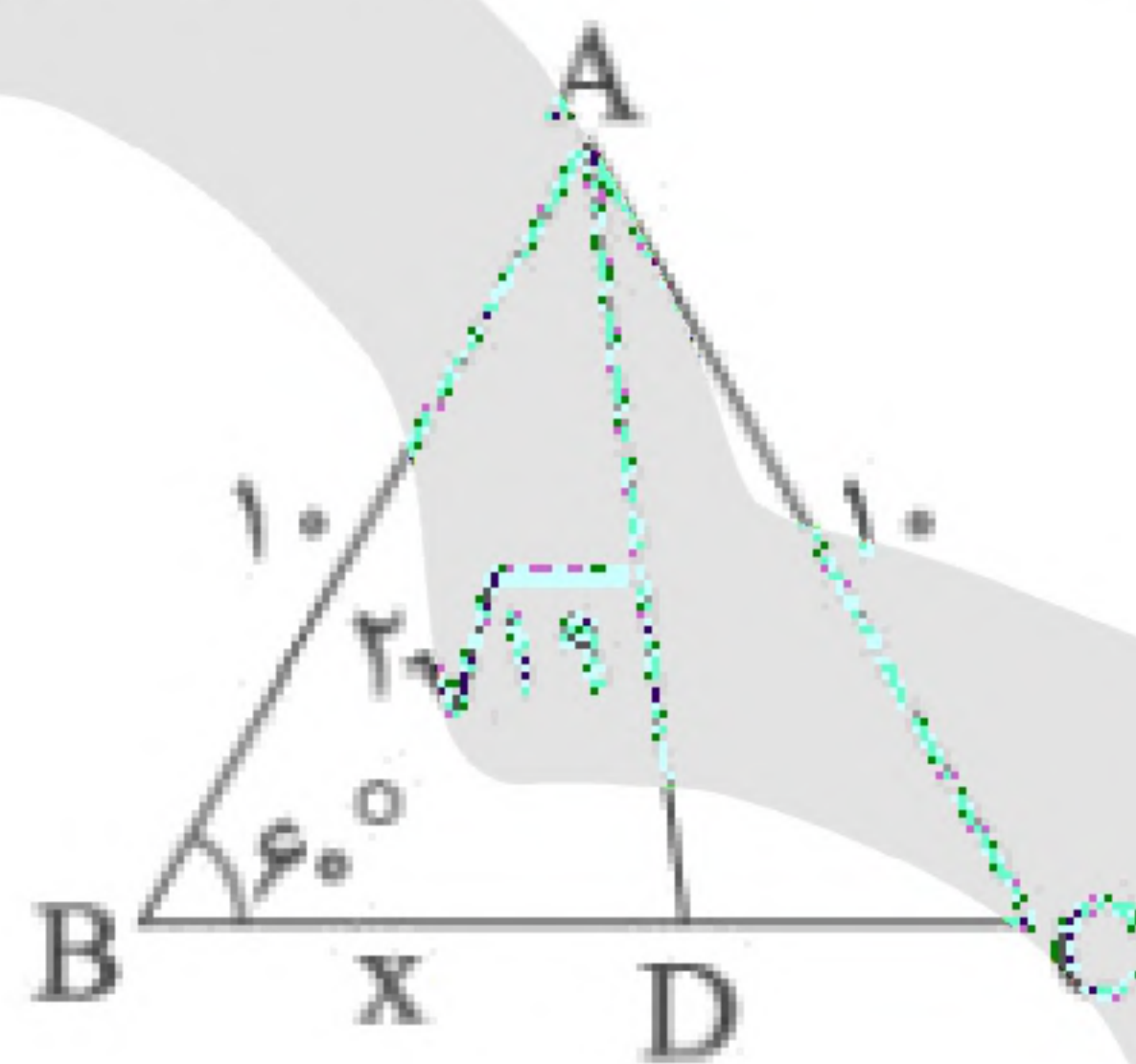
$$\Rightarrow BD \times CD = 100 - 76 = 24$$

روش ۲) طبق قضیه کسینوس‌ها در $\triangle ABD$ ، داریم:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \times AB \times BD \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 76 = 100 + x^2 - 10x \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

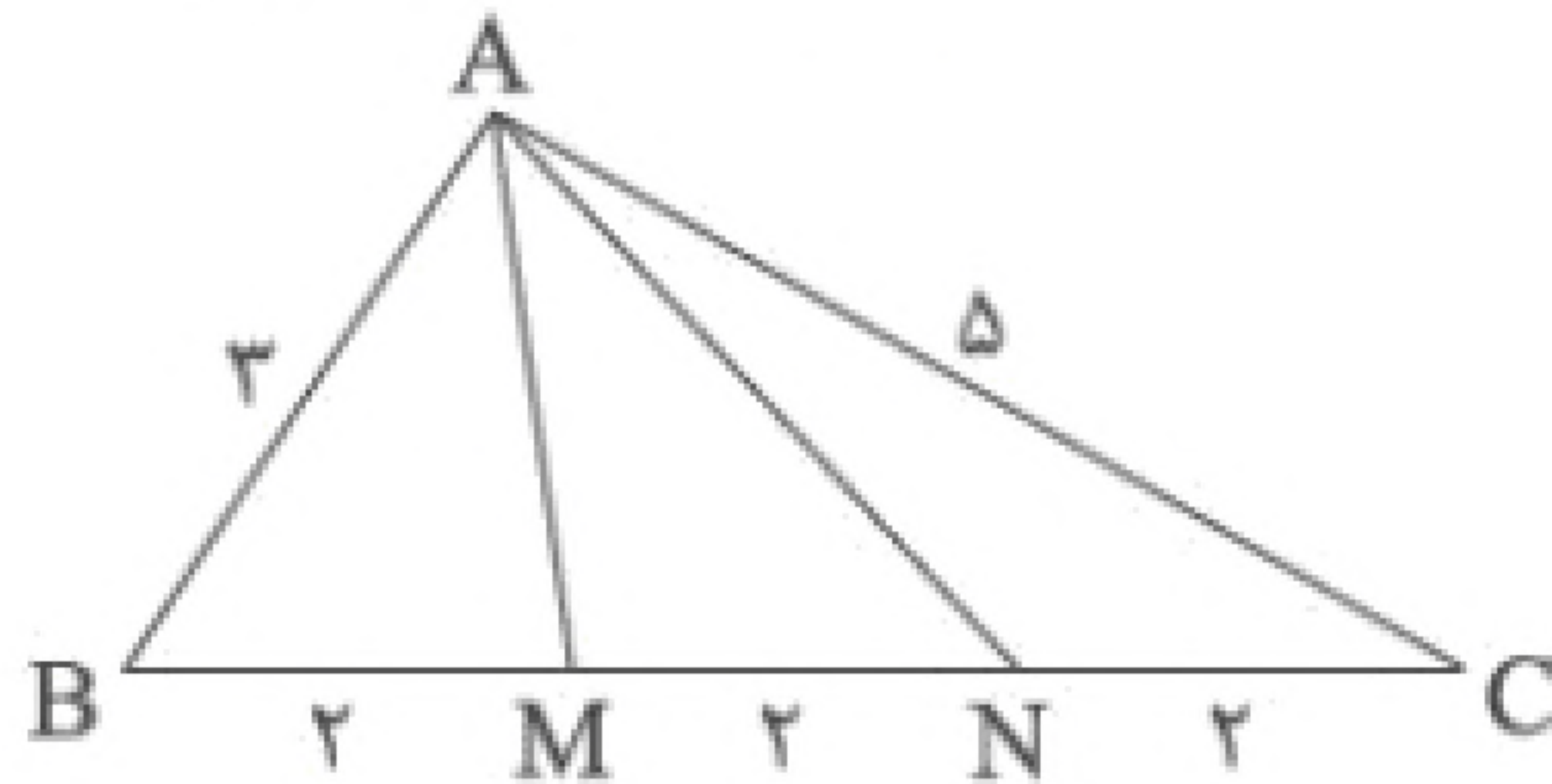
بنابراین $BD = 6$ و $CD = 4$ یا $BD = 4$ و $CD = 6$ که در هر صورت $BD \times CD = 24$





۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

AM میانه‌ی مثلث ABN و AN میانه‌ی مثلث AMC است. طبق قضیه‌ی میانه‌ها، داریم:



$$\widehat{ABN}: 3^2 + AN^2 = 2AM^2 + \frac{4^2}{2} \Rightarrow AN^2 = 2AM^2 - 1$$

$$\widehat{AMC}: AM^2 + 5^2 = 2AN^2 + \frac{4^2}{2} \Rightarrow AM^2 = 2AN^2 - 17$$

$$\Rightarrow AN^2 = \frac{35}{2}, AM^2 = \frac{19}{2}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt{\frac{19}{2}}}{\sqrt{\frac{35}{2}}} = \sqrt{\frac{19}{35}}$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در \widehat{ABC} ، داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 64 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos \hat{A} \Rightarrow 12 = 48 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{-1}{4}$$

طبق قضیه‌ی کسینوس‌ها در \widehat{AMN} ، داریم:

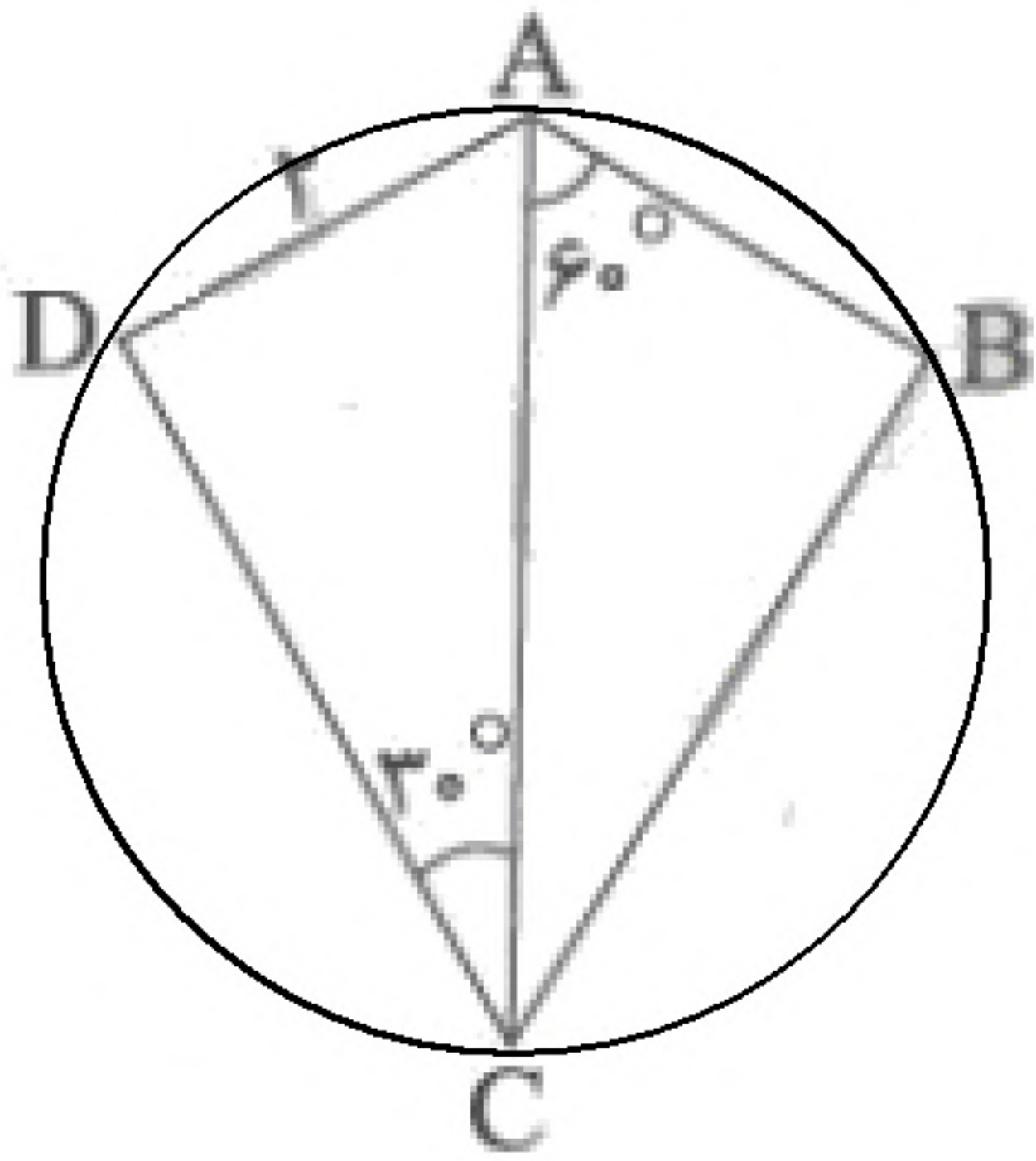
$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \times AN \cdot \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow MN^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 6 \Rightarrow MN = \sqrt{6}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

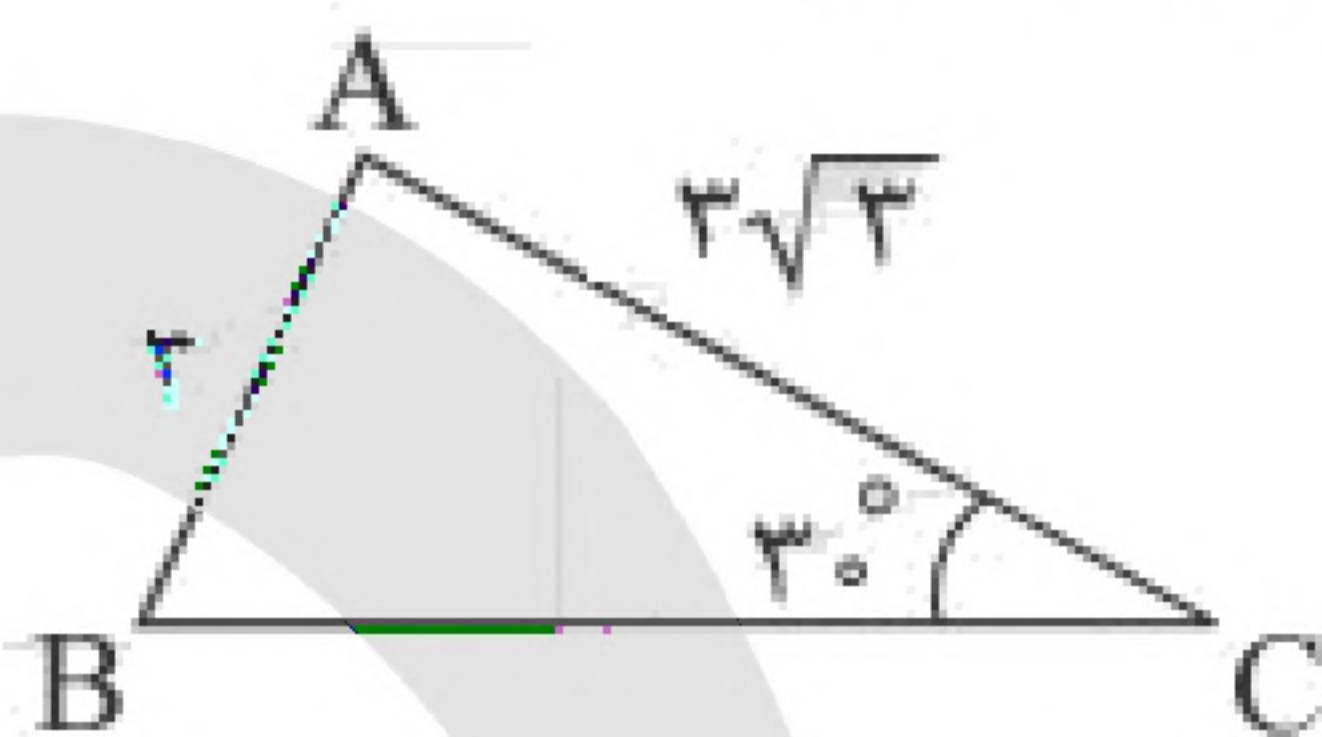
۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دایره‌ی محیطی چهارضلعی، دایره‌ی محیطی مثلث‌های ABC و ACD نیز است. پس شعاع دایره محیطی هر دو مثلث برابر R است. حال طبق قضیه‌ی سینوس‌ها در هر یک از مثلث‌ها داریم:



$$\frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 2$$

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow BC = 2\sqrt{3}$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:



$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\sin \hat{B}} = \frac{2}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = 120^\circ \Rightarrow \hat{A} = 30^\circ \end{cases}$$

اگر $B < 90^\circ$ ، مثلث ABC قائم‌الزاویه است و می‌دانیم در این مثلث $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h_a^2}$

اگر $B > 90^\circ$ ، مثلث ABC دارای دو زاویه‌ی برابر است $(\hat{A} = \hat{C} = 30^\circ)$ ، پس متساوی‌الساقین است و $AB = BC$.

بنابراین هر دو گزاره صحیح‌اند.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

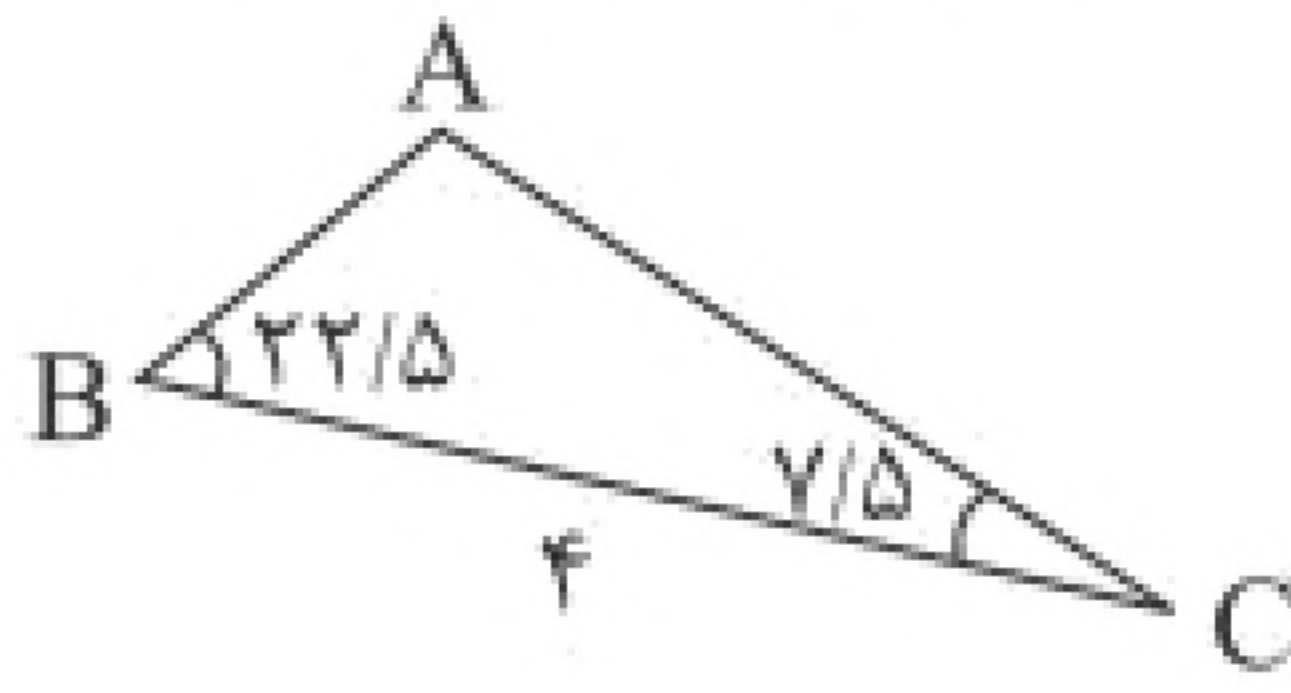
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \begin{cases} \sin \hat{A} = \frac{a}{2R} \\ \sin \hat{B} = \frac{b}{2R} \\ \sin \hat{C} = \frac{c}{2R} \end{cases}$$

$$\sin \hat{A} + \sin \hat{B} = \sin \hat{C} \rightarrow \frac{a}{2R} + \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R} \rightarrow a + b = c$$

طبق نامساوی مثلث این رابطه هیچ‌گاه برقرار نیست. در نتیجه چنین مثلثی وجود ندارد.

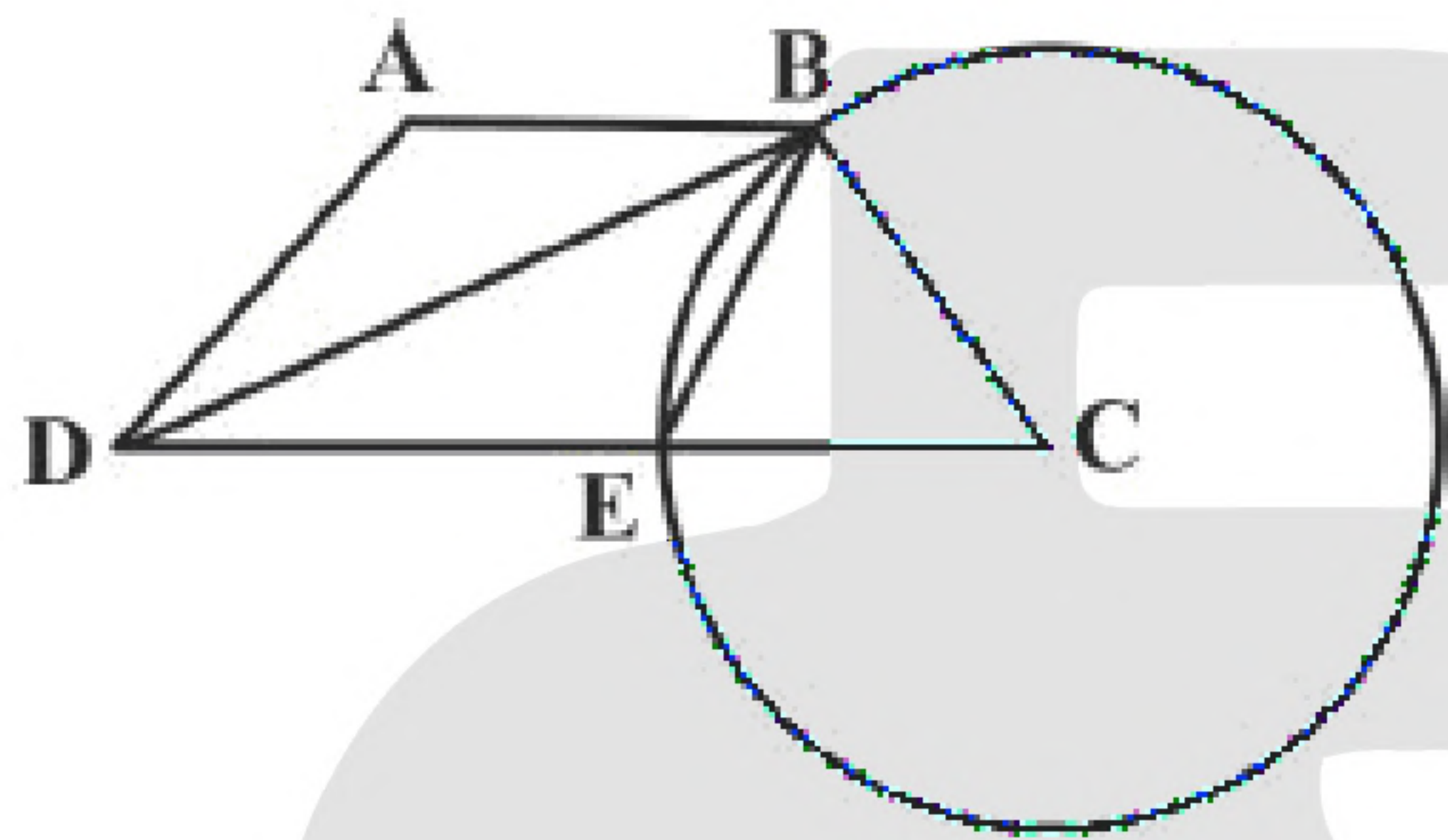


۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه سینوس‌ها می‌نویسیم:



$$\hat{A} = 180^\circ - (22/5^\circ + 7/5^\circ) = 150^\circ$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R \rightarrow \frac{4}{\sin 150^\circ} = 2R \rightarrow R = 4$$



۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون عمودمنصف‌های اضلاع چهارضلعی ABCD هم‌رس‌اند، پس این چهارضلعی محاطی است و زوایای روبه‌روی آن مکمل یکدیگرند. از طرفی طبق شکل و فرض سؤال $BE = BC = CE = R$ است، پس مثلث BEC متساوی‌الاضلاع و $\hat{C} = 60^\circ$ است و در نتیجه داریم:

$$\hat{A} = 180^\circ - \hat{C} = 120^\circ$$

طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث BCD داریم:

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \times CD \times \cos \hat{C} = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$= 25 + 64 - 40 = 49 \Rightarrow BD = 7$$

همچنین طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A} \Rightarrow 7^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x + 8)(x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -8 & \text{غ ق} \\ x = 5 \end{cases}$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنید طول هر ضلع لوزی برابر a باشد. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABD داریم:

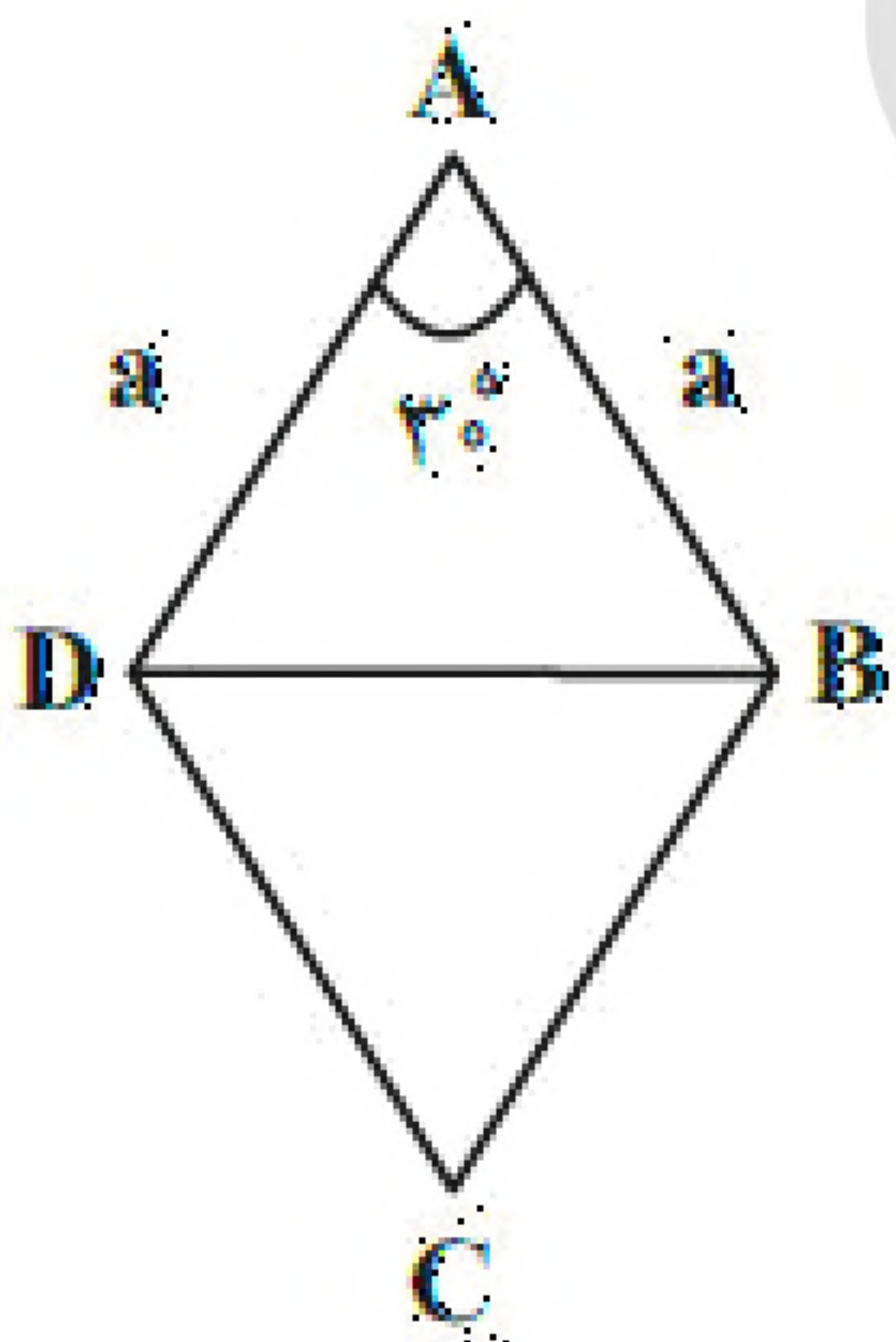
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 9(2 - \sqrt{3}) = a^2 + a^2 - 2 \times a \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 9(2 - \sqrt{3}) = a^2(2 - \sqrt{3}) \Rightarrow a^2 = 9$$

طبق رابطه سینوسی مساحت مثلث داریم:

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} AB \times AD \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \times \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

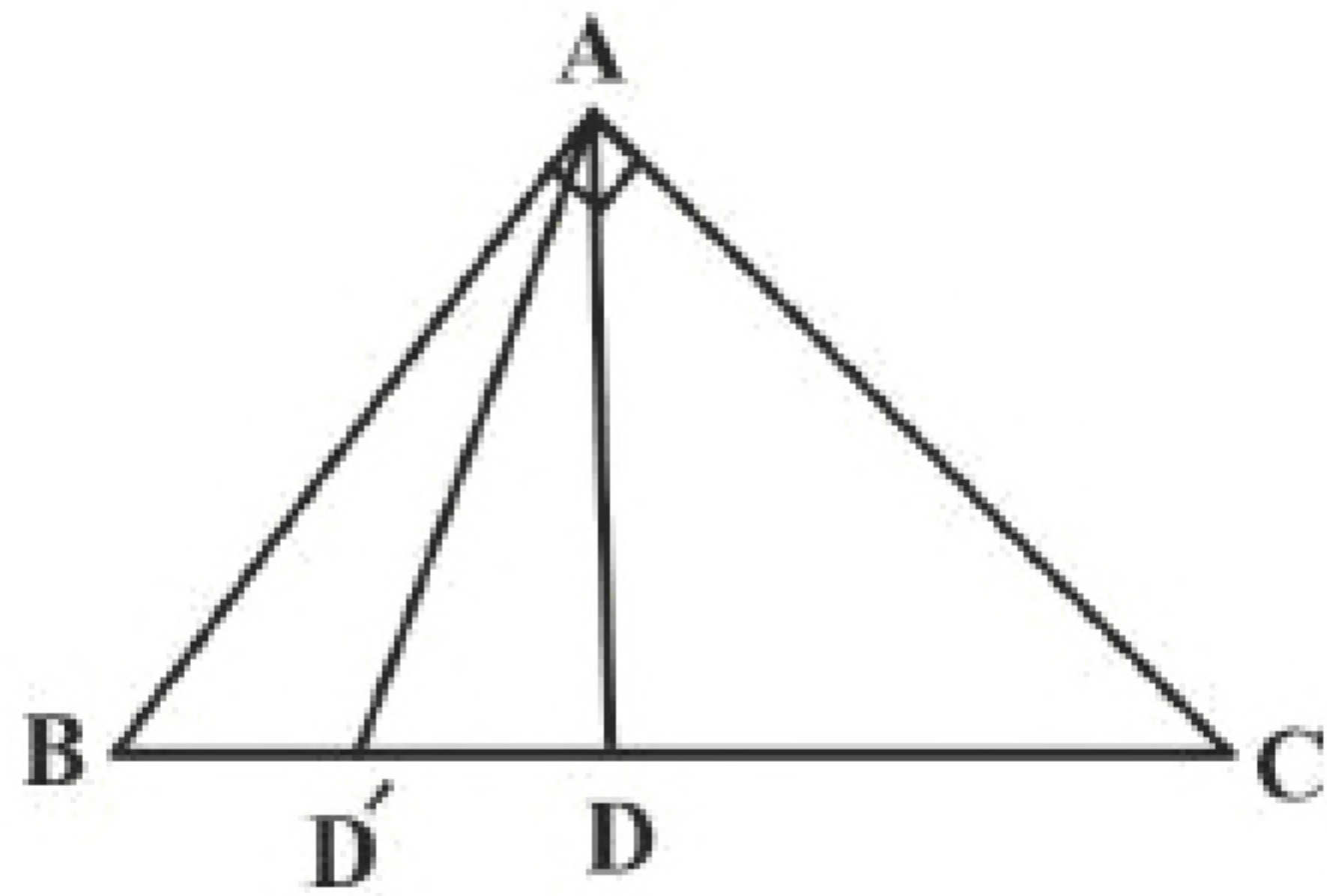




۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\triangle ABC : BC^2 = AB^2 + AC^2 = 9^2 + 12^2 = 225 \Rightarrow BC = 15$$

طبق قضیه نیمسازها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{AB + AC}$$

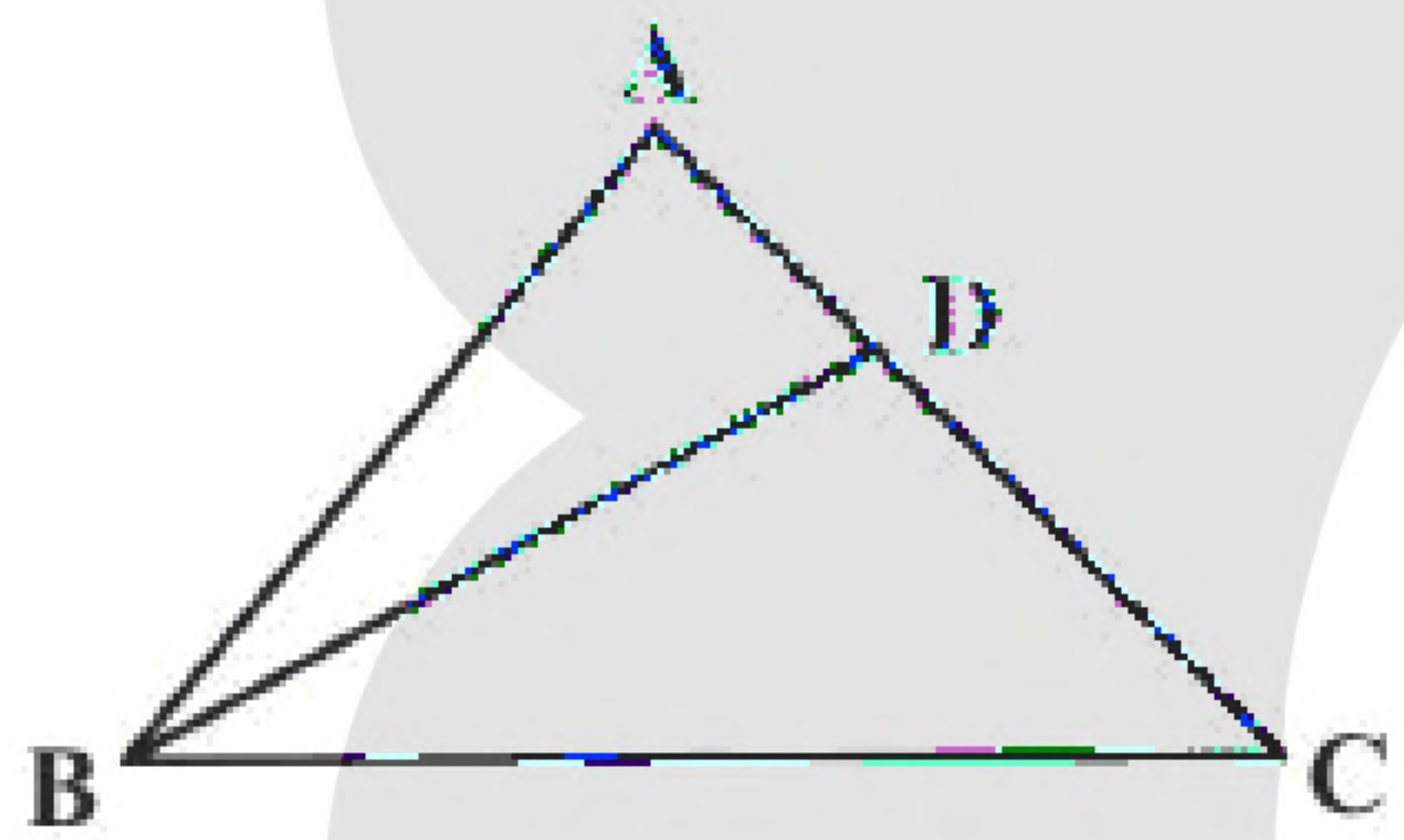
$$\Rightarrow \frac{BD}{15} = \frac{9}{21} \Rightarrow BD = \frac{15 \times 9}{21} = \frac{45}{7}$$

نسبت تجانس برابر $k = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{7}$ است، پس اگر D' تصویر نقطه D در این تجانس باشد، آن گاه داریم:

$$\frac{BD'}{BD} = k \Rightarrow \frac{BD'}{\frac{45}{7}} = \frac{3}{7} \Rightarrow BD' = \frac{45}{7} \times \frac{3}{7} = \frac{135}{49}$$

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق فرض مثلث ABC متساوی الساقین است،

پس $\hat{B} = \hat{C} = 30^\circ$ و در نتیجه طبق قضیه سینوسها در مثلث ABC داریم:



$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AC = 6 \Rightarrow AB = 6$$

از طرفی طبق قضیه نیمسازهای زوایای داخلی در مثلث ABC داریم:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{\text{ترکیب نسبت در مخرج}} \frac{AD}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{6}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 3\sqrt{3} - 3$$

طبق قضیه کسینوسها در مثلث ABD داریم:

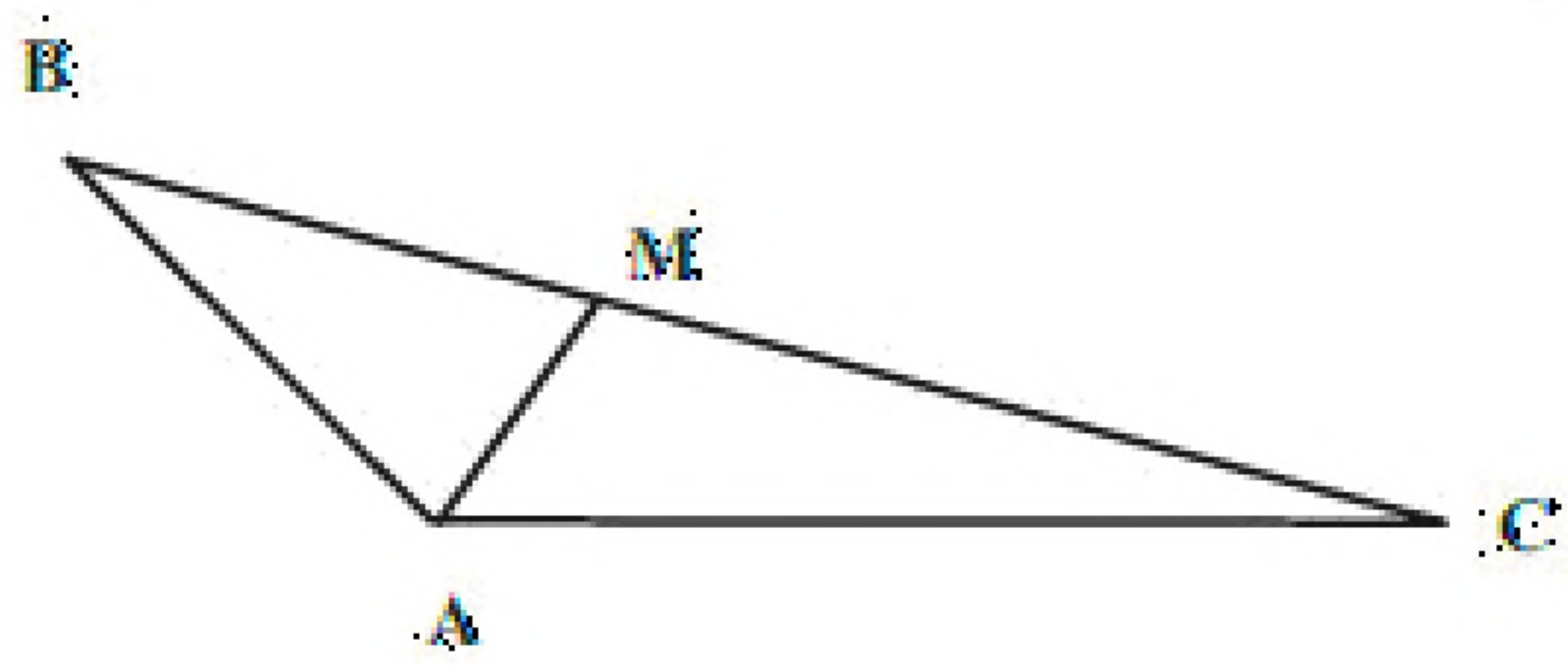
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos \hat{A} = 6^2 + (3\sqrt{3} - 3)^2 - 2 \times 6 \times (3\sqrt{3} - 3) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 36 + (36 - 18\sqrt{3}) + (18\sqrt{3} - 18) = 54 \Rightarrow BD = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$



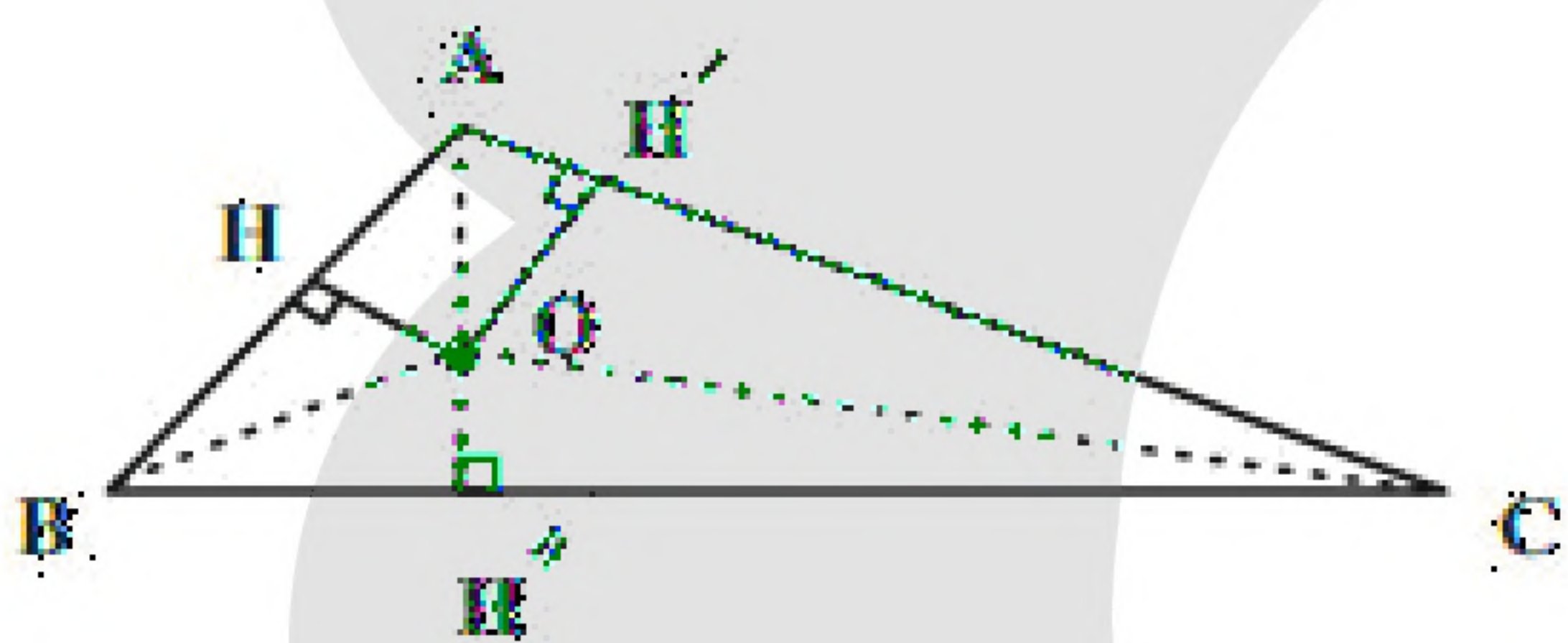
۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC داریم:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A} \\ &= 3^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3 \times 3\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 9 + 18 + 18 = 45 \end{aligned}$$



حال طبق قضیه میانه‌ها در این مثلث داریم:

$$\begin{aligned} AB^2 + AC^2 &= 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 9 + 18 = 2AM^2 + \frac{45}{2} \\ \Rightarrow 2AM^2 &= \frac{9}{2} \Rightarrow AM^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{2} \end{aligned}$$



۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فرض کنید $b = 13, a = 15, c = 4$ باشد. طبق قضیه هرون در مثلث ABC داریم:

$$P = \frac{a + b + c}{2} = \frac{15 + 13 + 4}{2} = 16$$

$$S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)} = \sqrt{16 \times 1 \times 3 \times 12} = 24$$

اگر مثلث ABC را به سه مثلث OAB, OAC, OBC تقسیم کنیم، داریم:

$$S_{OAB} + S_{OAC} + S_{OBC} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{1}{2}OH \times AB + \frac{1}{2}OH' \times AC + \frac{1}{2}OH'' \times BC = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 2 \times 13 + \frac{1}{2}OH'' \times 15 = 24 \Rightarrow 2 + 13 + \frac{1}{2}OH'' \times 15 = 24$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}OH'' \times 15 = 9 \Rightarrow OH'' = \frac{6}{5}$$