

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





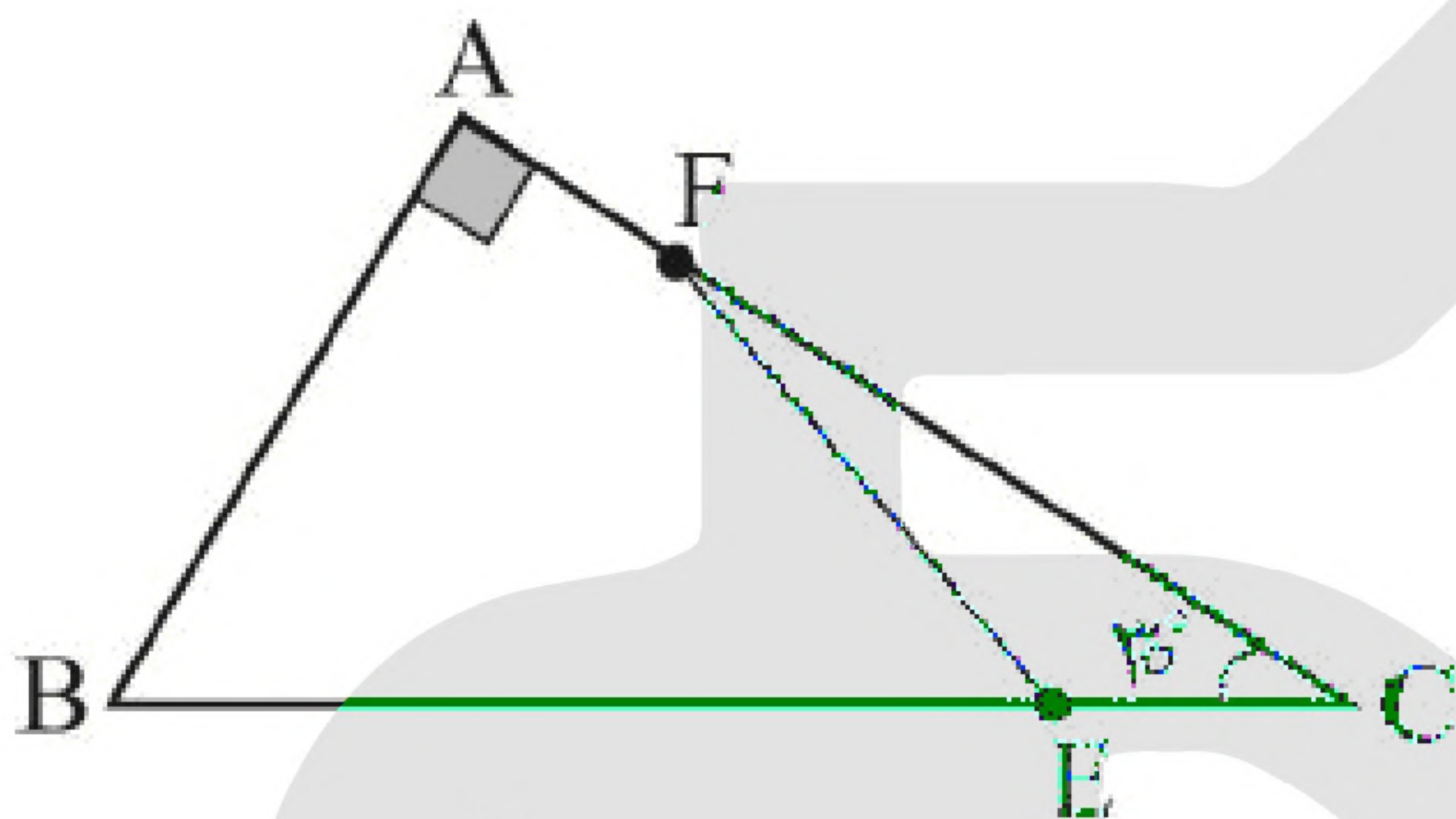
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنا به قضیه سینوس:

$$a \sin B = (4b^2 - 5) \sin A \Rightarrow a = (4b^2 - 5) \frac{\sin A}{\sin B} \Rightarrow a = (4b^2 - 5) \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow 4b^2 - b - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است

$$\Rightarrow BC = 2AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow BC = 4CE$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{3} = 4CE \Rightarrow CE = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6$$

ضلع مقابل به زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه، $\frac{\sqrt{3}}{2}$ طول وتر است

$$CF = AC - AF = 6 - 1 = 5$$

$$EF^2 = CE^2 + CF^2 - 2CE \times CF \times \cos 30^\circ$$

مطابق قضیه کسینوس ها در مثلث CEF:

$$EF^2 = 3 + 25 - 2 \times \sqrt{3} \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 13 \Rightarrow EF = \sqrt{13}$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در هر مثلث، مرکز ثقل مثلث (محل برخورد ۳ میانه ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می کند. با رسم هر میانه مساحت مثلث نصف می شود و در نهایت با رسم ۳ میانه مثلث به تعداد ۶ مثلث با مساحت یکسان ایجاد می شود، بنابراین $S_{AMGN} = 2S_{MGC}$:

$$BM = 12 \Rightarrow GM = \frac{1}{3} \times 12 = 4$$

$$CN = 16/5 \Rightarrow GC = \frac{2}{3} \times 16/5 = 11$$

$$AC = 18 \Rightarrow MC = \frac{1}{3} \times 18 = 9$$

$$\Rightarrow P = \frac{4 + 9 + 11}{2} = 12$$

مطابق قاعده هرون:

$$S_{MGC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-4)(12-11)(12-9)} = 12\sqrt{2}$$

$$S_{AMGN} = 2(12\sqrt{2}) = 24\sqrt{2}$$

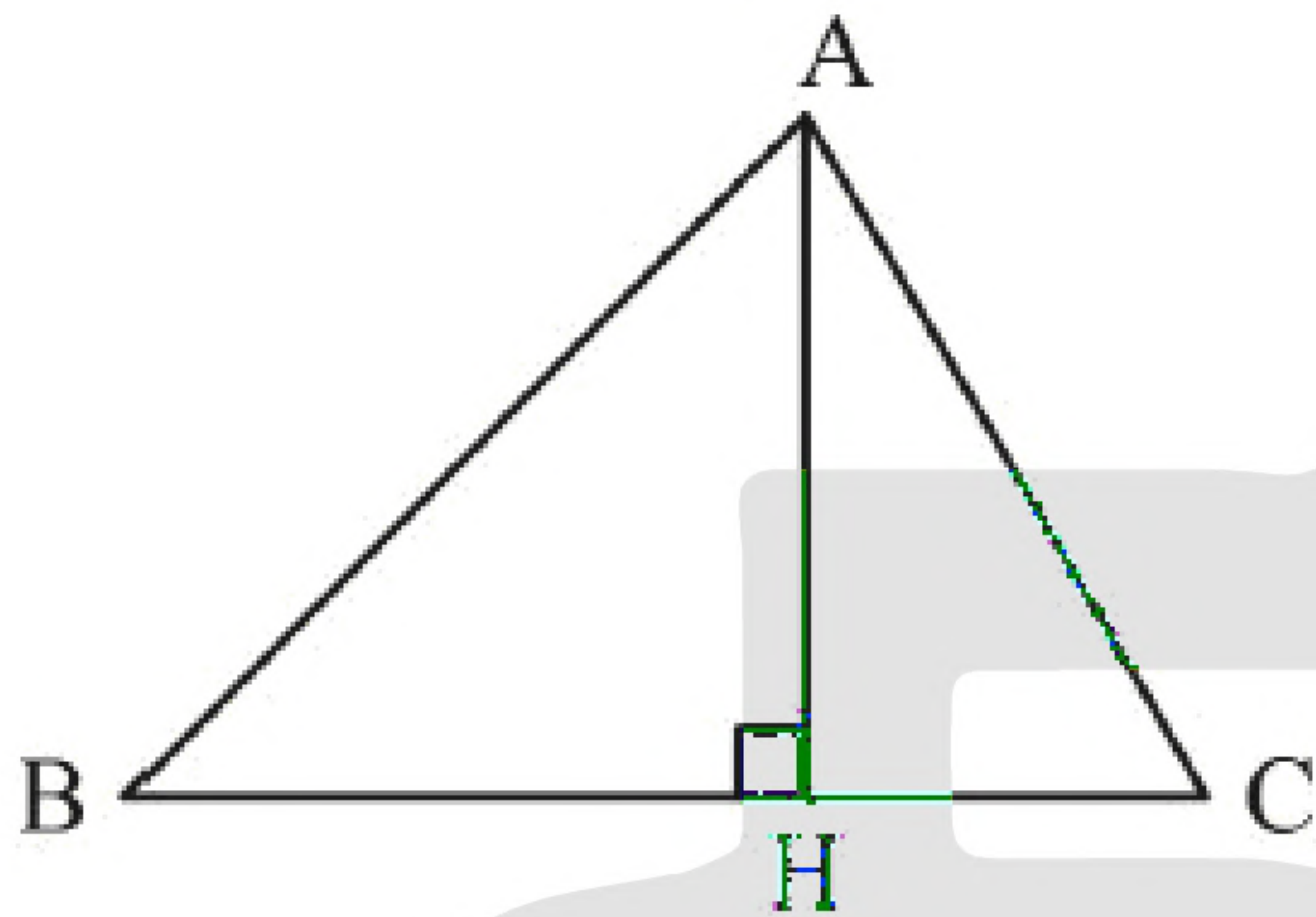


۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اندازه اضلاع مثلث ADE، اندازه زاویه A برابر 60° است. بنابراین:

قضیه کسینوس ها: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A}$, $\hat{A} = 60^\circ$

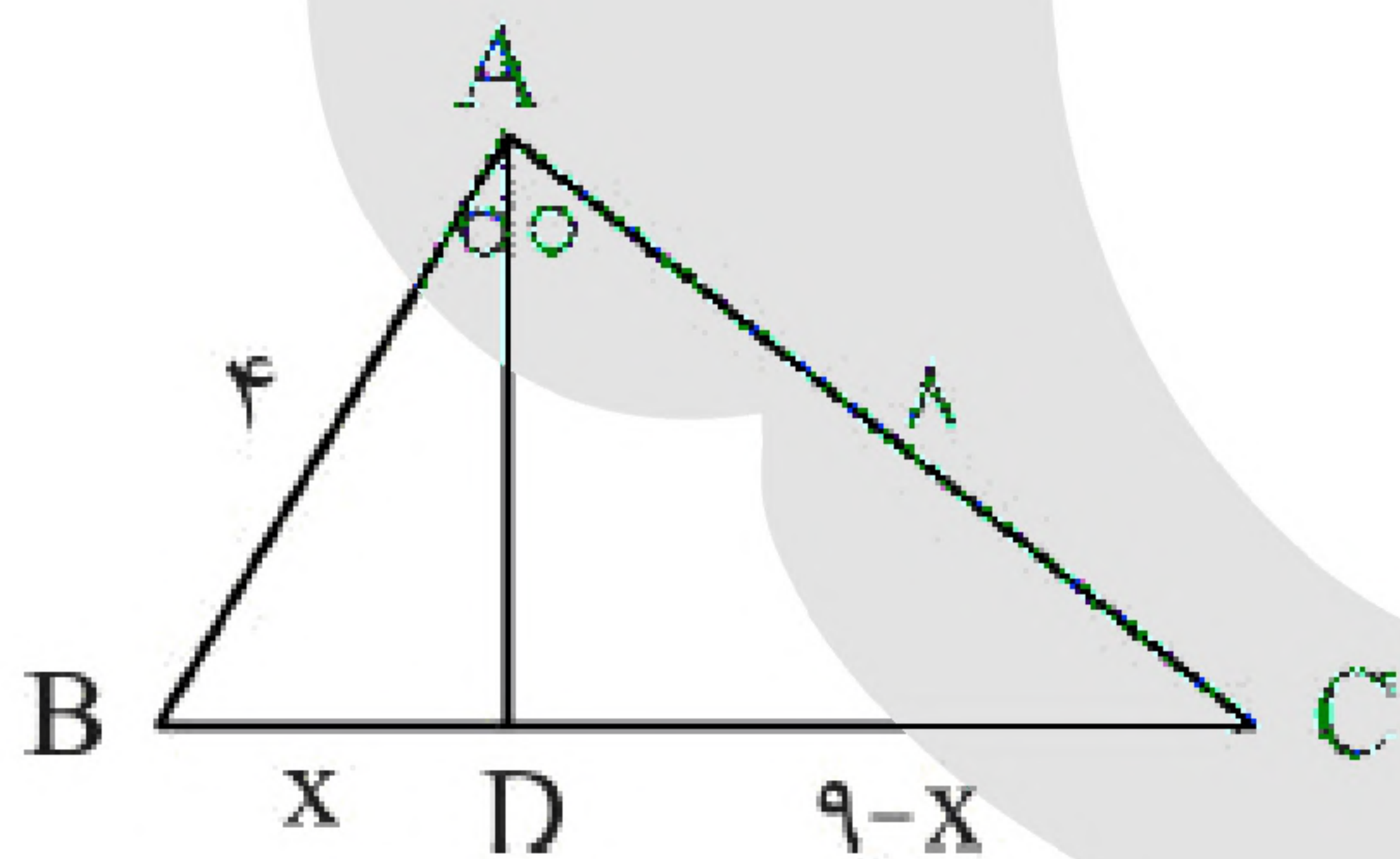
$$\Rightarrow BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 28 \Rightarrow BC = 2\sqrt{7}$$

مساحت مثلث ABC = $\frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$



مساحت مثلث ABC = $\frac{1}{2} \times AH \times BC$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times AH \times 2\sqrt{7} \Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7}$$



۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

قضیه سینوس ها: $\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{4} = 2 \Rightarrow AC = 8$$

قضیه سینوس ها: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{x}{9-x}$

$$\Rightarrow x = 3 \Rightarrow \begin{cases} BD = 3 \\ DC = 6 \end{cases}$$

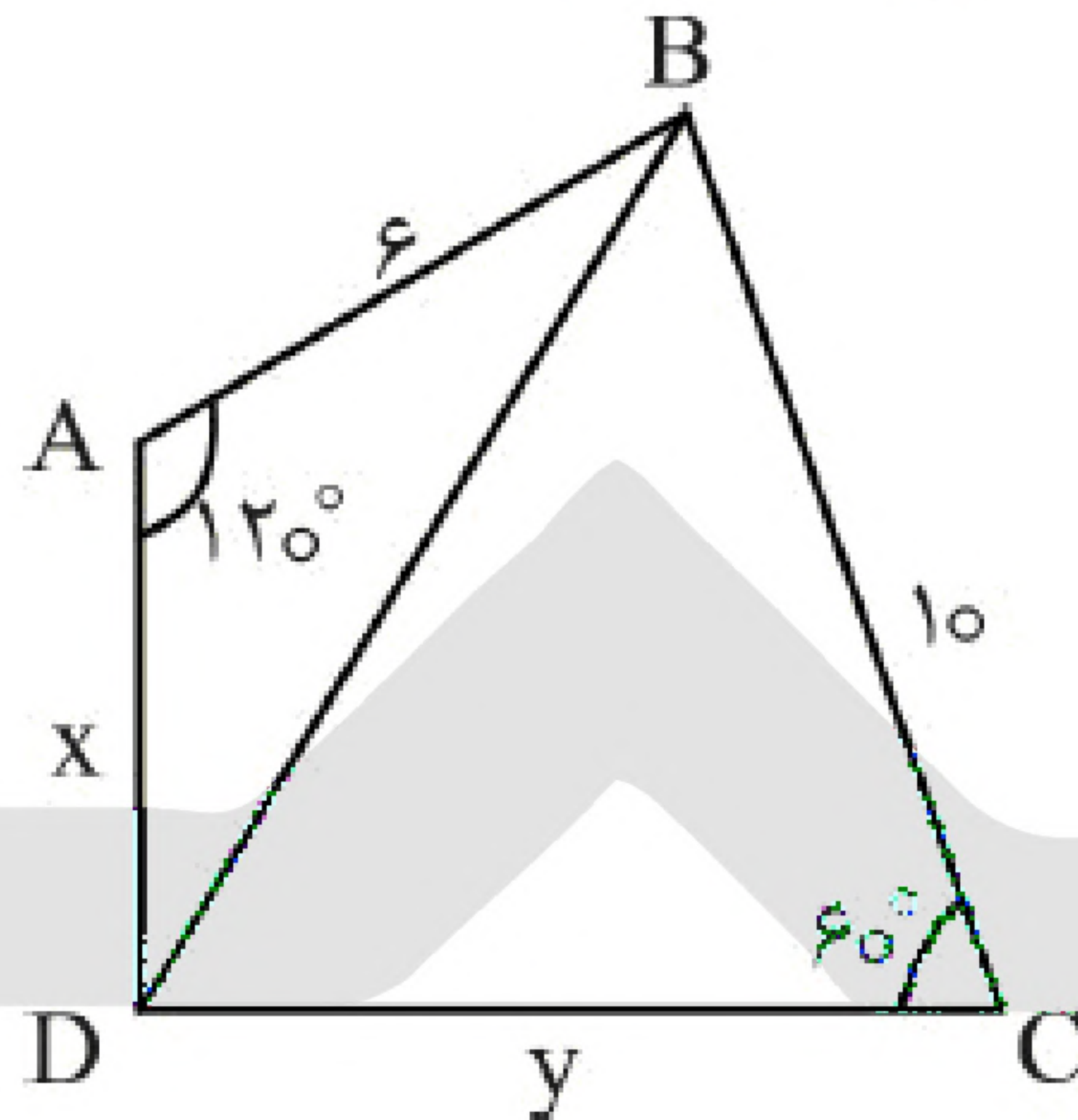
$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \Rightarrow AD^2 = 4 \times 8 - 3 \times 6 = 14 \Rightarrow AD = \sqrt{14}$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{محدّی } ABCD \Rightarrow x + 10 = y + 6 \Rightarrow y = 4 + x \quad (1)$$

$$\text{محدّی } ABCD \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A} = 120^\circ} \hat{C} = 60^\circ \quad (2)$$



در دو مثلث $\triangle ADB$ و $\triangle BDC$ قضیه کسینوس را می‌نویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \triangle ADB : BD^2 &= x^2 + 36 - 2x(6)\left(-\frac{1}{2}\right) = x^2 + 6x + 36 \\ \triangle BDC : BD^2 &= y^2 + 100 - 2y(10)\left(\frac{1}{2}\right) = y^2 - 10y + 100 \end{aligned} \right\}$$

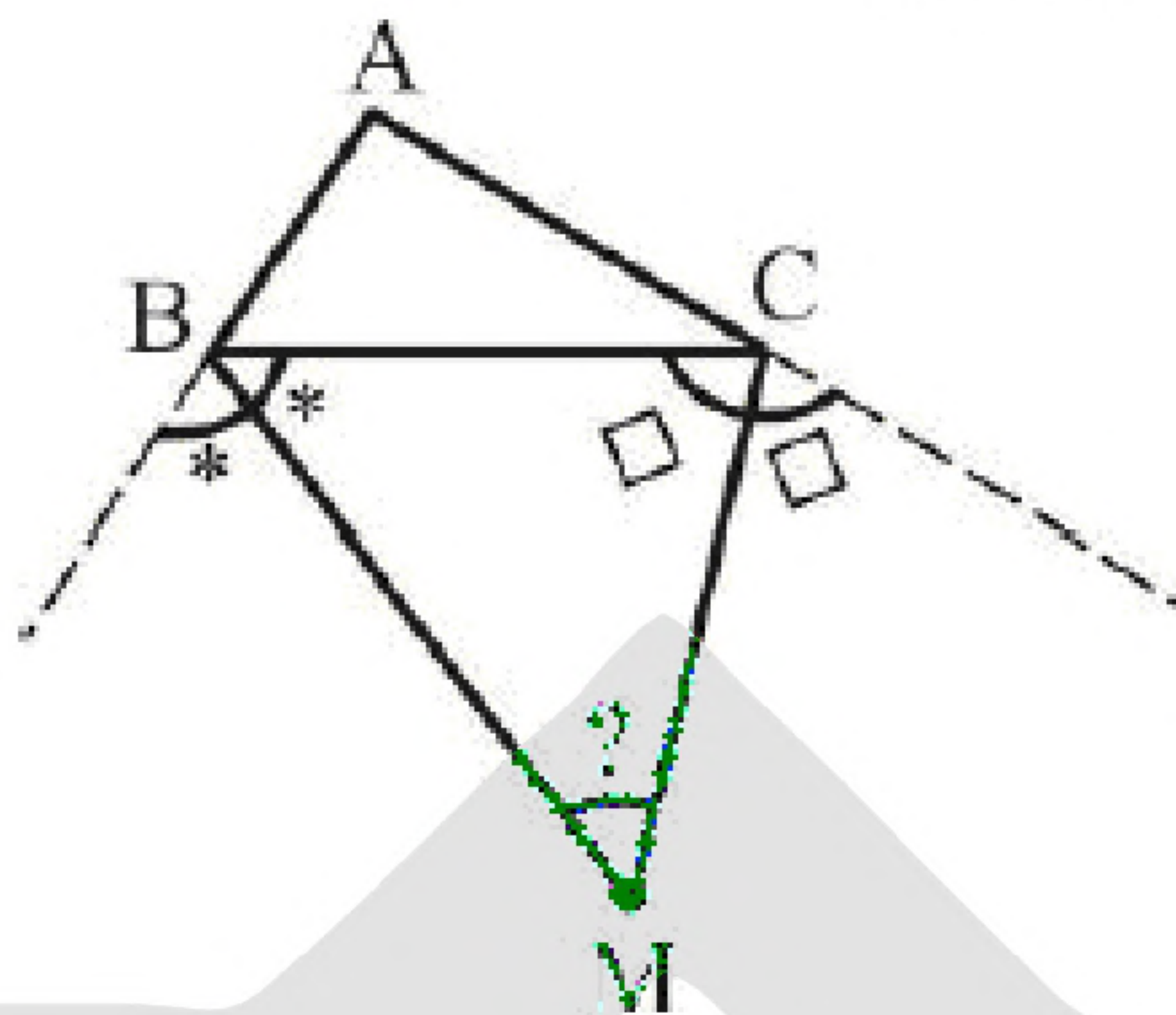
$$\Rightarrow x^2 + 6x + 36 = y^2 - 10y + 100 \xrightarrow{(1)} x^2 + 6x + 36 = (4 + x)^2 - 10(4 + x) + 100$$

$$\Rightarrow x = 5, y = 9$$

$$x^2 + y^2 = 25 + 81 = 106$$



۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. زاویه \widehat{BMC} را به طور خلاصه با \widehat{M} نمایش می‌دهیم و می‌دانیم $\widehat{M} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$ طبق قضیه سینوس‌ها برای دو مثلث ABC و BMC :



$$\frac{\text{محیط دایره محیطی BMC}}{\text{محیط دایره محیطی ABC}} = \frac{2\pi R_{BMC}}{2\pi R_{ABC}} = \frac{R_{BMC}}{R_{ABC}}$$

$$= \frac{\frac{BC}{2 \sin \widehat{M}}}{\frac{BC}{2 \sin \widehat{A}}} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin \widehat{M}} = \frac{\sin \widehat{A}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{A}}{2}\right)} = \frac{\sin \widehat{A}}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\widehat{A}}{2} \cdot \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{\cos \frac{\widehat{A}}{2}} = 2 \sin \frac{\widehat{A}}{2}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی نیمساز داخلی در مثلث داریم:

$$AD = \frac{2bc \cdot \cos \frac{\widehat{A}}{2}}{b+c}, \quad \widehat{A} = 60^\circ$$

در معادله $x^2 - 4\sqrt{3}x + 5 = 0$ بدون حل می‌دانیم که اگر b, c ریشه‌های معادله باشند:

$$b+c = 4\sqrt{3}, \quad bc = 5$$

$$AD = \frac{2(5) \times \cos 30^\circ}{4\sqrt{3}} = \frac{2(5) \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{4\sqrt{3}} = 1/25$$



۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه کسینوس‌ها در مثلث ADE می‌نویسیم:

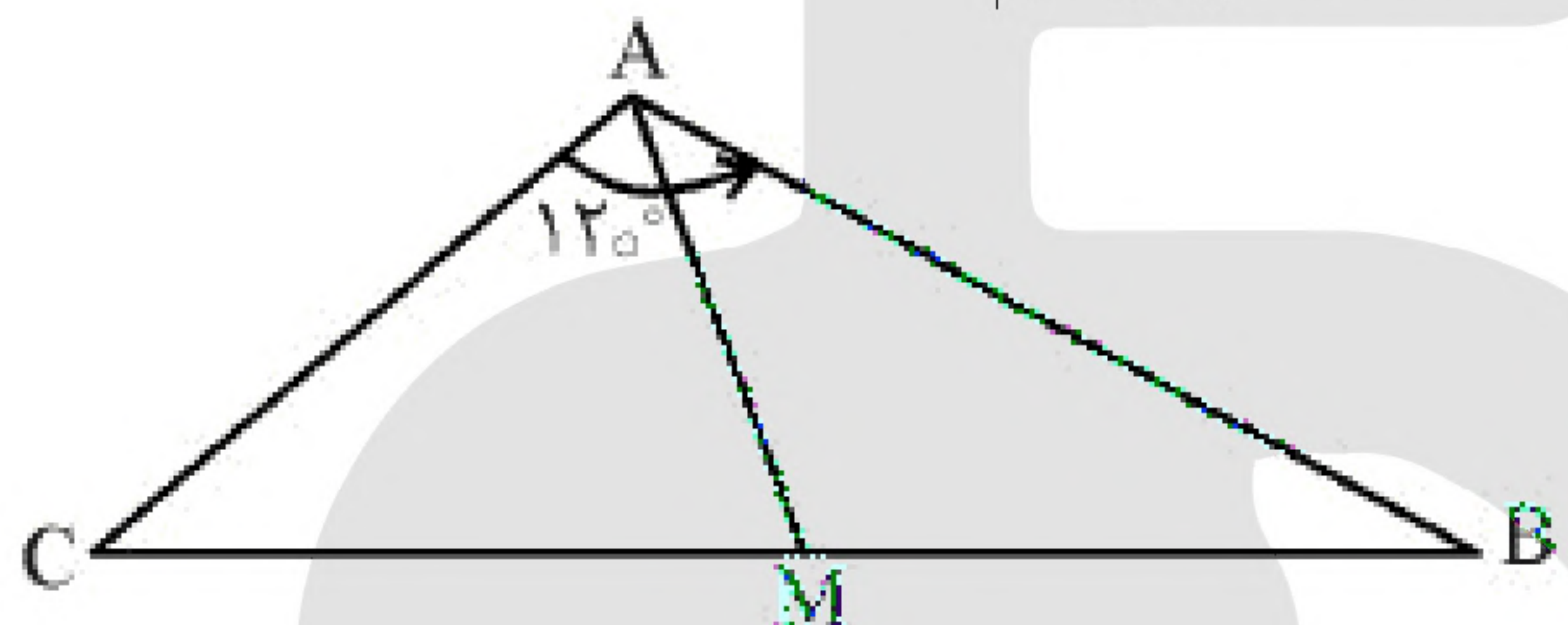
$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \times AE \times \cos \hat{A} \Rightarrow 5^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos \hat{A} \\ \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{5}{9}$$

حال اگر قضیه کسینوس‌ها را در مثلث ABC بنویسیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \hat{A} \\ BC^2 = 10^2 + 9^2 - 2 \times 10 \times 9 \times \frac{5}{9} = 81 \Rightarrow BC = 9$$

$$ABC \text{ محیط مثلث} = 10 + 9 + 9 = 28$$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه کسینوس‌ها در مثلث ABC می‌نویسیم:

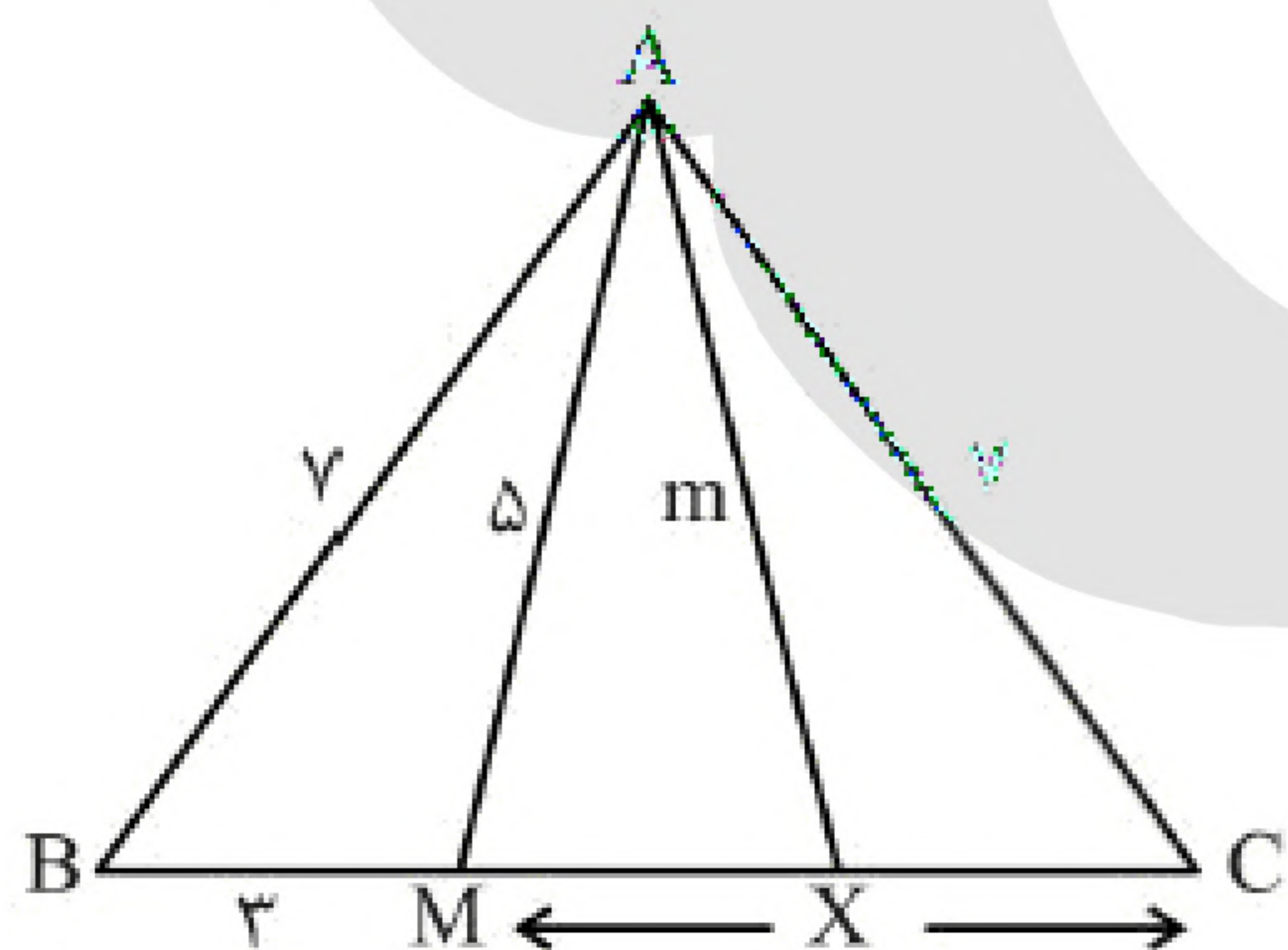


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cdot \cos \hat{A} \\ \Rightarrow BC^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 63$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \quad \text{مطابق قضیه میانه‌ها}$$

$$3^2 + 6^2 = 2AM^2 + \frac{63}{2} \Rightarrow AM^2 = \frac{27}{4} \Rightarrow AM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه استوارت در مثلث ABC:



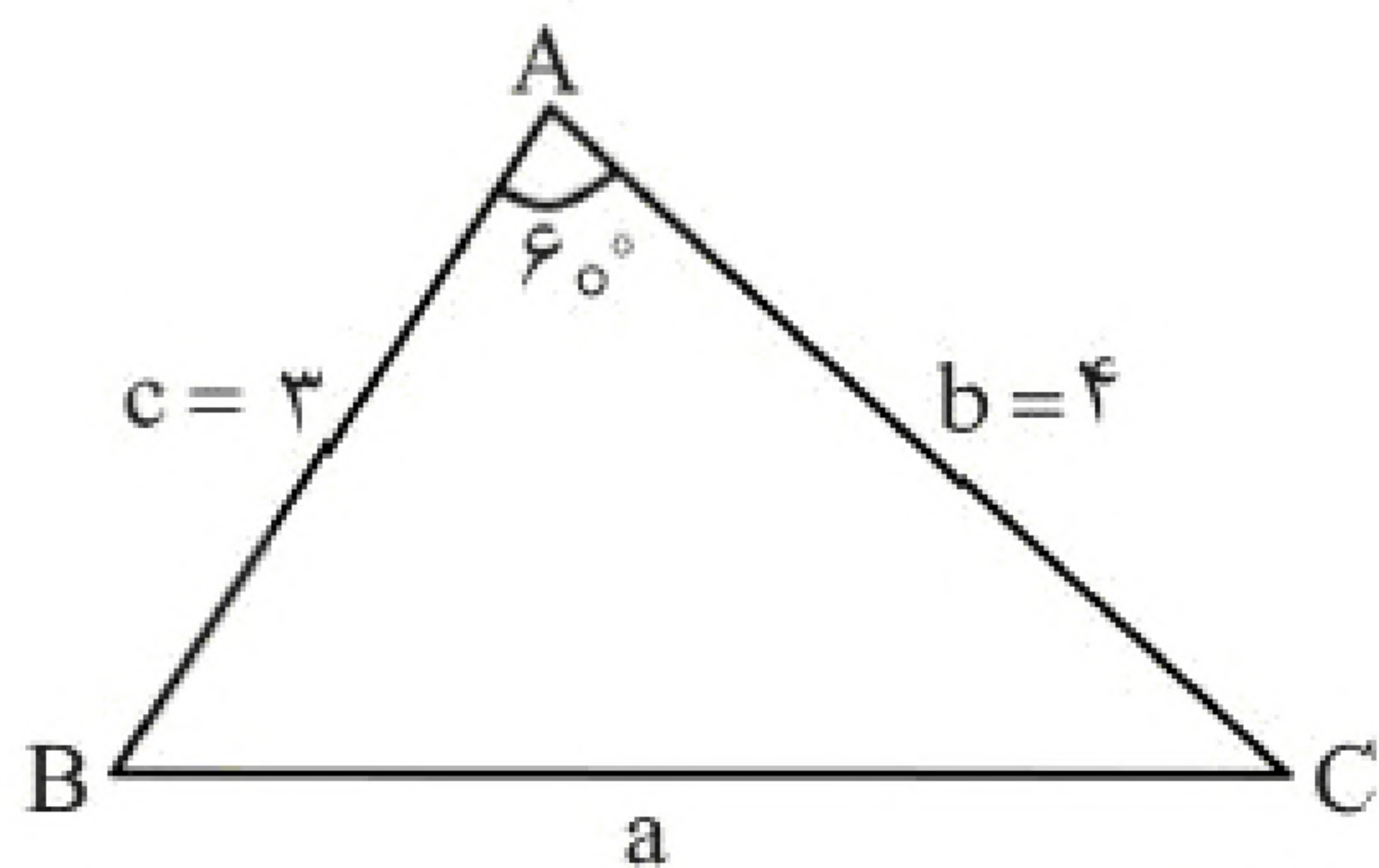
$$AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MA = AM^2 \cdot BC + MB \cdot MC \cdot BC \\ 49x + 25 \times 3 = m^2(3+x) + 3 \times x \times (3+x) \\ x^2 - 5x - 24 = 0 \\ (x-8)(x+3) = 0 \xrightarrow{x>0} x=8$$

$$MAC \text{ مثلث در میانه‌ها} : AM^2 + AC^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}MC^2$$

$$25 + 49 = 2m^2 + \frac{1}{2}(64) \Rightarrow m = \sqrt{21}$$



۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. قضیه کسینوس‌ها:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{1}{2}$$

$$a = \sqrt{13}$$

شعاع دایره محیطی: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = \sqrt{\frac{13}{3}}$

$$S = \pi R^2 = 3 \times \left(\sqrt{\frac{13}{3}} \right)^2 = 13$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه نیمساز می‌نویسیم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

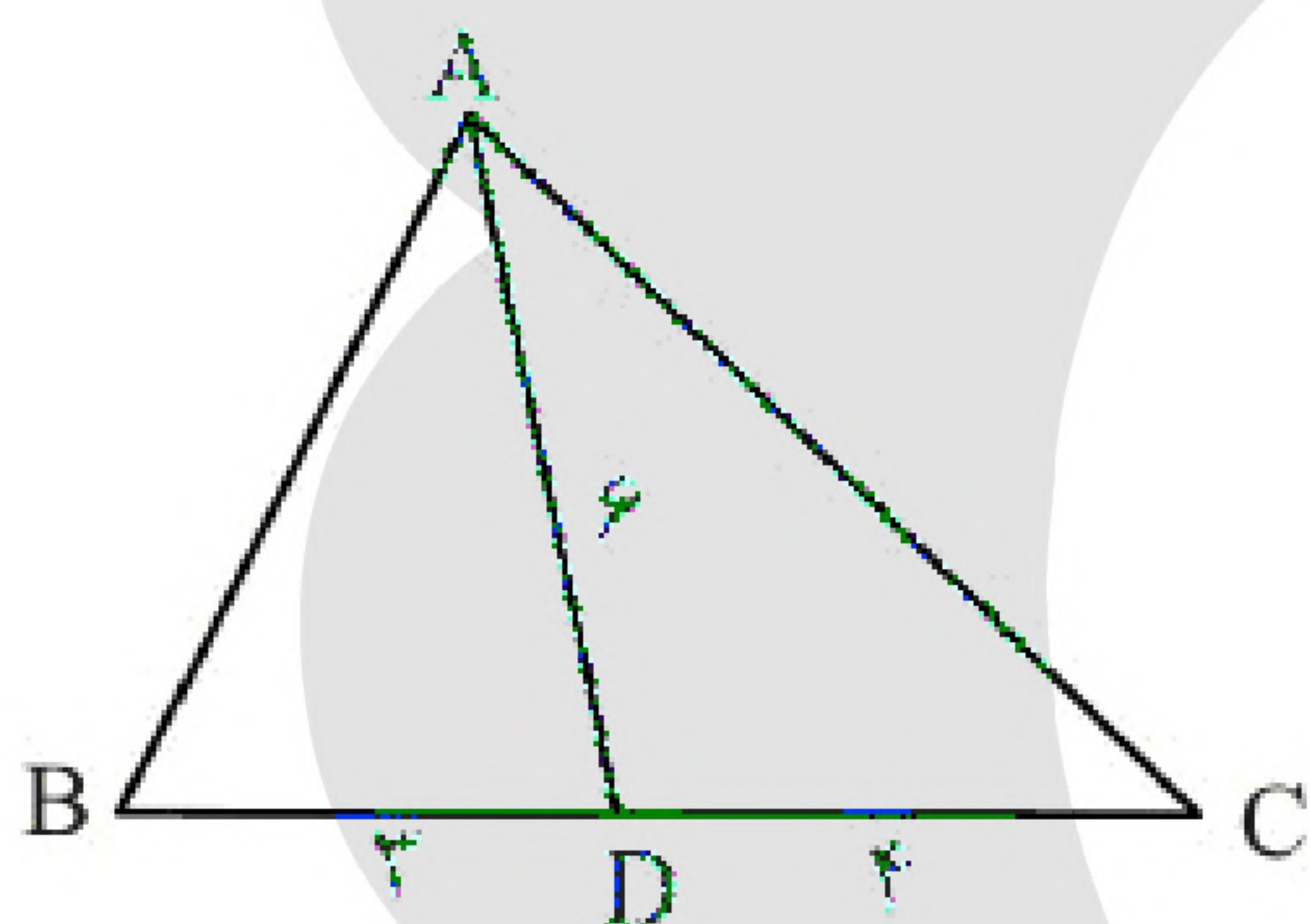
$$36 = AB \times AC - 3 \times 4$$

$$AB \times AC = 48 \quad (1)$$

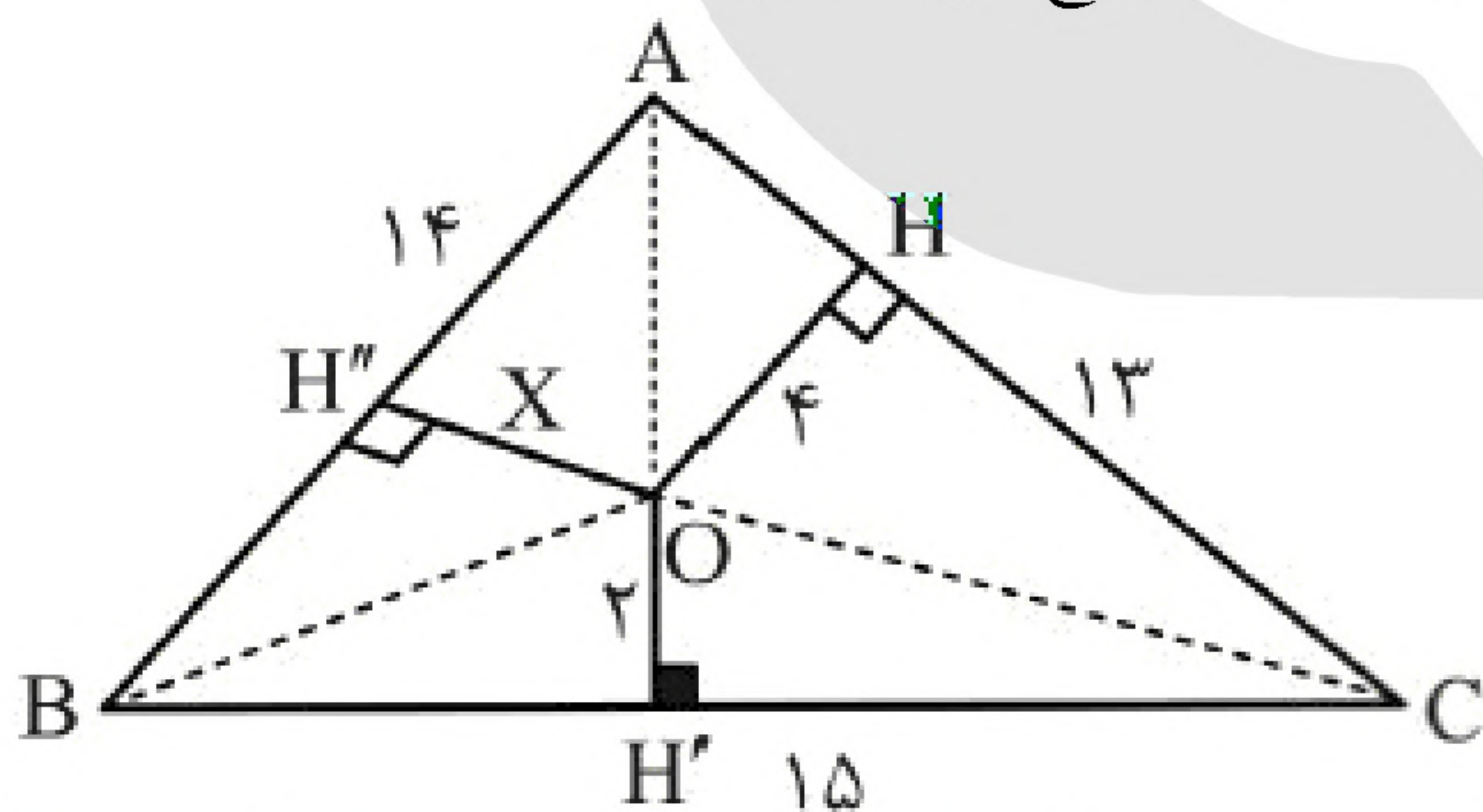
$$AD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AB = 6, AC = 8$$

$$\Delta ABC \text{ محیط} = 6 + 7 + 8 = 21$$



۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم فاصله‌ی نقطه‌ی O درون مثلث از ضلع متوسط X باشد.



$$P = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$= \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84$$

$$S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOC} = S_{\Delta ABC}$$

$$\frac{1}{2} \times 14 \times x + \frac{1}{2} \times 15 \times 2 + \frac{1}{2} \times 13 \times 4 = 84 \Rightarrow 7x + 15 + 26 = 84 \Rightarrow x = \frac{43}{7}$$



۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می دانیم اگر d_a طول نیمساز زاویه A باشد، آنگاه:

$$d_a = \frac{2AB \times AC \times \cos \frac{A}{2}}{AB + AC} \quad (A \text{ نیمساز راس})$$

(چون $AM = MN = AN = 1$) $\triangle AMN: \hat{A} = 60^\circ$ متساوی الاضلاع

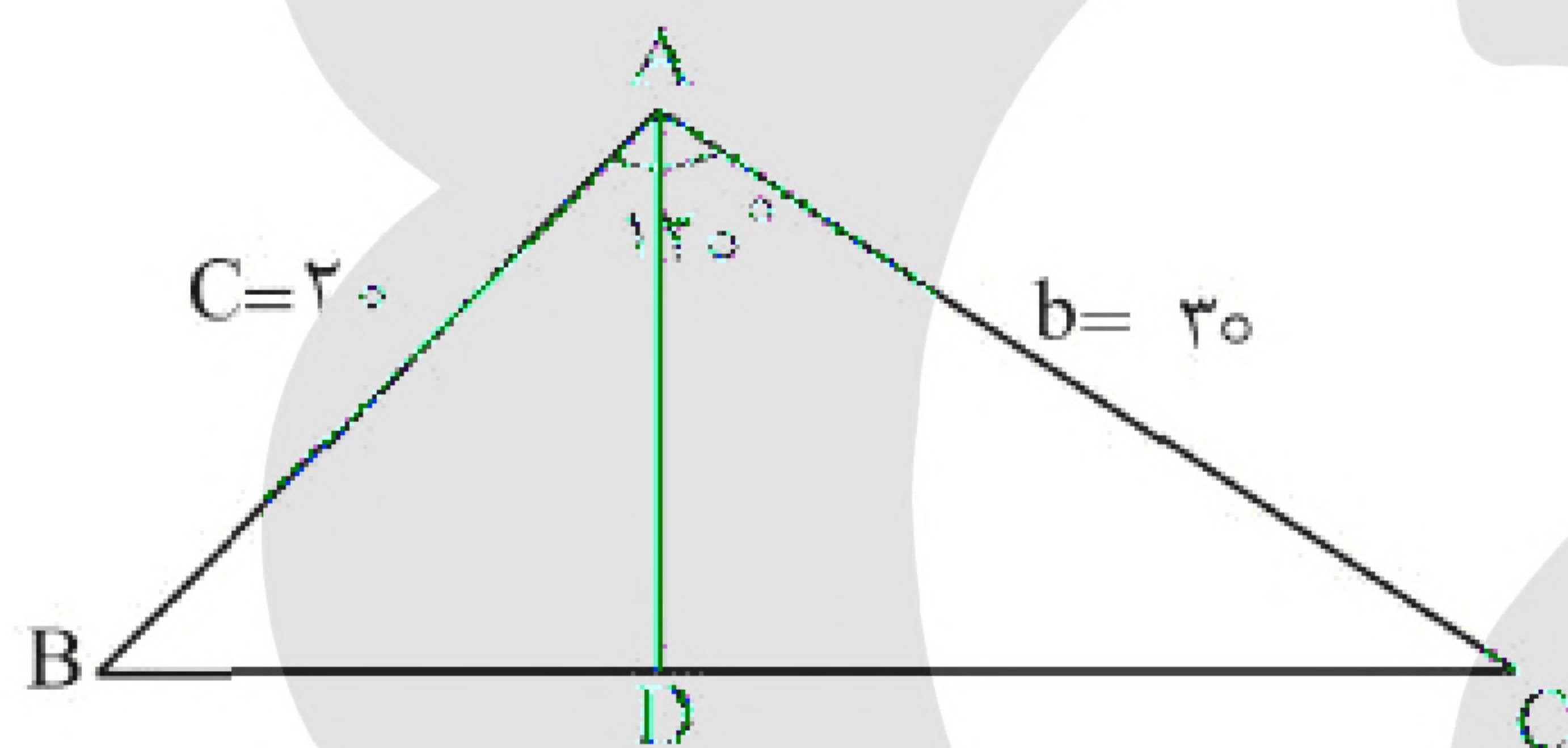
$$d_a = \frac{2(8)(6) \times \cos 30^\circ}{8 + 6} = \frac{24}{5} \sqrt{3}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos A$$

$$BC^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$BC \times d_a = 2\sqrt{13} \times \frac{24}{5} \sqrt{3} = \frac{48\sqrt{39}}{5}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون زاویه $\hat{A} = 120^\circ$ منفرجه و بزرگترین زاویه مثلث است، بنابراین نیمساز آن کوچکترین نیمساز مثلث است:



$$\text{طول نیمساز} = AD = \frac{2b \cdot c \cdot \cos \frac{A}{2}}{b + c}$$

$$AD = \frac{2 \times 20 \times 30 \times \cos 60^\circ}{20 + 30}$$

$$AD = 12$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\triangle ABC \text{ در قضیه استوارت: } AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$$

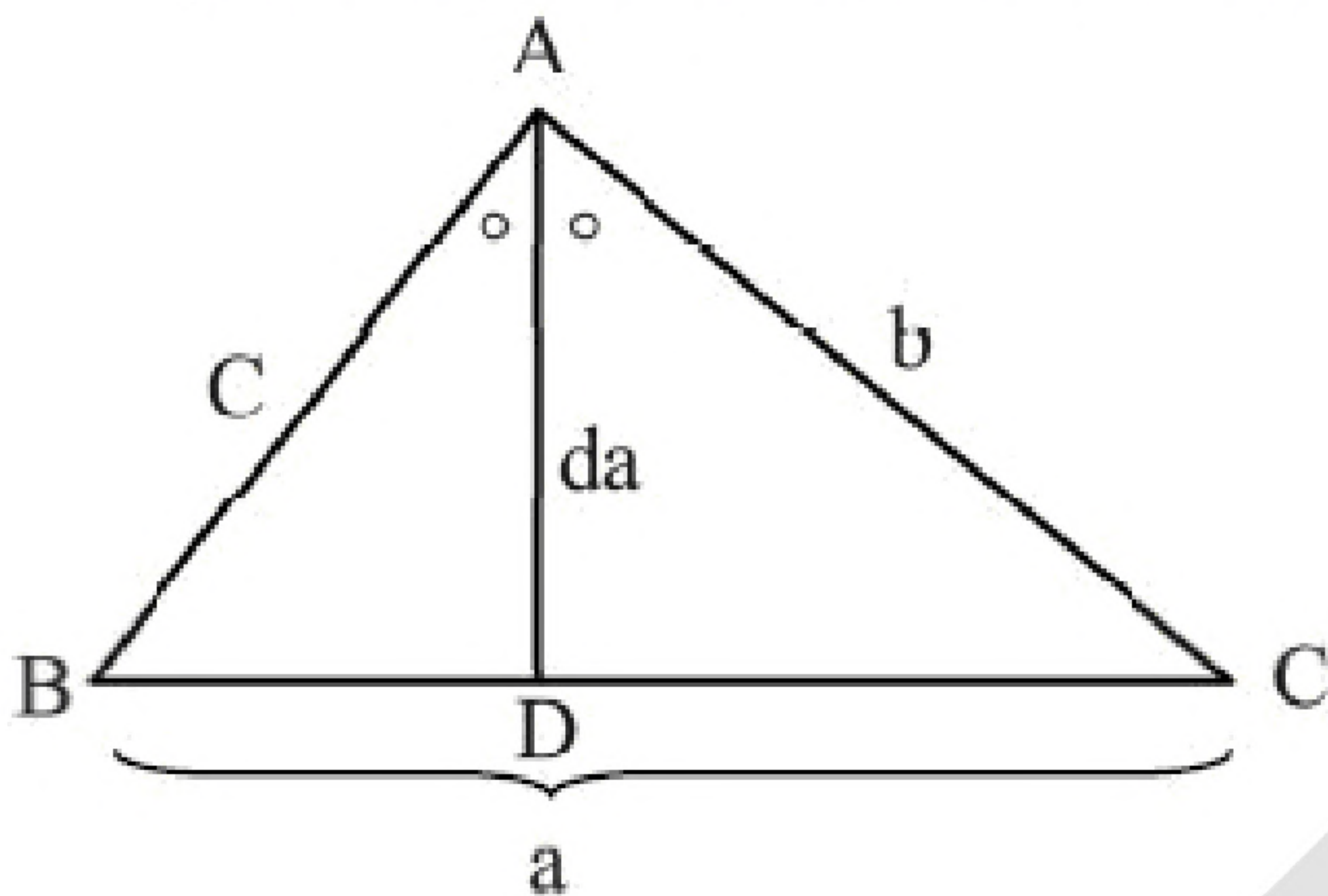
$$81 \times 8 + AC^2 \times 4 = 49 \times 12 + 4 \times 8 \times 12 \Rightarrow AC = 9$$

$$\text{قضیه میانه‌ها: } AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \Rightarrow 81 + 81 = 2AM^2 + 72 \Rightarrow AM^2 = 45$$

$$AC + AM^2 = 9 + 45 = 54$$



۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از مسئله کتاب درسی در مبحث طول نیمساز زاویه‌ی داخلی مثلث داریم:



$$da = \frac{2bc \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c} \quad (\text{نیمساز راس } A)$$

$$d_a = \frac{2 \times 30 \times 60 \times \frac{1}{2}}{30 + 60} = 20$$

توجه: کوتاه‌ترین نیمساز مربوط به بزرگ‌ترین زاویه (120°) است.

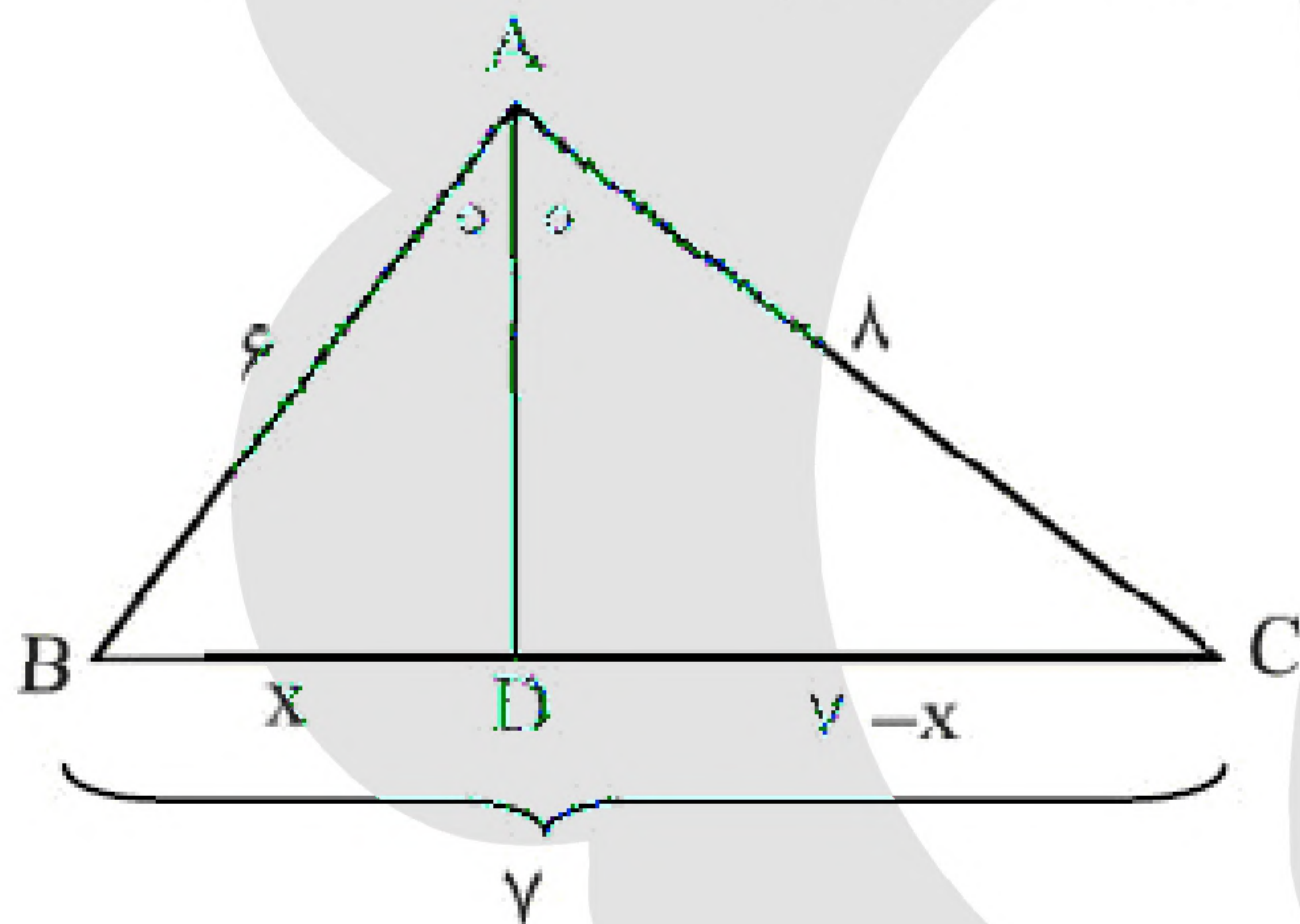
۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $2P = 9 + 10 + 17 \Rightarrow P = 18$

$$S_{\Delta} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{18(18-9)(18-10)(18-17)}$$

$$S_{\Delta} = 36 \Rightarrow 36 = \frac{9 \times h}{2} \Rightarrow h = 8$$

بزرگ‌ترین ارتفاع مثلث متناظر با کوچک‌ترین ضلع مثلث است $S_{\Delta} = 36$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی نیمساز زاویه داخلی مثلث می‌نویسیم:



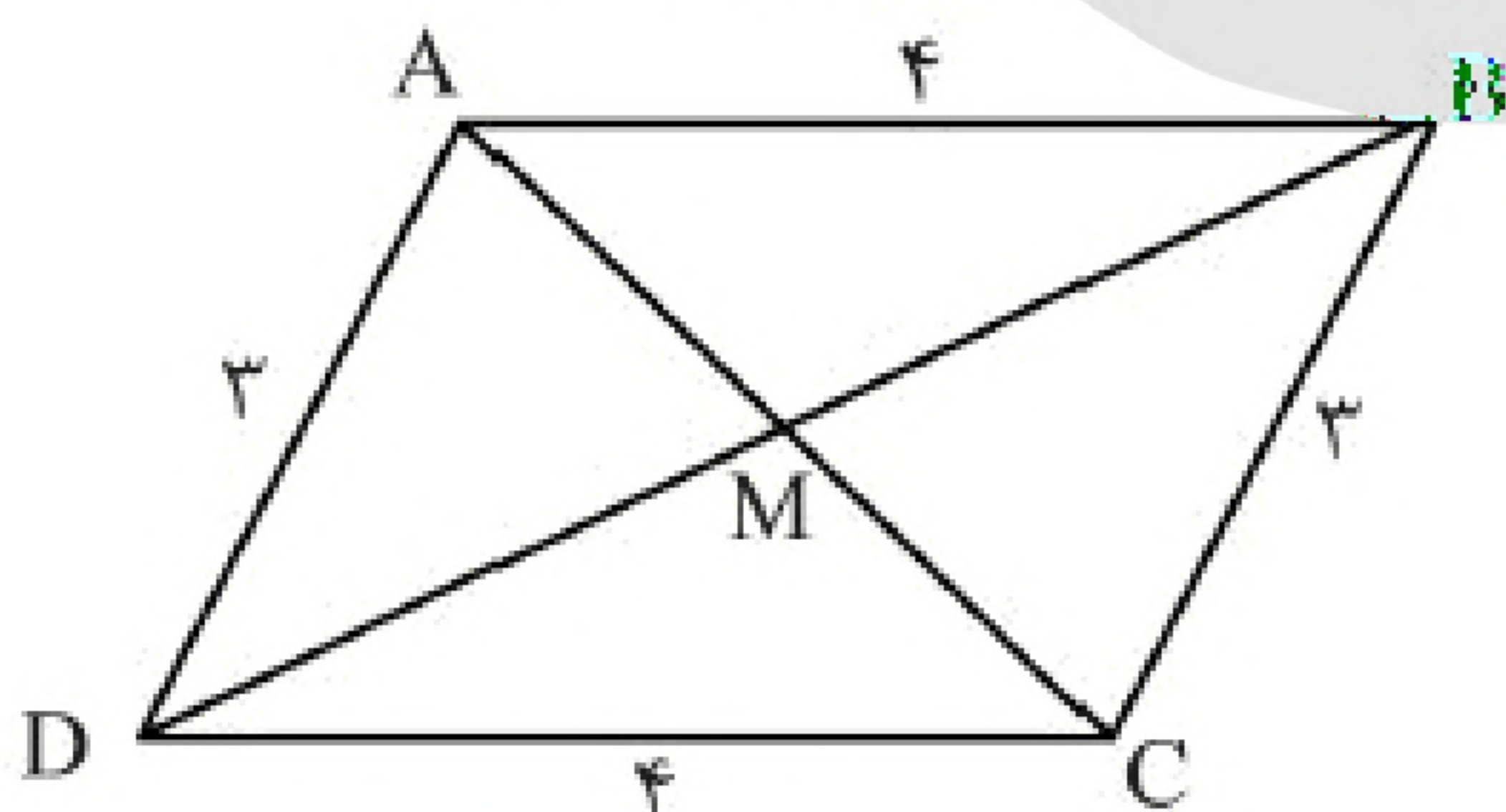
$$AD : \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \quad \text{نیمساز}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{x}{7-x} \Rightarrow x = 3 \quad \begin{cases} BD = 3 \\ DC = 4 \end{cases}$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

$$AD^2 = 6 \times 8 - 3 \times 4 = 36 \Rightarrow AD = 6$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در متوازی‌الاضلاع، قطرهای هم‌دیگر را نصف می‌کنند. با استفاده از قضیه میانه‌ها:



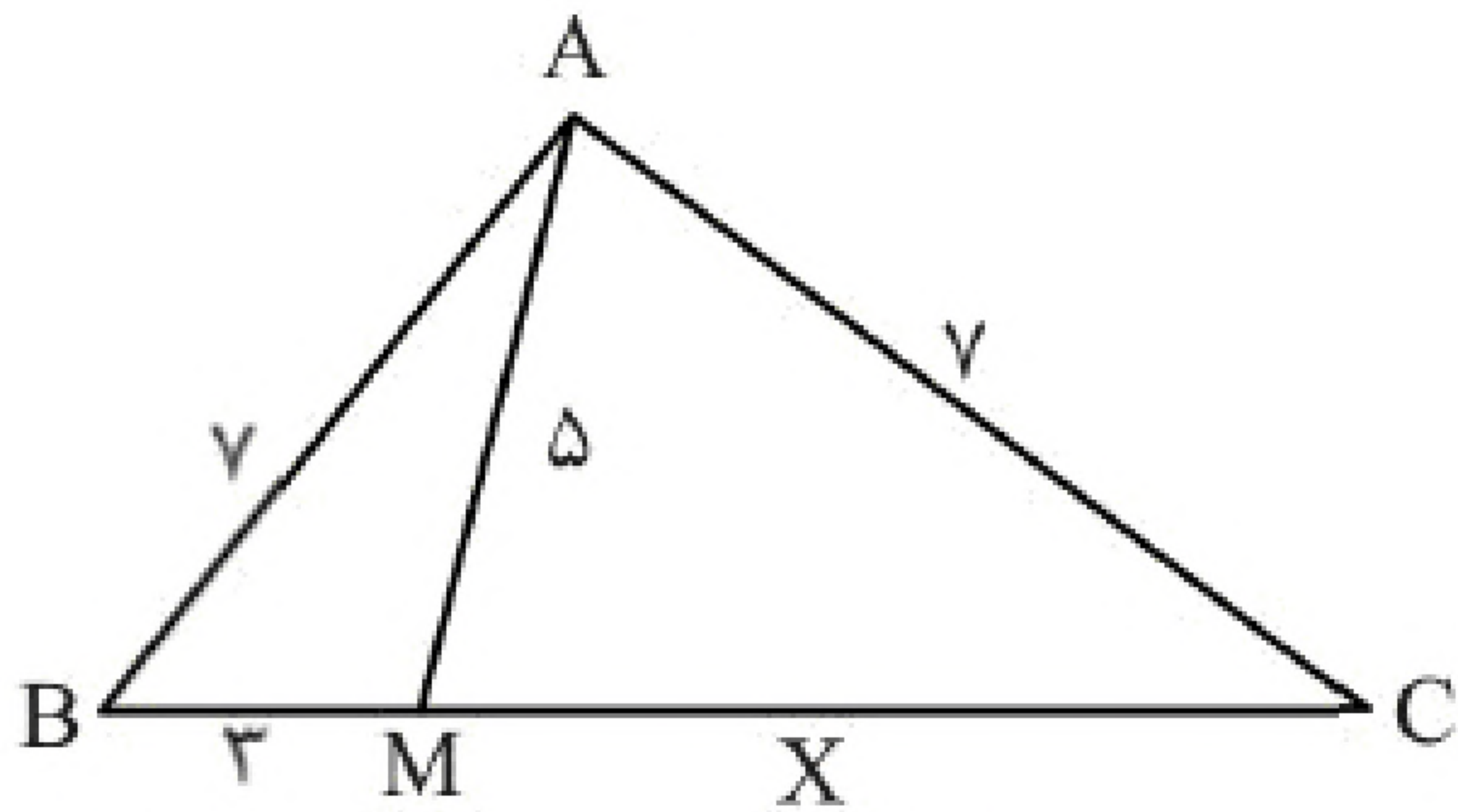
$$\left. \begin{aligned} \triangle ABD : 3^2 + 4^2 &= 2AM^2 + \frac{BD^2}{2} \\ \triangle BCD : 3^2 + 4^2 &= 2MC^2 + \frac{BD^2}{2} \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\Rightarrow 2(3^2 + 4^2) = AC^2 + BD^2$$

$$\text{مجموع مربعات قطرهای} = AC^2 + BD^2 = 50$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه استوارت:



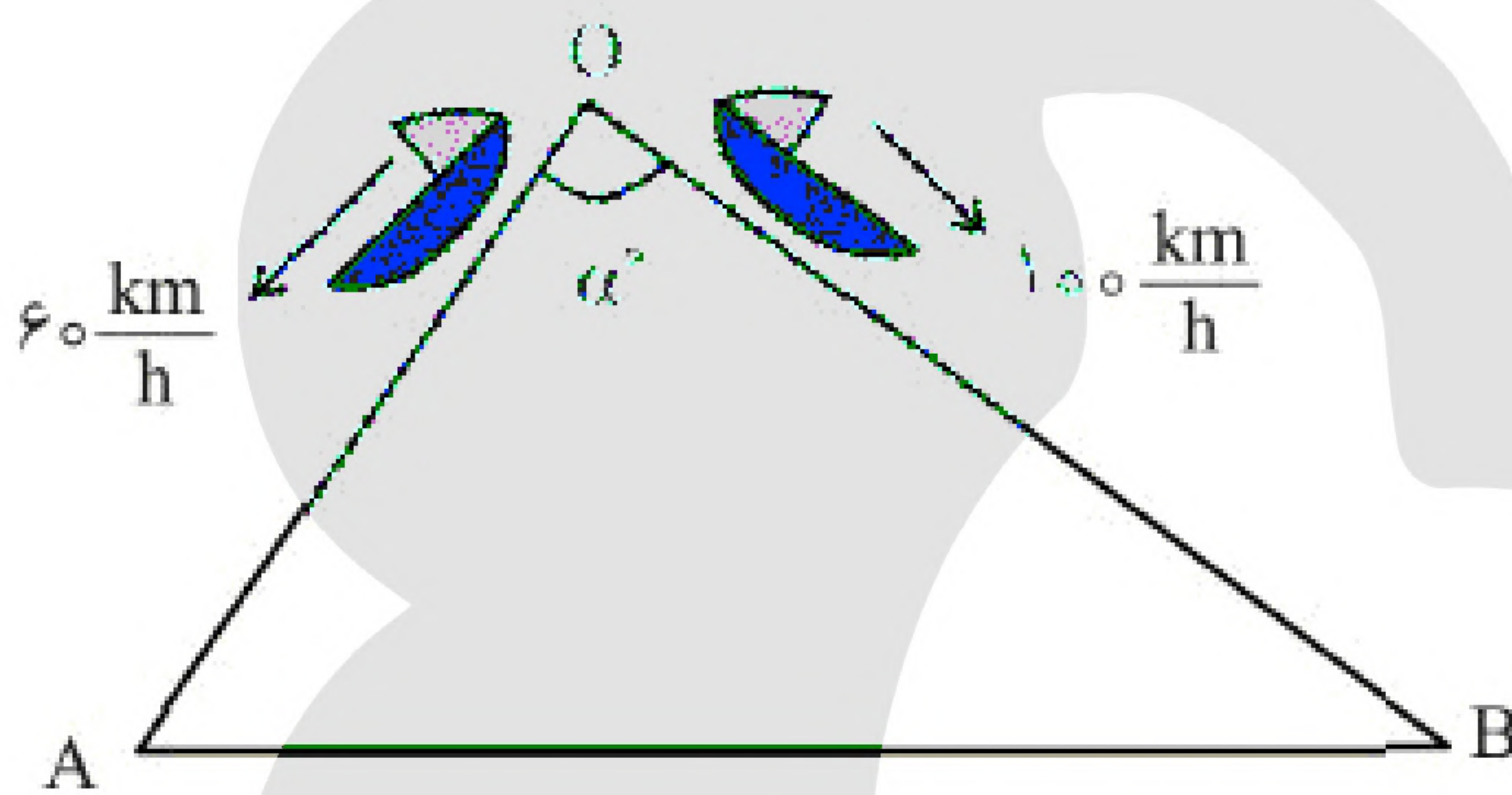
$$\begin{aligned} AB^2 \cdot MC + AC^2 \cdot MB \\ = AM^2 \cdot BC + MB \cdot MC \cdot BC \\ 49x + 49 \times 3 = 25(3 + x) + 3x(3 + x) \\ x^2 - 5x - 24 = 0 \\ (x - 8)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 8 \quad x = -3 \text{ غ ق ق} \end{aligned}$$

$\triangle AMC$: $P = \frac{5 + 7 + 8}{2} = 10$ نصف محیط

قاعده هرون $S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)}$

$$S = \sqrt{10(10 - 5)(10 - 7)(10 - 8)} \Rightarrow S = 10\sqrt{3}$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بعد از ۳۰ دقیقه (نیم ساعت):



$$OA = 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ km}$$

$$OB = 100 \times \frac{1}{2} = 50 \text{ km}$$

$$AB = 70 \text{ km}$$

قضیه کسینوس ها: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \times OB \times \cos \alpha$

$$70^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل هر ضلع قطر نیم دایره است:

$$\frac{S_{\triangle AB}}{S_{\triangle AC}} = \frac{\frac{1}{2}\pi(AB)^2}{\frac{1}{2}\pi(AC)^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

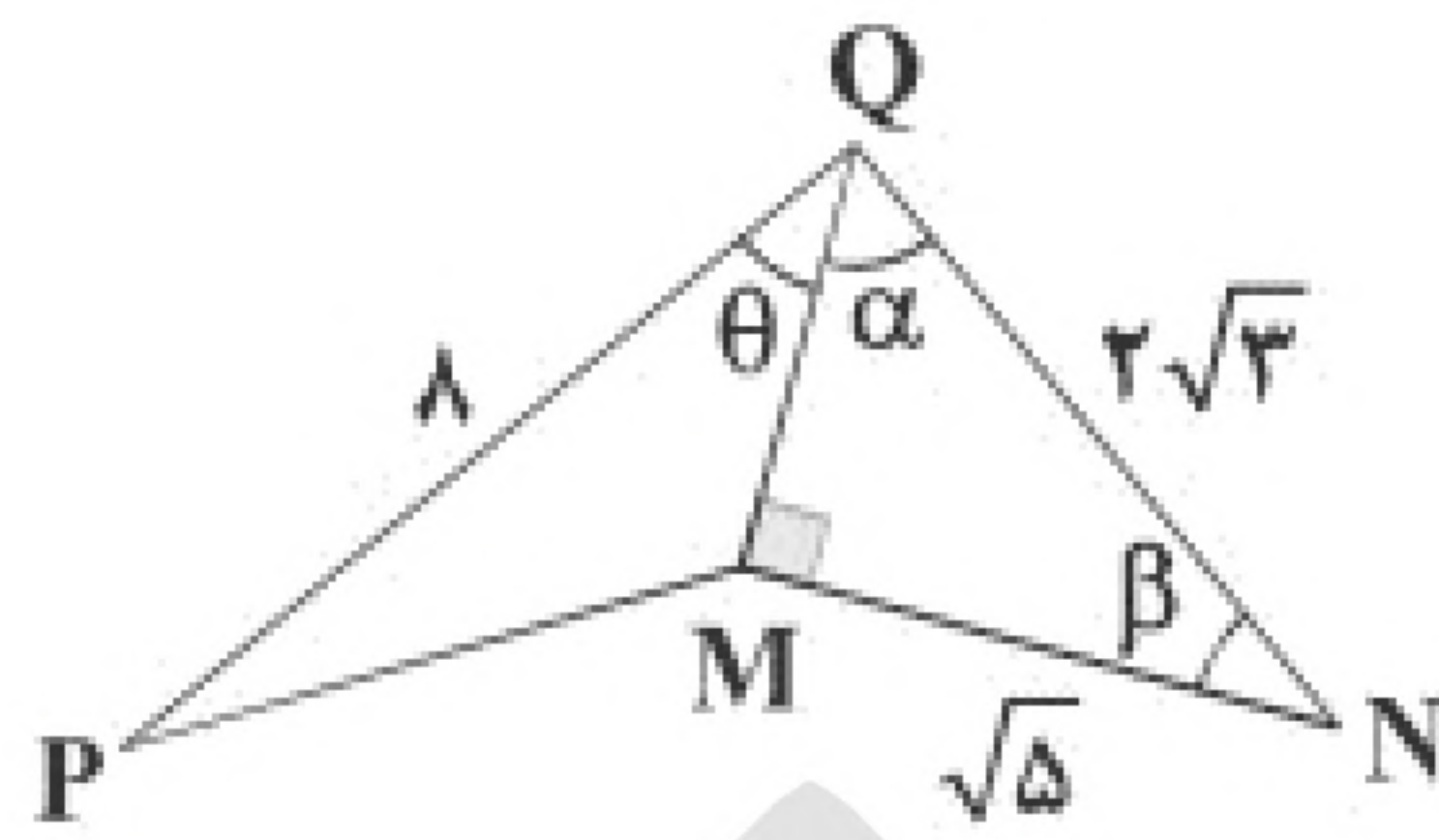
مطابق قضیه سینوس ها $\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \begin{cases} AB = 2R \sin 45^\circ \\ AC = 2R \sin 30^\circ \end{cases}$

$$\frac{S_{\triangle AB}}{S_{\triangle AC}} = \frac{(2R \sin 45^\circ)^2}{(2R \sin 30^\circ)^2} = \frac{2R^2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2R^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2 \Rightarrow S_{\triangle AB} = 2S_{\triangle AC} = 2(20) = 40$$



۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} \widehat{MQN} : \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ \\ \widehat{PQN} = 90^\circ \Rightarrow \hat{\alpha} + \hat{\theta} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{\beta}$$



$$\widehat{MQN} : MQ^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \Rightarrow MQ = \sqrt{7}$$

$$\widehat{MQN} : \sin(\beta) = \frac{QM}{QN} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

$$S_{PQM} = \frac{1}{2} \times QP \times QM \times \sin(\theta) = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} = \frac{14\sqrt{3}}{3}$$

$$S_{MQN} = \frac{1}{2} \times QM \times MN = \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{35}}{2}$$

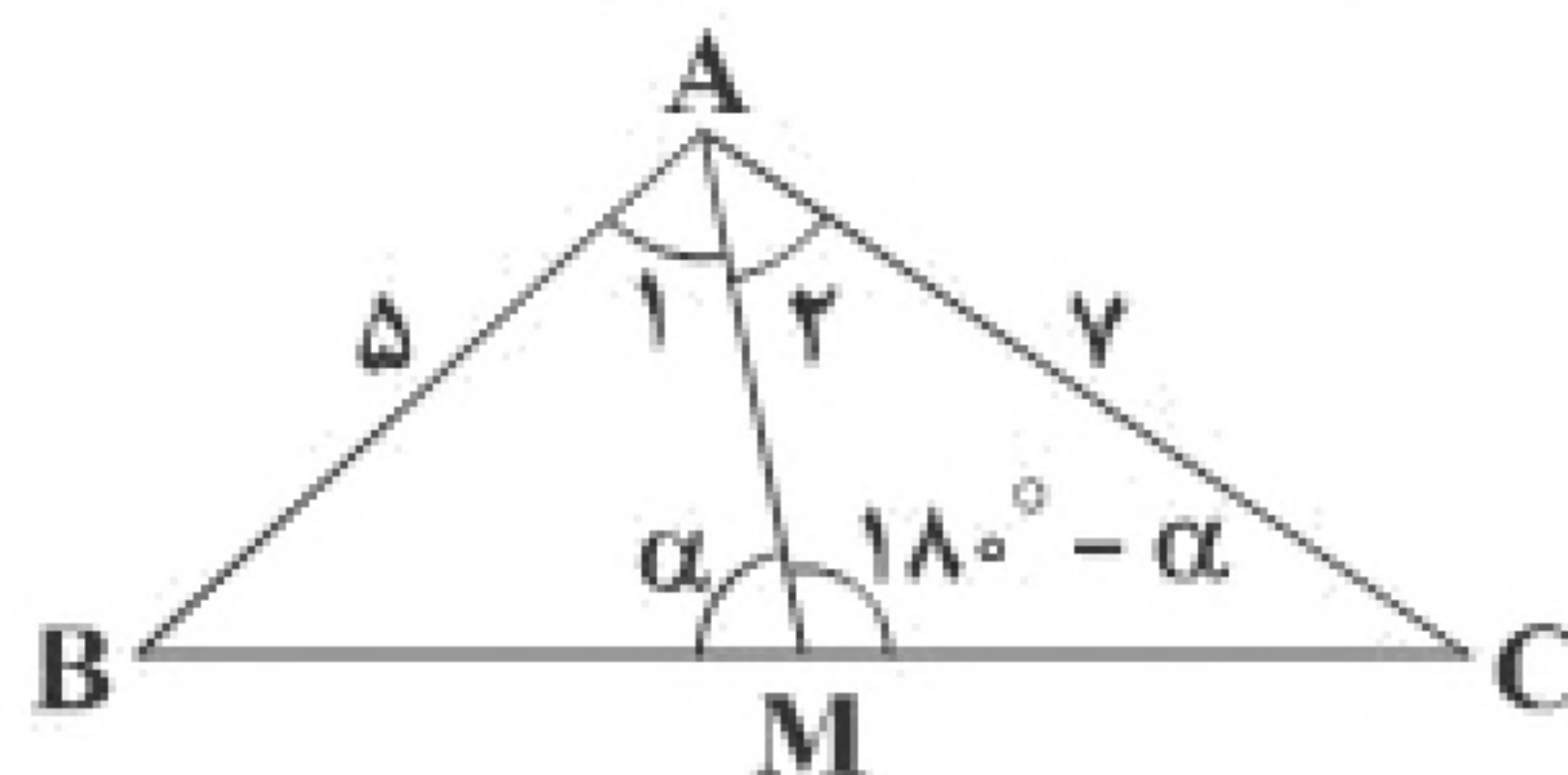
$$\text{مساحت شکل} = S_{PQM} + S_{MQN} = \frac{14\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{35}}{2}$$

پس مساحت شکل به مقدار $\frac{\sqrt{35}}{2}$ از $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ بیشتر است.

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از آنجا که $17^2 > 13^2 + 8^2$ است پس این مثلث دارای زاویه‌ی منفرجه است پس محل هم‌رسی ارتفاع‌ها بیرون دایره‌ی محیطی است.



۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه سینوس‌ها داریم:



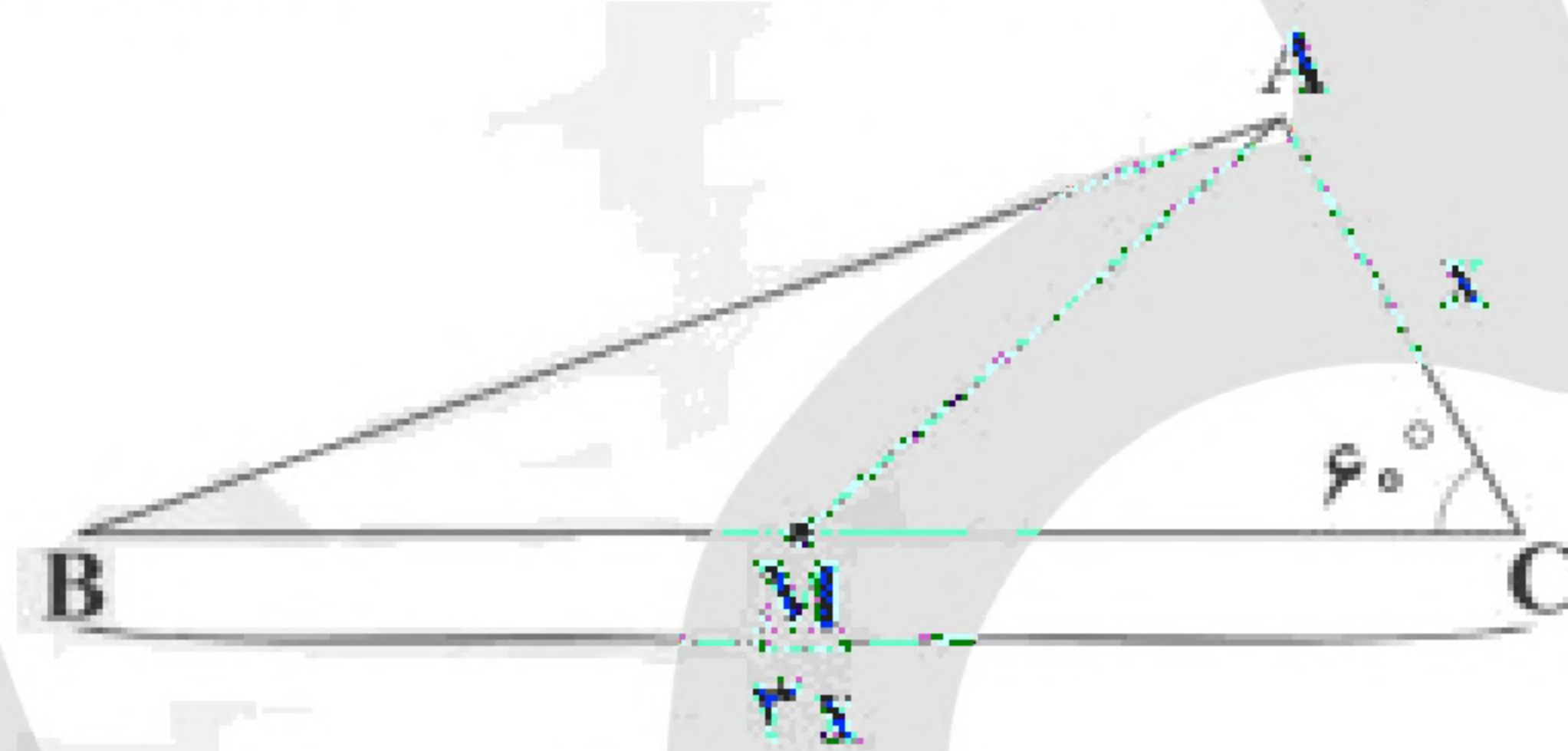
$$\begin{cases} \widehat{ABM}: \frac{AB}{\sin(\alpha)} = \frac{BM}{\sin(A_1)} \\ \widehat{AMC}: \frac{AC}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{MC}{\sin(A_2)} \end{cases}, \sin(\alpha) = \sin(180 - \alpha)$$

حال این دو رابطه را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\frac{BM}{\sin(A_1)}}{\frac{MC}{\sin(A_2)}} \Rightarrow \frac{5}{7} = \frac{\sin(A_2)}{\sin(A_1)} \times \frac{BM}{MC}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(A_2)}{\sin(A_1)} = \frac{15}{7} \Rightarrow \frac{\sin(A_1)}{\sin(A_2)} = \frac{7}{15}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $AC = x$ ، بنابراین $BC = 3x$ و با استفاده از قضیه کسینوس‌ها داریم:



$$AB^2 = (3x)^2 + x^2 - 2 \times x \times (3x) \cos 60^\circ = 10x^2 - 3x^2 = 7x^2 \Rightarrow AB = \sqrt{7}x$$

حال از تمرین ۴ صفحه ۶۹ کتاب درسی (قضیه میانه‌ها) می‌توان AM را محاسبه کرد:

$$AC^2 + AB^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + (\sqrt{7}x)^2 = 2AM^2 + \frac{(3x)^2}{2} \Rightarrow AM^2 = \frac{8x^2 - \frac{9x^2}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow AM = \sqrt{\frac{7x^2}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2} x \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2} AC$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

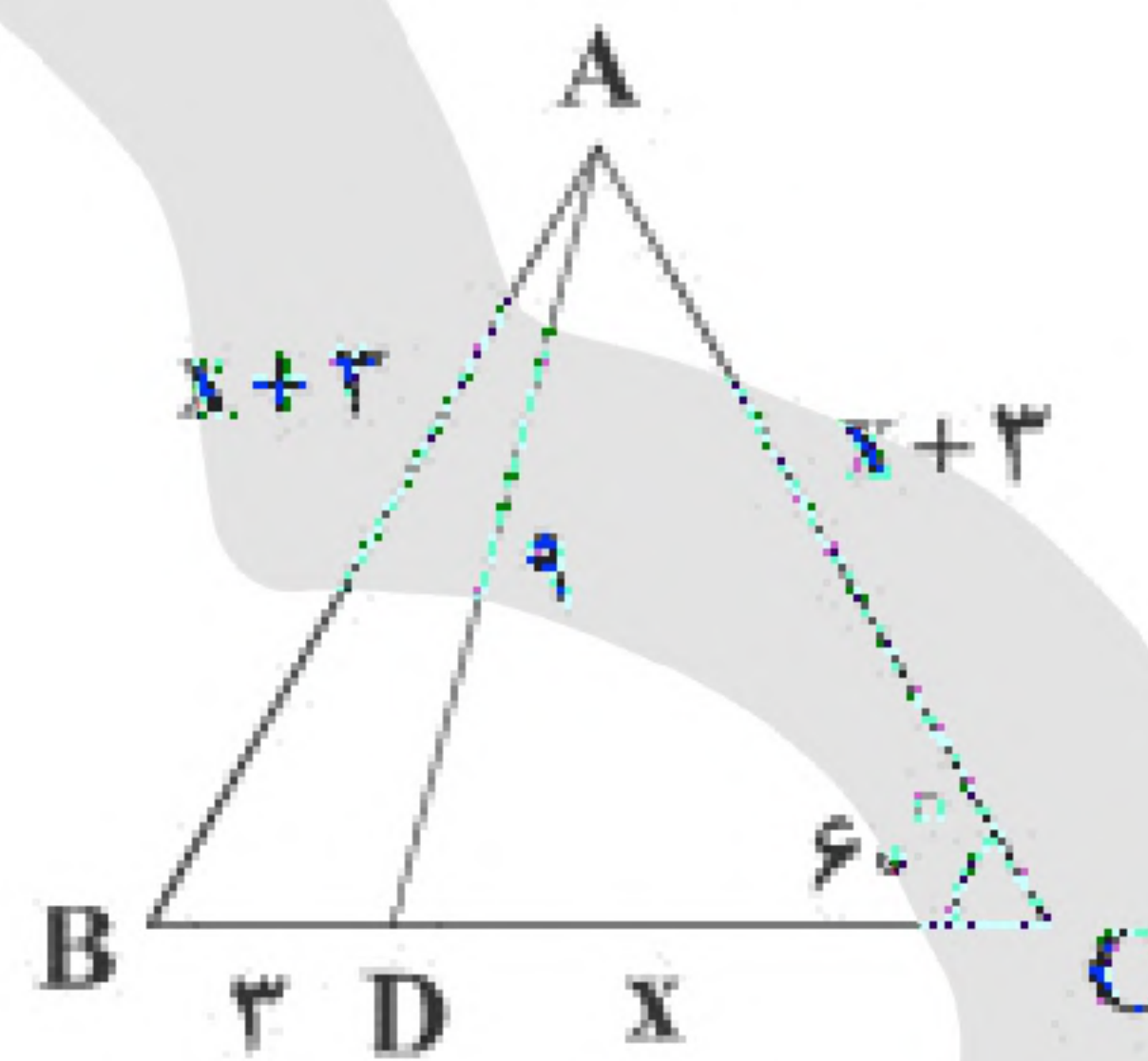
۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه میانه‌ها داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 25 + 36 = 2AM^2 + \frac{100}{2} \Rightarrow 2AM^2 = 11 \Rightarrow AM = \sqrt{\frac{11}{2}}$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض $DC = x$ بنابراین:

$$\begin{cases} BC = 3 + x \\ AC = 3 + x \\ AB = 3 + x \end{cases}$$



$$\triangle ABD: AD^2 = BD^2 + AB^2 - 2BD \times AB \times \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 16 = (x+3)^2 - 3x \Rightarrow 16 = x^2 + 6x + 9 - 3x$$

$$\Rightarrow 16 = x^2 + 3x + 9 \Rightarrow (x)(x+3) = 72 \quad (1)$$

از طرفی در مثلث $\triangle ADC$:

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times x \times (x+3) \times \sin(60^\circ) = \frac{1}{2} \times x \times (x+3) \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{(1)} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \times 72 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$



۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$1 - \sin^2 B = \cos^2 B$$

طبق قضیه‌ی سینوس‌ها داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = rR \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2 A} = rR^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1 - \cos^2 A} = rR^2 \Rightarrow a^2 = rR^2 (1 - \cos^2 A)$$

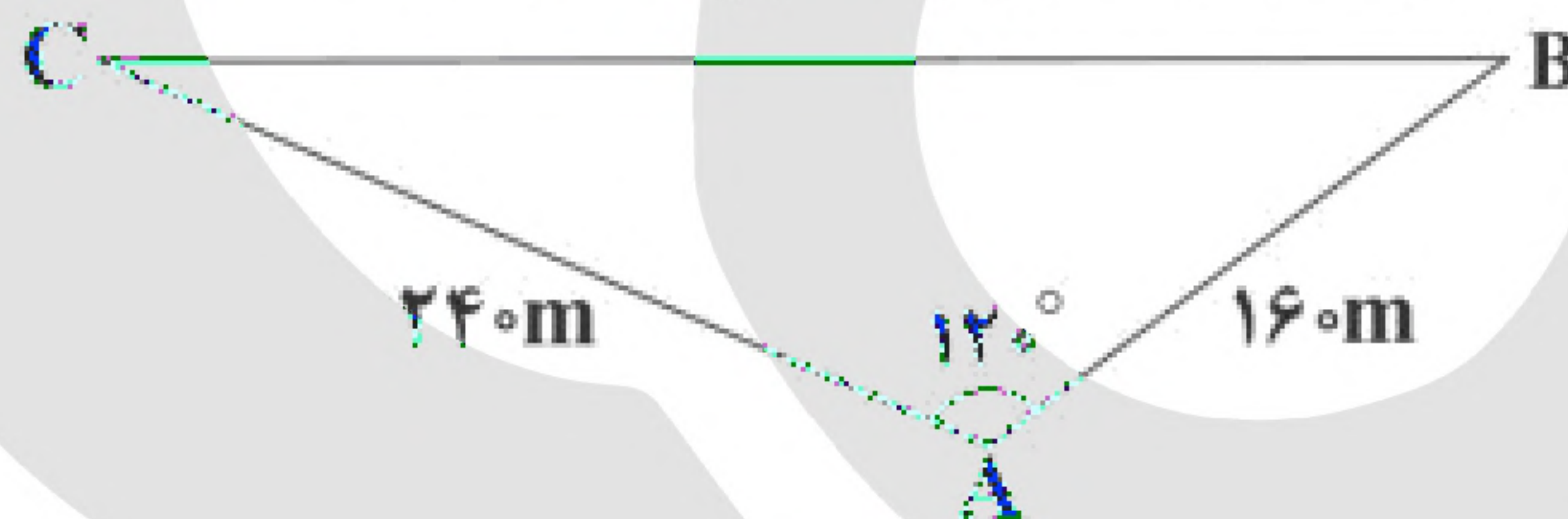
$$b^2 = rR^2 (1 - \cos^2 B)$$

و به همین ترتیب داریم:

پس داریم:

$$\begin{aligned} & r \sqrt{\frac{rR^2 \times (1 - \cos^2 A) - rR^2 \times (1 - \cos^2 B)}{\cos^2 B - \cos^2 A}} \\ &= r \times \sqrt{\frac{rR^2 (\cos^2 B - \cos^2 A)}{\cos^2 B - \cos^2 A}} = r \times (rR) \end{aligned}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل زیر، اگر دو گلوله از رأس A شلیک شوند و مسافت طی‌شده برای گلوله‌ی اول بعد از ۴ ثانیه، طول ضلع AB و برای گلوله‌ی دوم طول ضلع AC باشد، فاصله‌ی دو گلوله بعد از ۴ ثانیه برابر طول ضلع BC خواهد بود که از قضیه‌ی کسینوس‌ها قابل محاسبه است:



$$AB = 40 \times 4 = 160 \text{ m}, \quad AC = 60 \times 4 = 240 \text{ m}$$

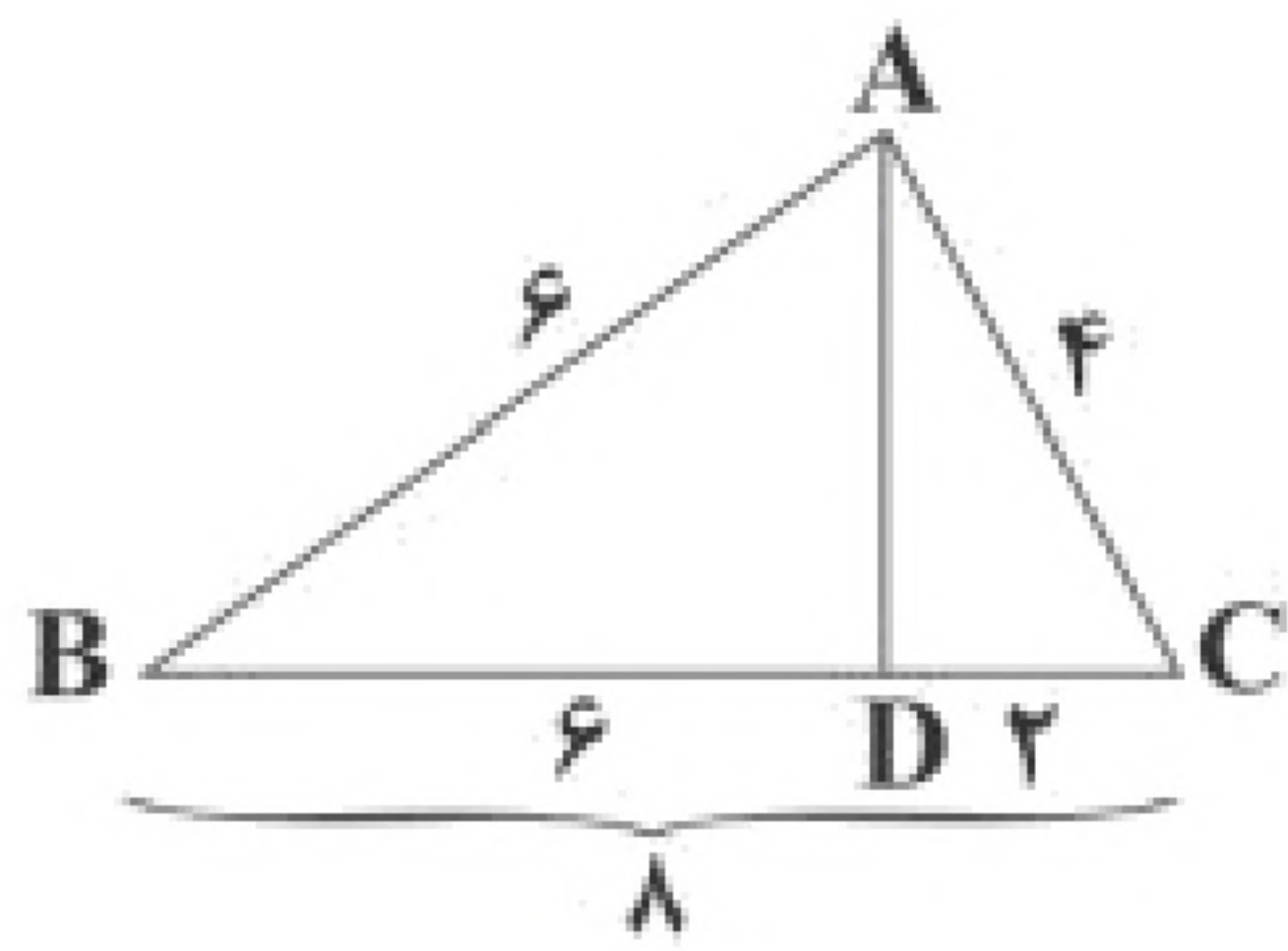
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = (160)^2 + (240)^2 - 2 \times 160 \times 240 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 160 (160 + 360 + 240) = 160 + 760$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{160 \times 760} = \sqrt{40^2 \times 4 \times 19} = 80 \sqrt{19} \text{ m}$$



۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از این که نقطه‌ی D نزدیک رأس C است و ضلع $BC = ۸$ را با نسبت ۱ به ۳ تقسیم می‌کند، می‌توان نتیجه گرفت $DC = ۲$ و $BD = ۶$.



با توجه به شکل، فاصله‌ی نقطه‌ی D از رأس A برابر طول پاره‌خط AD است که با استفاده از قضیه‌ی استوارت در تمرین ۵ صفحه‌ی ۶۹ کتاب می‌توان آن را محاسبه کرد:

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + BD \cdot DC \cdot BC$$

$$\Rightarrow 36 \times 2 + 16 \times 6 = AD^2 \times 8 + 6 \times 2 \times 8$$

$$\Rightarrow AD^2 = \frac{72}{8} = 9 \Rightarrow AD = 3$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{c\sqrt{3}}{\sin 2\hat{C}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \hat{C} \sin \hat{C}} = \frac{1}{\sin \hat{C}}$$

$$\Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث ABC قضیه‌ی کسینوس‌ها را می‌نویسیم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos(\hat{A}), \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} \Rightarrow \cos(\hat{A}) = -\cos(\hat{B} + \hat{C})$$

$$BC^2 = 16 + 36 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(+\frac{1}{6}\right) \Rightarrow BC^2 = 44 \Rightarrow BC = 2\sqrt{11}$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

کوچکترین زاویه روبه‌رو به کوچک‌ترین ضلع است، از دستور هرون برای محاسبه‌ی مثلث داریم:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

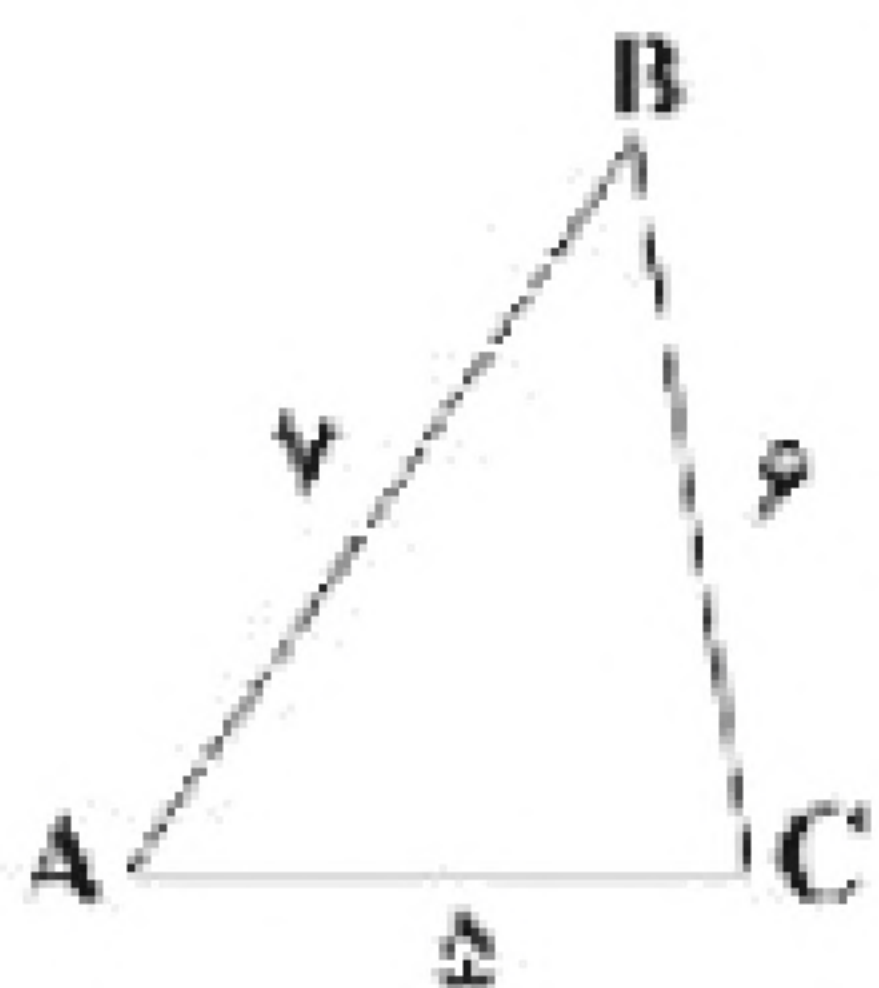
که P نصف محیط و a، b و c طول اضلاع مثلث هستند.

$$P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+5+7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\Rightarrow S = \sqrt{9(3)(4)(2)} = 6\sqrt{6}$$

$$6\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 \times \sin B \Rightarrow \sin B = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

در نتیجه از رابطه‌ی $S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B$ داریم:





۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنا به فرض $a = 5$, $b = 4$, و $c = 6$ است. با استفاده از قضیه میانه‌ها داریم:

$$b^2 + a^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

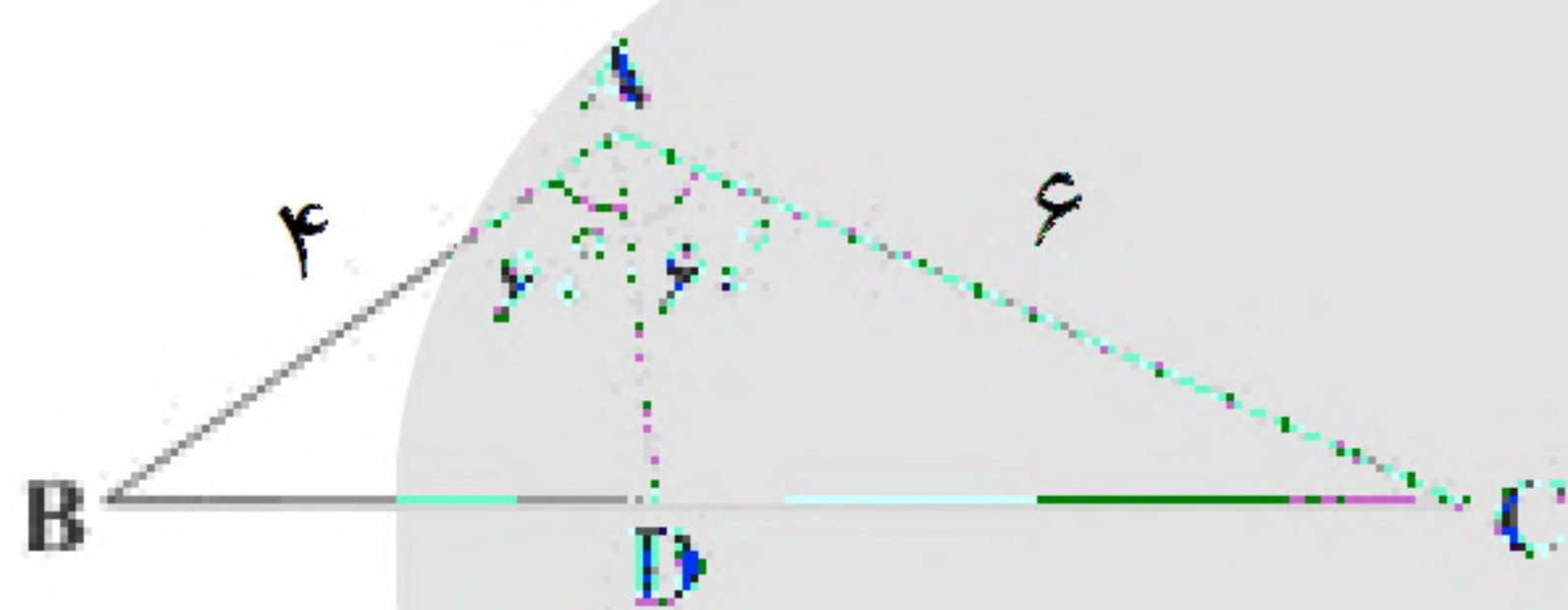
$$a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} - 2m_c^2 - \frac{c^2}{2} = c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 2(m_b^2 - m_c^2) + \frac{b^2 - c^2}{2} = c^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 2(m_b^2 - m_c^2) = (c^2 - b^2) + \left(\frac{c^2 - b^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 2(m_b^2 - m_c^2) = \frac{3}{2}(c^2 - b^2) \Rightarrow m_b^2 - m_c^2 = \frac{3}{4}(c^2 - b^2) = \frac{3}{4}(6^2 - 4^2) = \frac{3 \times 20}{4} = 15$$

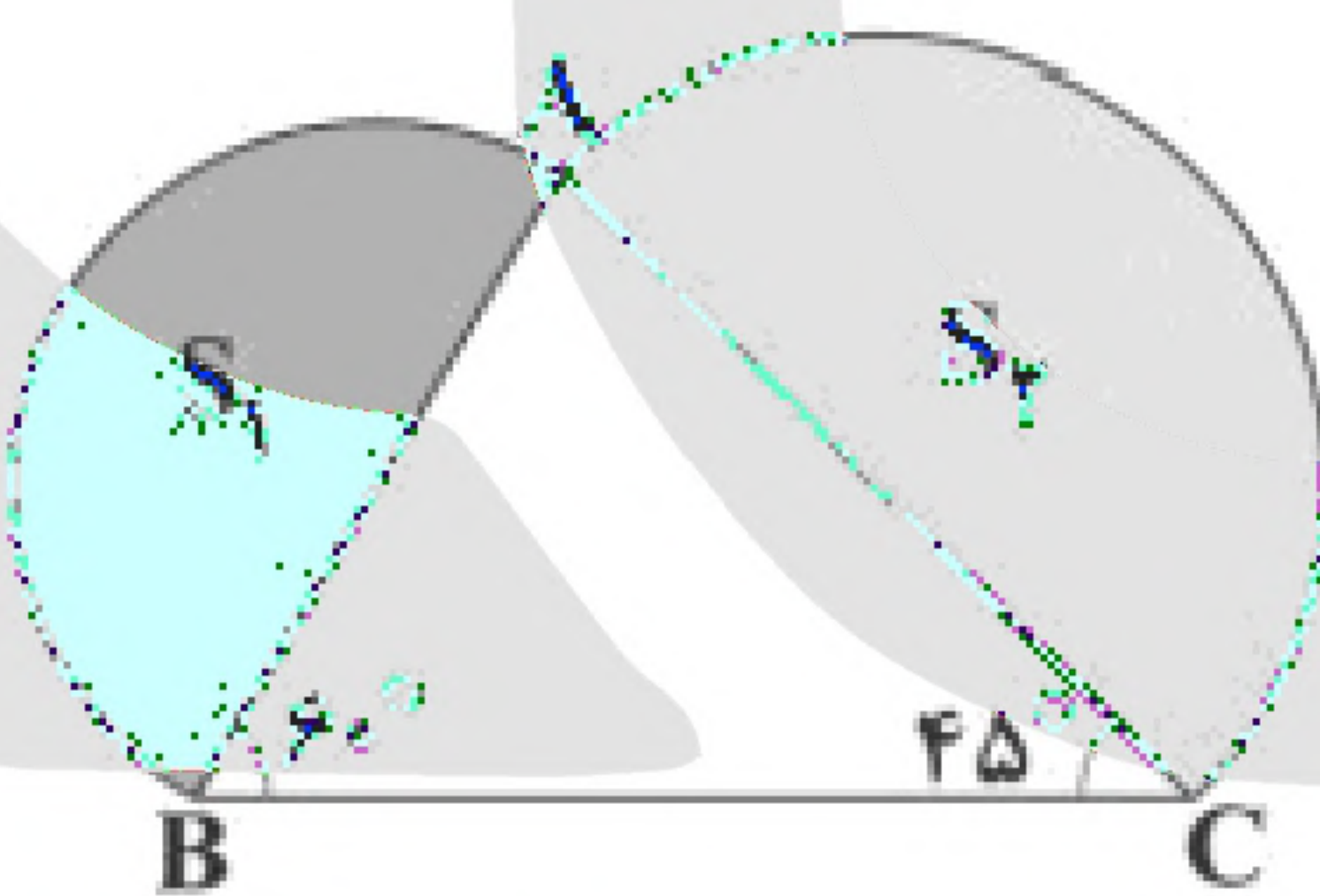
۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی زیر طول نیمساز AD به دست می‌آید.



$$AD = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{\hat{A}}{2} = \frac{2 \times 4 \times 6}{4+6} \cos 60^\circ = \frac{2 \times 4 \times 6}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مساحت هر نیم‌دایره به قطر d برابر $\frac{\pi d^2}{8}$ است. پس می‌توان نوشت:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{\pi(AB)^2}{8}}{\frac{\pi(AC)^2}{8}} = \frac{AB^2}{AC^2}$$



با استفاده از قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC داریم $AB = 2R \sin 45^\circ$ و $AC = 2R \sin 60^\circ$. در نتیجه:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{4R^2 \sin^2 45^\circ}{4R^2 \sin^2 60^\circ} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$



۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات مسئله، داریم:

$$a = ۶, b = ۱۰, m_c = ۴$$

از طرفی طبق قضیه میانه‌ها، داریم:

$$m_c^2 = \frac{1}{4} \left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \right) \Rightarrow ۱۶ = \frac{1}{4} \left(۳۶ + ۱۰۰ - \frac{c^2}{2} \right) \Rightarrow c^2 = ۲۰۸ \Rightarrow c = \sqrt{۲۰۸}$$

بدیهی است که طبق قضیه نامساوی مثلث، چنین مثلثی با اضلاع ۶، ۱۰ و $\sqrt{۲۰۸}$ وجود دارد.

و واضح است که $c^2 > a^2 + b^2$ زیرا $۲۰۸ > ۳۶ + ۱۰۰$ پس مثلث ABC در رأس C منفرجه است.

