

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



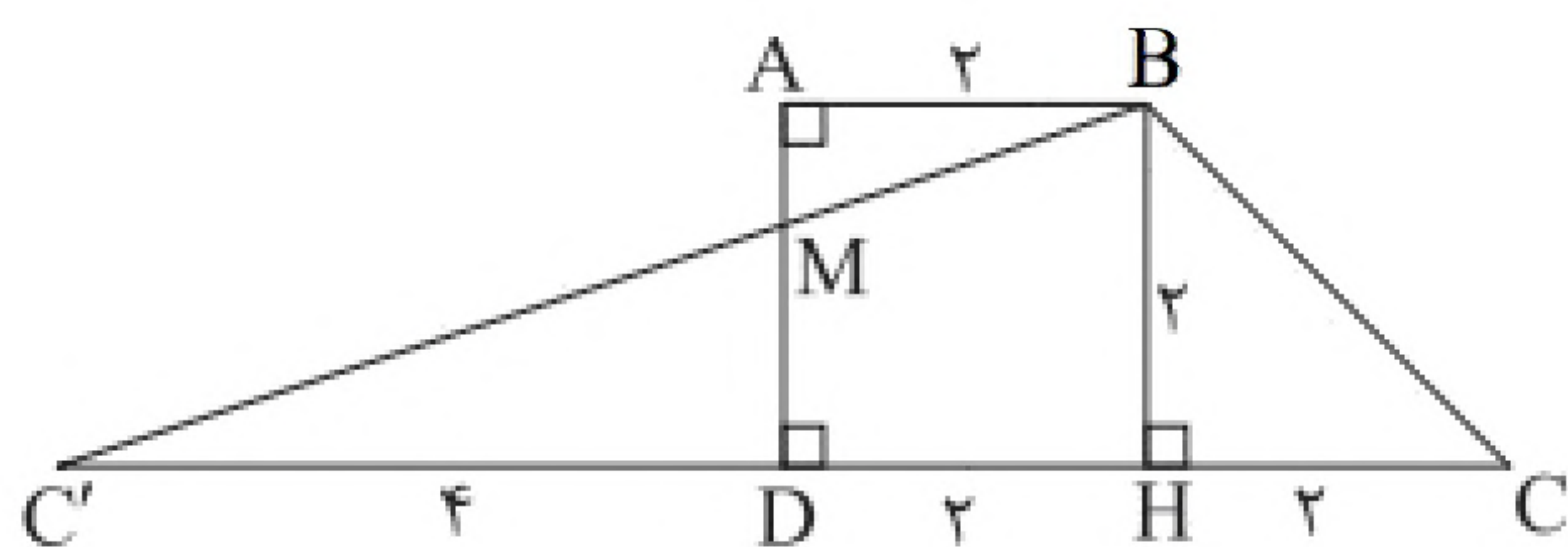
	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بازتاب C نسبت به ساق AD را C' می‌نامیم. از B به C' وصل می‌کنیم تا AD را در M قطع کند. در این صورت بنابر مسئله هرون کمترین مقدار $MB + MC$ برابر BC' است.
با رسم ارتفاع BH با توجه به شکل داریم:

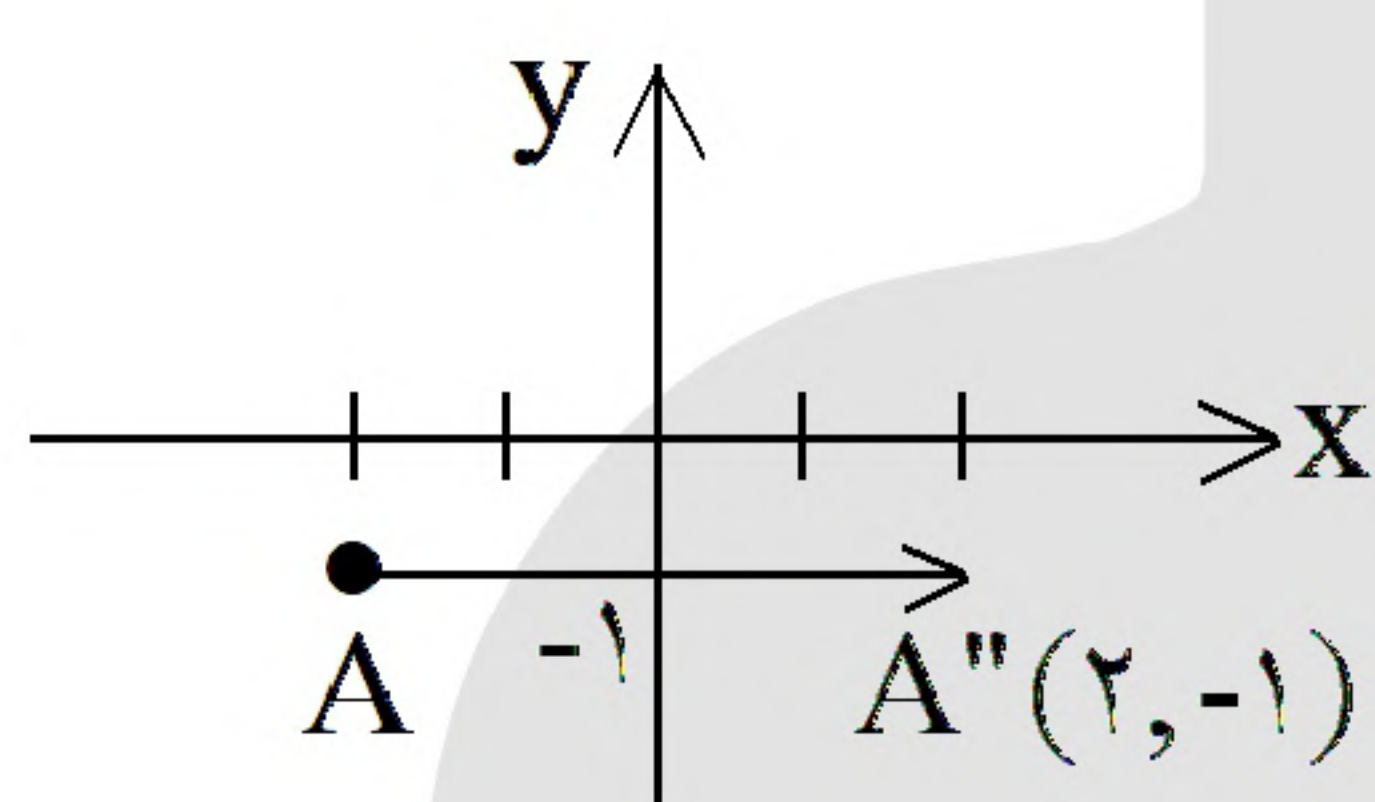


$$\triangle B'C'H : BC'^2 = BH^2 + C'H^2 = 2^2 + 6^2$$

$$= 4 + 36 = 40 \Rightarrow BC = 2\sqrt{10}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

طبق تمرین کتاب درسی، ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی و به فاصله‌ی m از یکدیگر، یک انتقال است با برداری عمود بر محورهای بازتاب و به طول ۲m.
فاصله‌ی دو خط $x=1$ و $x=3$ از یکدیگر ۲ واحد است، پس ترکیب این دو بازتاب، یک انتقال افقی به طول ۴ واحد است.



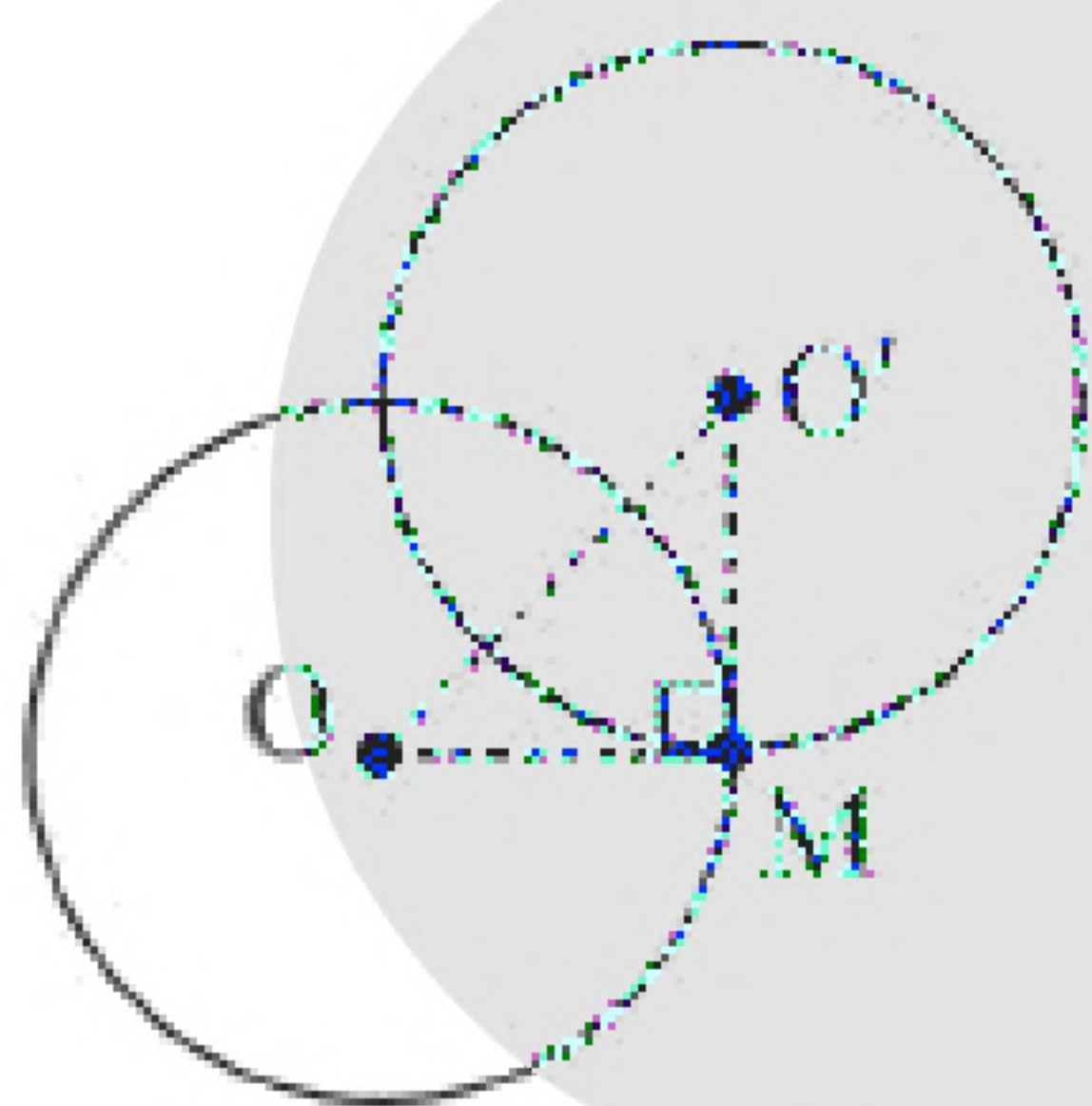
۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دایره‌ی $C(O, 5)$ را به مرکز M، 90° دوران داده‌ایم. می‌دانیم دوران، طولی است، پس: $OM = O'M = 5$

طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث $\triangle OMO'$ ، داریم:

$$OO'^2 = 5^2 + 5^2 \Rightarrow OO' = 5\sqrt{2}$$

با توجه به شکل، طول بردار انتقال برابر طول OO' است.



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

بررسی گزاره‌ها:

الف و ب) نادرست، تبدیل‌های طولی، لزوماً شیب یا جهت را حفظ نمی‌کنند، مانند بازتاب نسبت به خط.

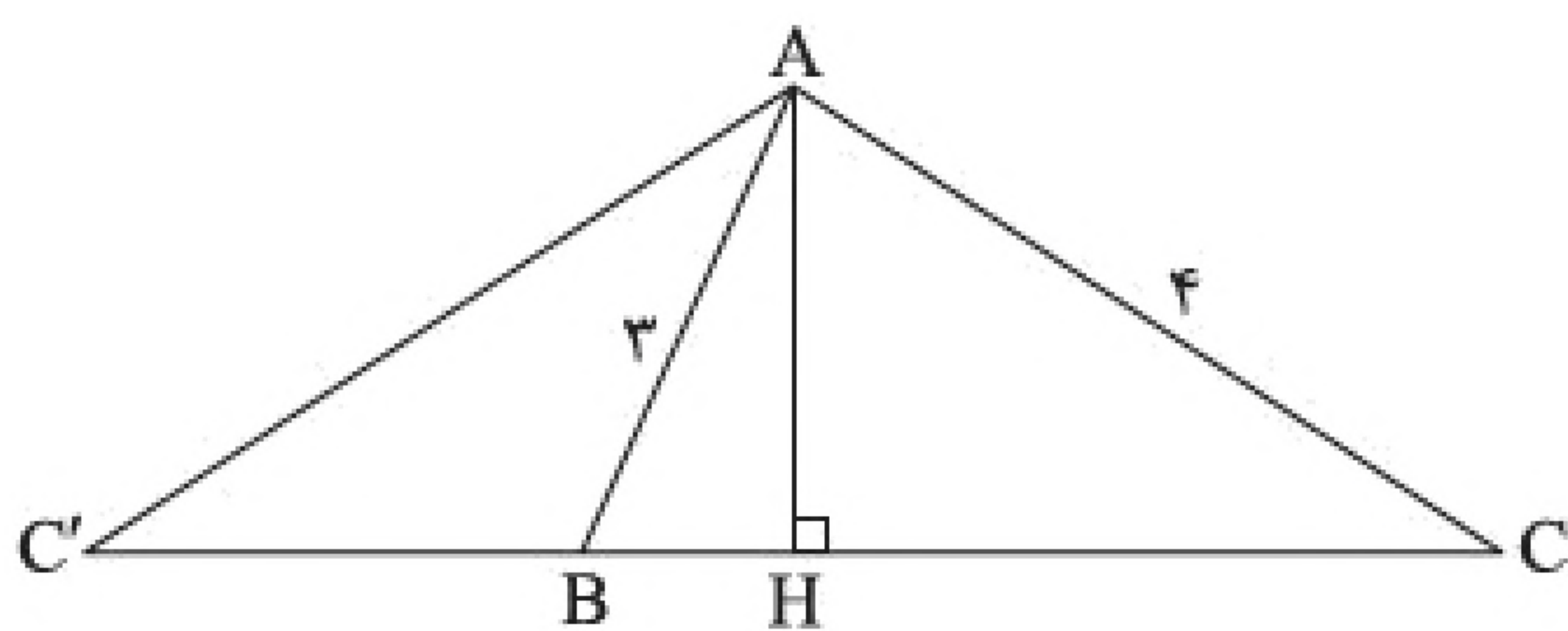
ج) درست

د) درست، هر برداری که یک نقطه از یکی از دو خط موازی را به نقطه‌ای از دیگری وصل کند، یک بردار انتقال برای آن دو خط است.



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی A روی محور بازتاب است. پس بازتاب A خود نقطه‌ی A می‌باشد. چون ارتفاع هر دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ACC'$ ، AH است، پس:



$$\frac{S_{\triangle ACC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CC'}{BC} = \frac{CC'}{5}$$

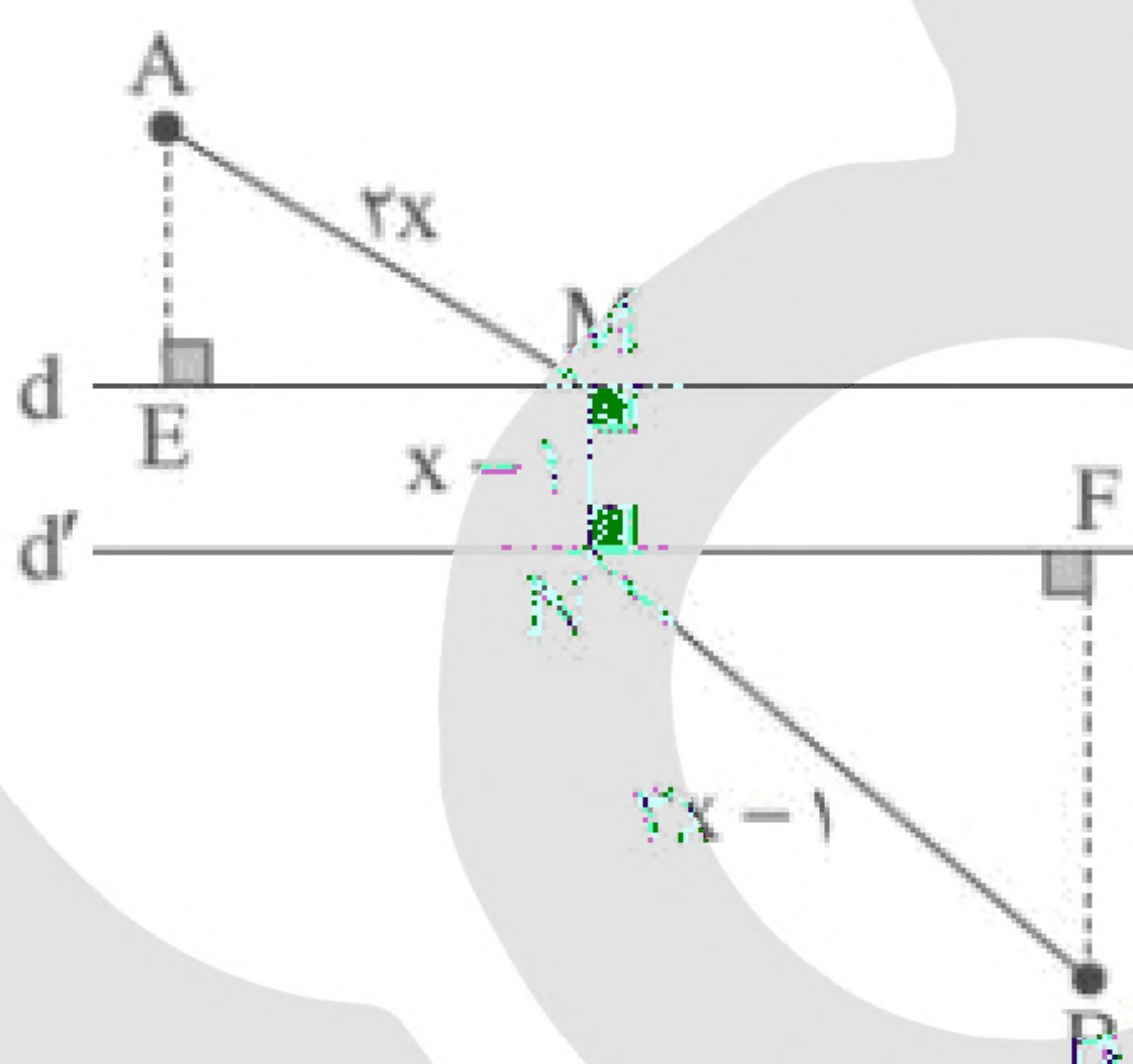
چون بازتاب نقطه‌ی C نسبت به AH ، نقطه‌ی C' است، پس: $CH = C'H$ (بازتاب طول‌ها می‌باشد)

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow CH \times 5 \Rightarrow CH = \frac{16}{5} \Rightarrow CC' = \frac{32}{5}$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\triangle ACC'}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{CC'}{5} = \frac{\frac{32}{5}}{5} = \frac{32}{25}$$

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



در حالت کوتاه‌ترین مسیر زاویه‌های \widehat{AME} و \widehat{FNB} برابرند. در نتیجه دو مثلث $\triangle AME$ و $\triangle BFN$ متشابه‌اند.

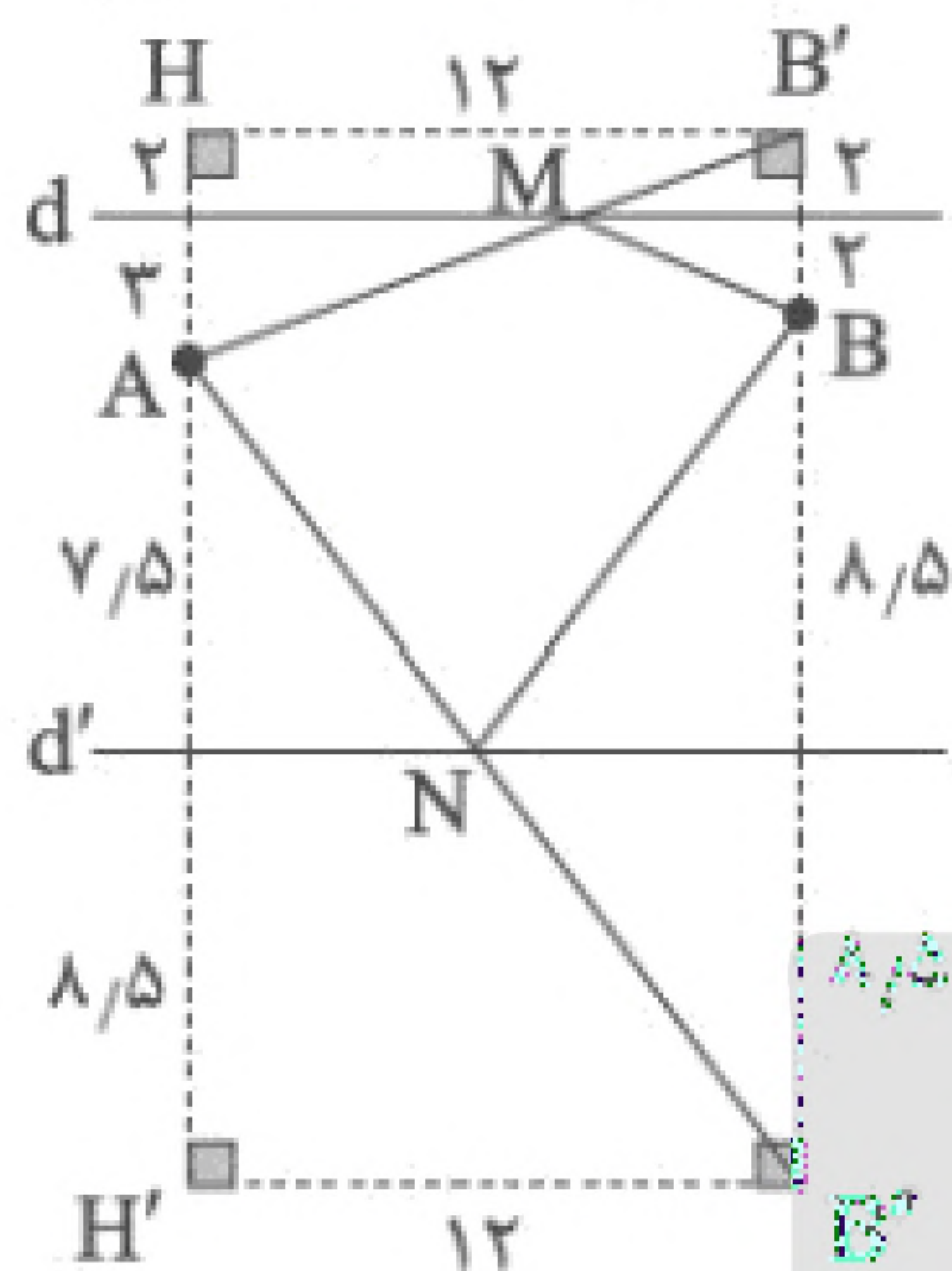
$$\frac{S_{\triangle AME}}{S_{\triangle BFN}} = K^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow K = \frac{3}{4} = \frac{2x}{3x-1} \Rightarrow 9x-3 = 8x \Rightarrow x=3$$

$$AMNB \text{ طول مسیر} = 2x + (x-1) + (3x-1) = 6x-2 = 16$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی B را نسبت به خطوط d و d' بازتاب کرده و B' و B'' می‌نامیم. کمترین محیط چهارضلعی $AMBN$ برابر است با مجموع طول پاره‌خطهای AB' و AB'' . طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های $\triangle AHB'$ و $\triangle AH'B''$ داریم:



$$AB'^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow AB' = 13$$

$$AB''^2 = 16^2 + 12^2 \Rightarrow AB'' = 20$$

$$AB' + AB'' = 13 + 20 = 33$$

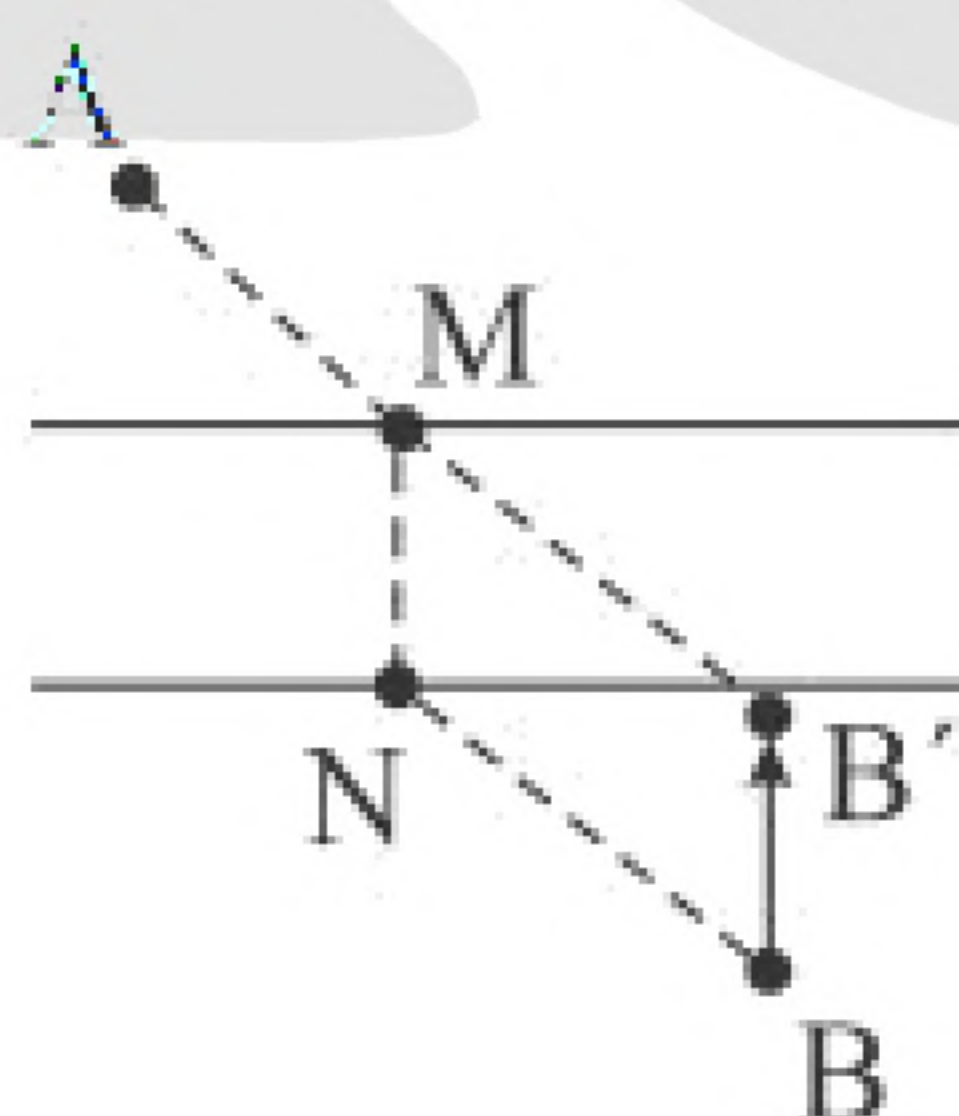
۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم در تجانس شیب خط حفظ می‌شود، در نتیجه این دو خط شیب برابر دارند.

$$\left. \begin{aligned} 3x + 5y = 12 &\Rightarrow m = -\frac{3}{5} \\ ax + 2y - 15 = 0 &\Rightarrow m = -\frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{5} = \frac{-a}{2} \Rightarrow a = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

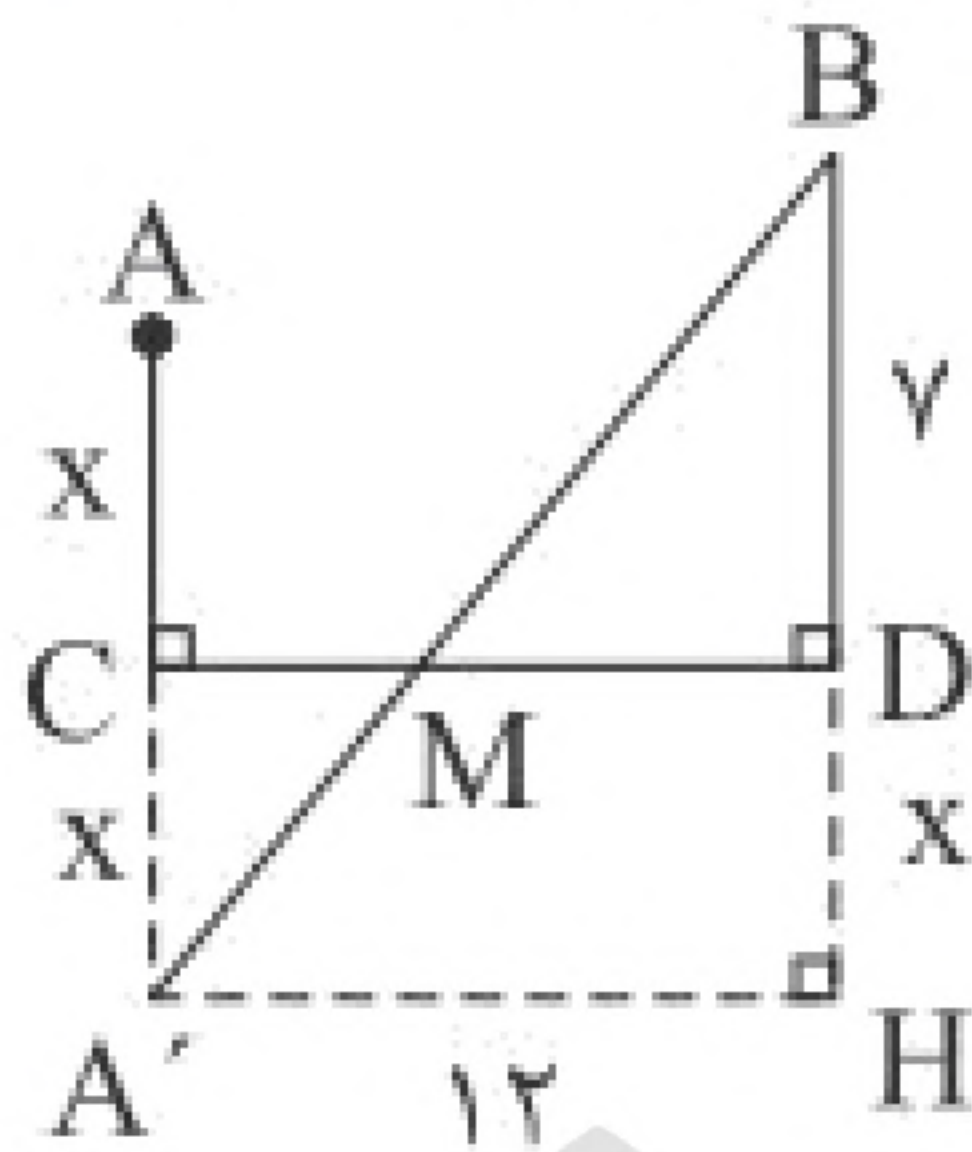
۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مطابق توضیحات صفحه‌ی ۵۵ کتاب درسی برای یافتن محل احداث پل، نقطه‌ی B را با برداری به طول MN انتقال می‌دهیم سپس از A به آن نقطه متصل می‌کنیم. محل برخورد خط رسم شده با رودخانه، محل احداث پل است.





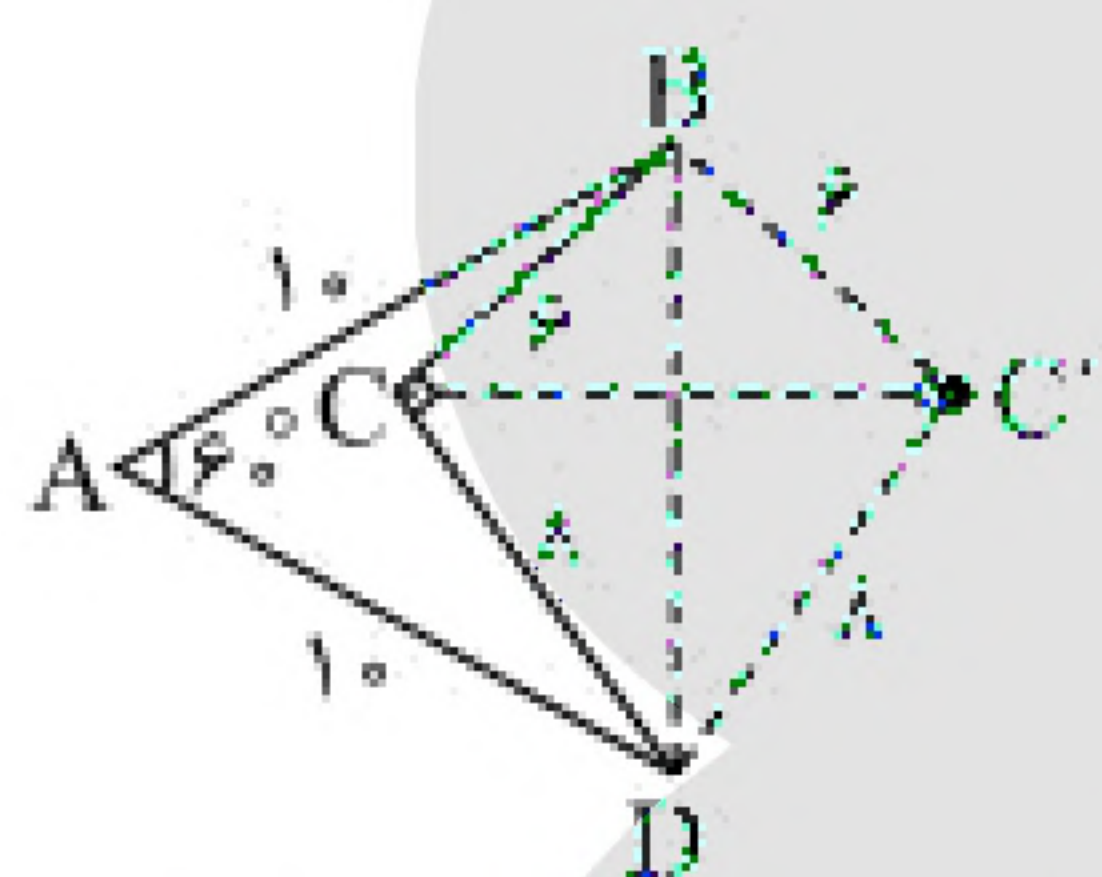
۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق دستور هرون برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر، A را نسبت به خط CD بازتاب کرده و نقطه‌ی بازتاب را به B وصل می‌کنیم. طول $A'B$ با کمترین مقدار $AM + MB$ برابر است.



طبق قضیه‌ی قیثاغورس در مثل $\triangle A'BH$ داریم:

$$A'B^2 = A'H^2 + BH^2 \Rightarrow 15^2 = 12^2 + BH^2 \Rightarrow BH = 9 \Rightarrow x + 7 = 9 \Rightarrow x = 2$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} AB = AD \\ \hat{A} = 60^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABD \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow BD = 10$$

$$\triangle BCD : BD^2 = BC^2 + CD^2 \rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

اکنون BD را محور بازتاب در نظر می‌گیریم و C را نسبت به آن بازتاب می‌دهیم. در نتیجه:

$$S_{ABC'D} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BC'D} = \sqrt{3} \cdot 4 \cdot (10)^2 + \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 25\sqrt{3} + 24$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

(۱) نادرست است، زیرا تصویر یک خط تحت یک تجانس وقتی بر خود خط منطبق است که مرکز تجانس روی خط باشد.

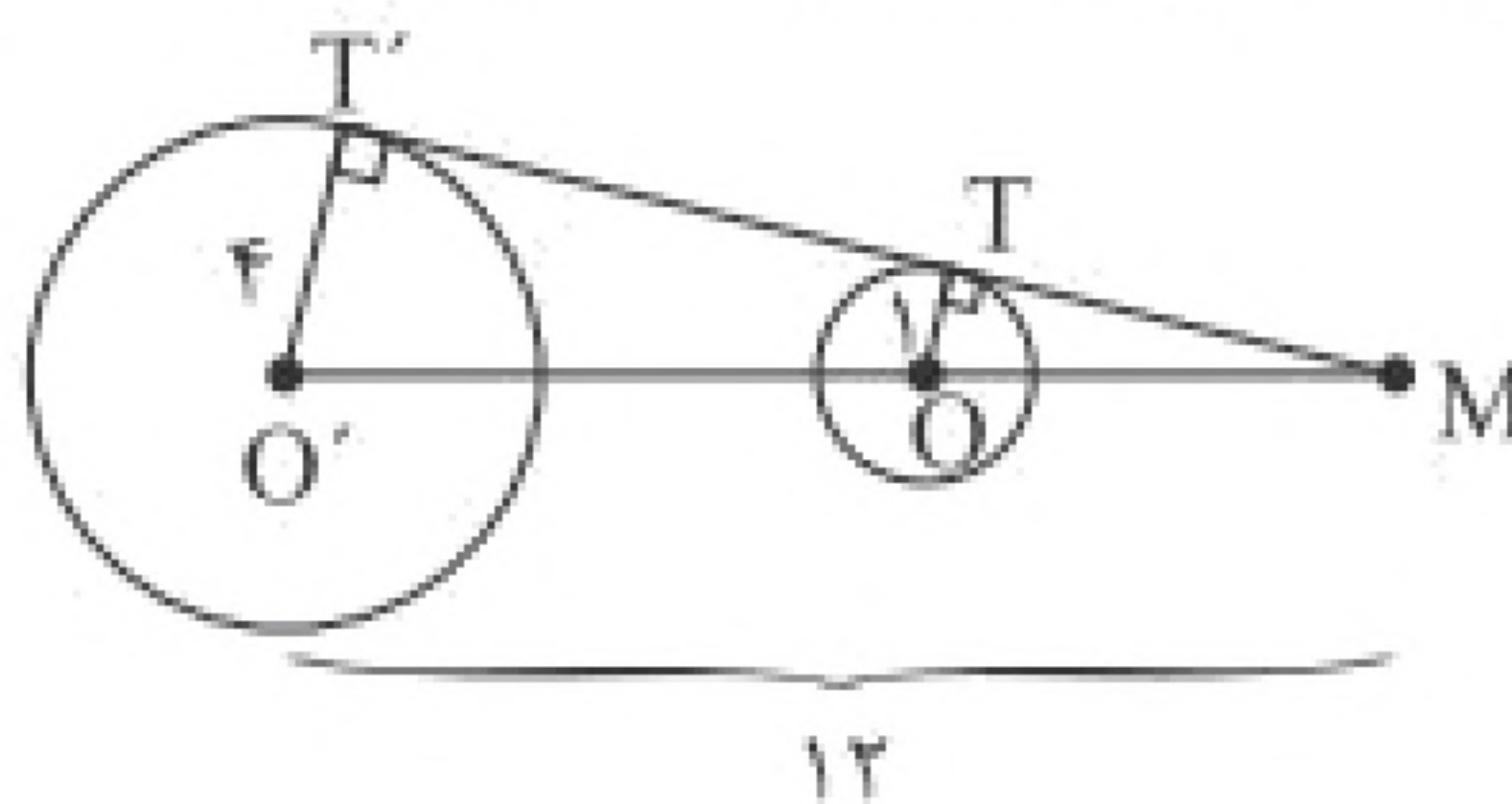
(۲) نادرست است، زیرا بازتاب هیچ‌گاه یک تبدیل همانی نیست.

(۴) نادرست است، زیرا تجانس به طور کلی شیب خط را حفظ می‌کند.



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مرکز تجانس مستقیم دو دایره با شعاع نابرابر، محل هم‌رسی مماس مشترک‌های خارجی است.



طبق قضیه تالس داریم:

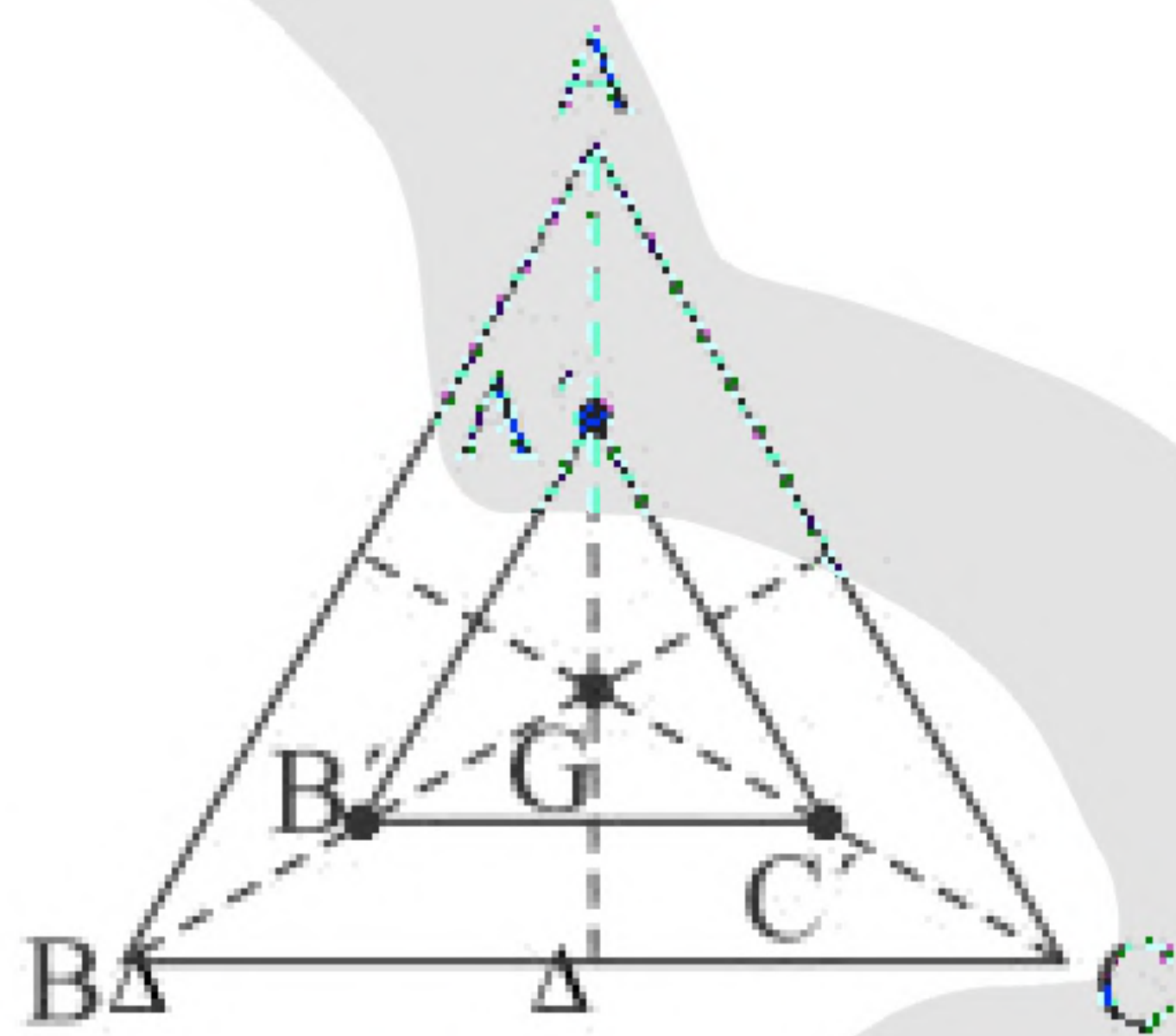
$$OT \parallel O'T' \Rightarrow \frac{OM}{O'M} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OM}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow OM = 3 \Rightarrow OO' = 12 - 3 = 9$$

طول مماس مشترک داخلی از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (r + r')^2} = \sqrt{81 - 25} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در هر مثلث میانه‌ها در مرکز ثقل (G) یکدیگر را به نسبت ۲ به ۱ قطع می‌کنند.

در نتیجه در تجانس به مرکز G و نسبت $\frac{1}{4}$ نقاط A' و B' و C' وسط GA و GB و GC قرار می‌گیرد.



$$ABC \sim A'B'C' \rightarrow K = \frac{1}{4} \rightarrow \frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = K^2 = \frac{1}{16}$$

$$S_{\text{بین}} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle ABC} - \frac{1}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{15}{16} S_{\triangle ABC} = 27\sqrt{3}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = 36\sqrt{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 36\sqrt{3}$$

$$\rightarrow a = 12 \rightarrow \text{محیط } \triangle ABC = 3(12) = 36$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

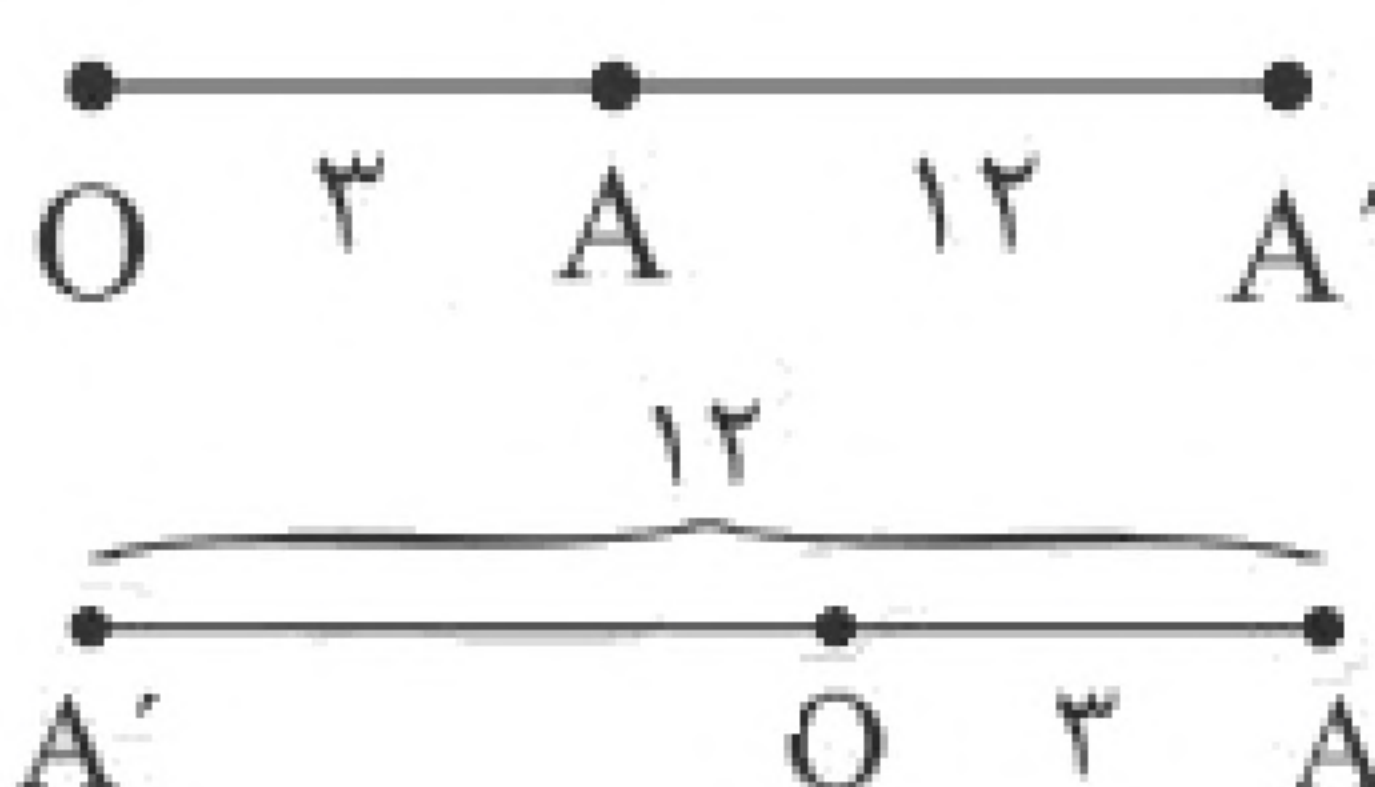
۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$k = \frac{OA'}{OA} = \frac{15}{3} = 5$$

اگر $k > 0$ ، داریم:

$$k = \frac{-OA'}{OA} = -\frac{12-3}{3} = -\frac{9}{3} = -3$$

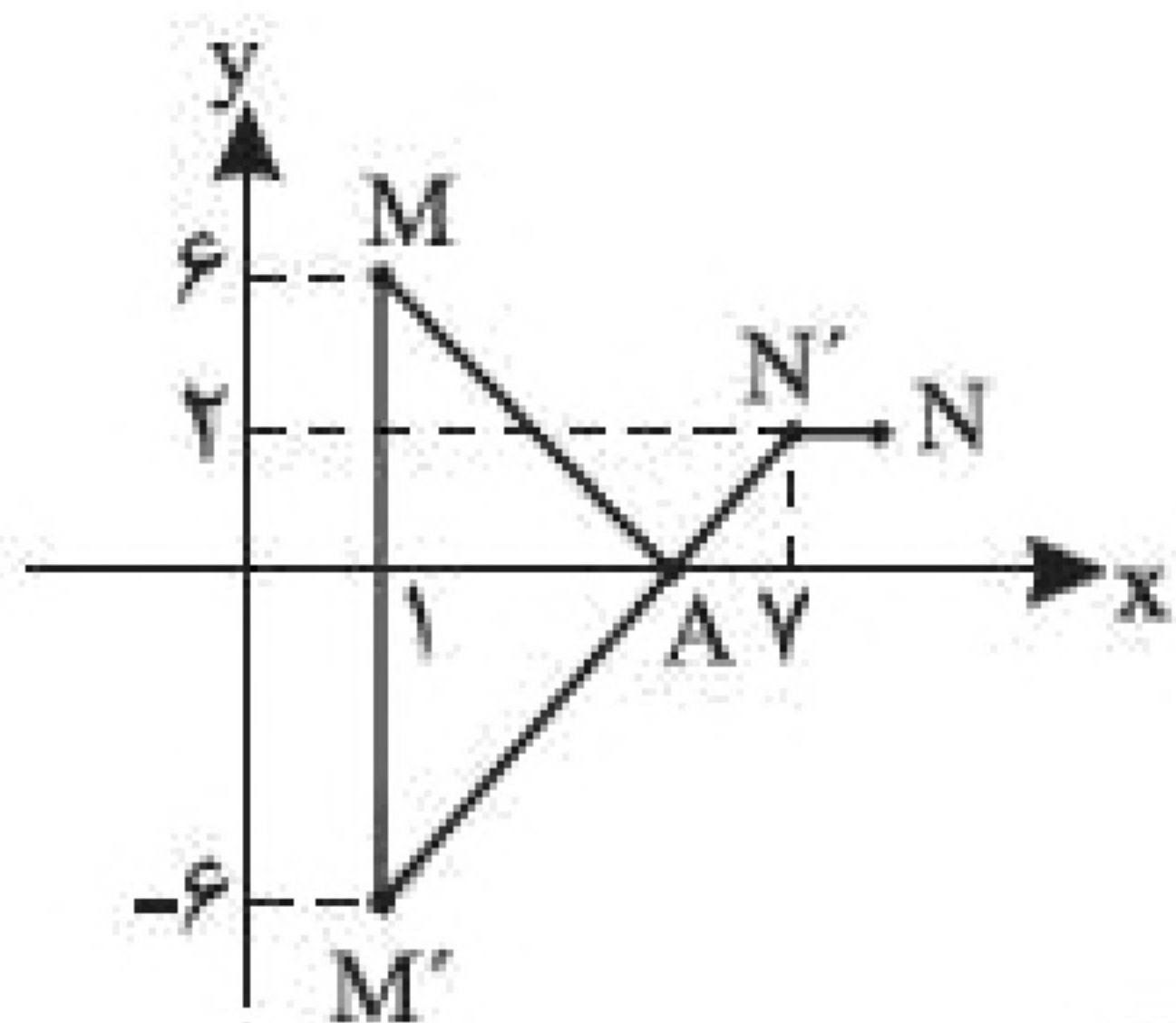
اگر $k < 0$ ، داریم:





۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

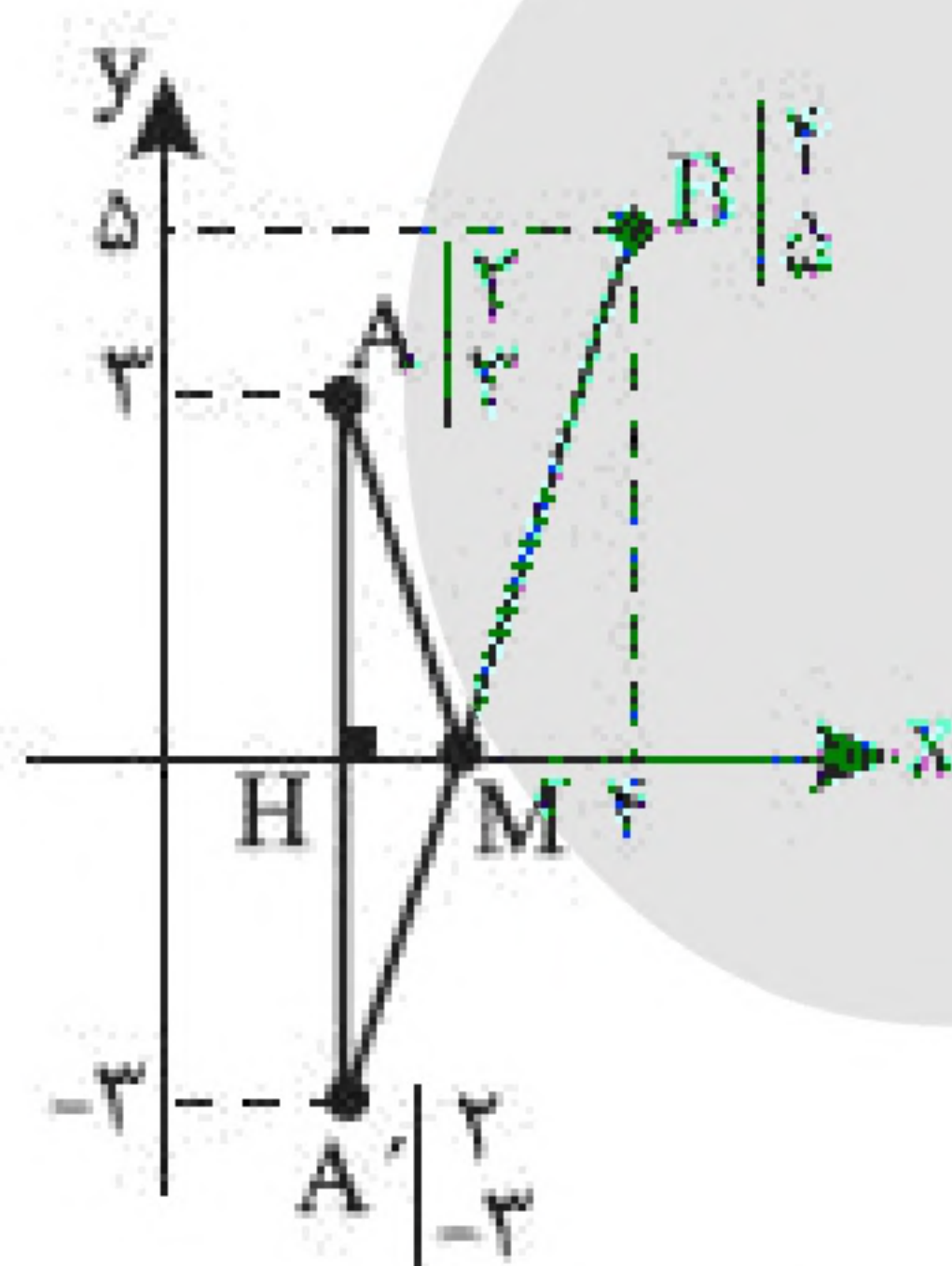
انتقال یافته نقطه $N(8, 2)$ در راستای محور x ها به اندازه یک واحد به سمت چپ را به دست می آوریم تا به نقطه $N'(7, 2)$ برسیم. سپس بازتاب $M(1, 6)$ را نسبت به محور x ها پیدا می کنیم تا به نقطه $M'(1, -6)$ برسیم. از M' به N' وصل می کنیم تا محور x ها را در نقطه A قطع کند، در این صورت مسیر $MAN'N$ مسیر مینیمم خواسته شده است که طول مسیر برابر $M'AN'N$ است.



$$\text{طول مسیر مینیمم} = M'N' + N'N = \sqrt{(7-1)^2 + (2+6)^2} + 1 = 10 + 1 = 11$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بازتاب A را نسبت به محور x ها نقطه A' می نامیم. نقطه تلاقی $A'B$ با محور x ها نقطه مورد نظر است و آن را M می نامیم. در این صورت $MA + MB$ بنابر مسئله هرون، مینیمم است. برای پیدا کردن مختصات M کافیه معادله خط $A'B$ را به دست آورده و با محور x ها قطع دهیم:



$$m_{A'B} = \frac{y_B - y_{A'}}{x_B - x_{A'}} = \frac{5 + 3}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$A'B \text{ خط معادله: } y + 3 = 4(x - 2)$$

$$\xrightarrow{y=0} 3 = 4x - 8 \Rightarrow x = \frac{11}{4}$$

پس $M\left(\frac{11}{4}, 0\right)$ است.



۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر بازتاب F نسبت به خط AE را F' بنامیم و بازتاب D نسبت به EC را D' بنامیم، آن گاه زمین جدید AF'ED'CB هم محیط با زمین داده شده است ولی مساحت آن به اندازه $2S_{\triangle AEF} + 2S_{\triangle DEC}$ بیش تر شده است.

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \times FE \sin 150^\circ = \frac{1}{2} (3)(4) \left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

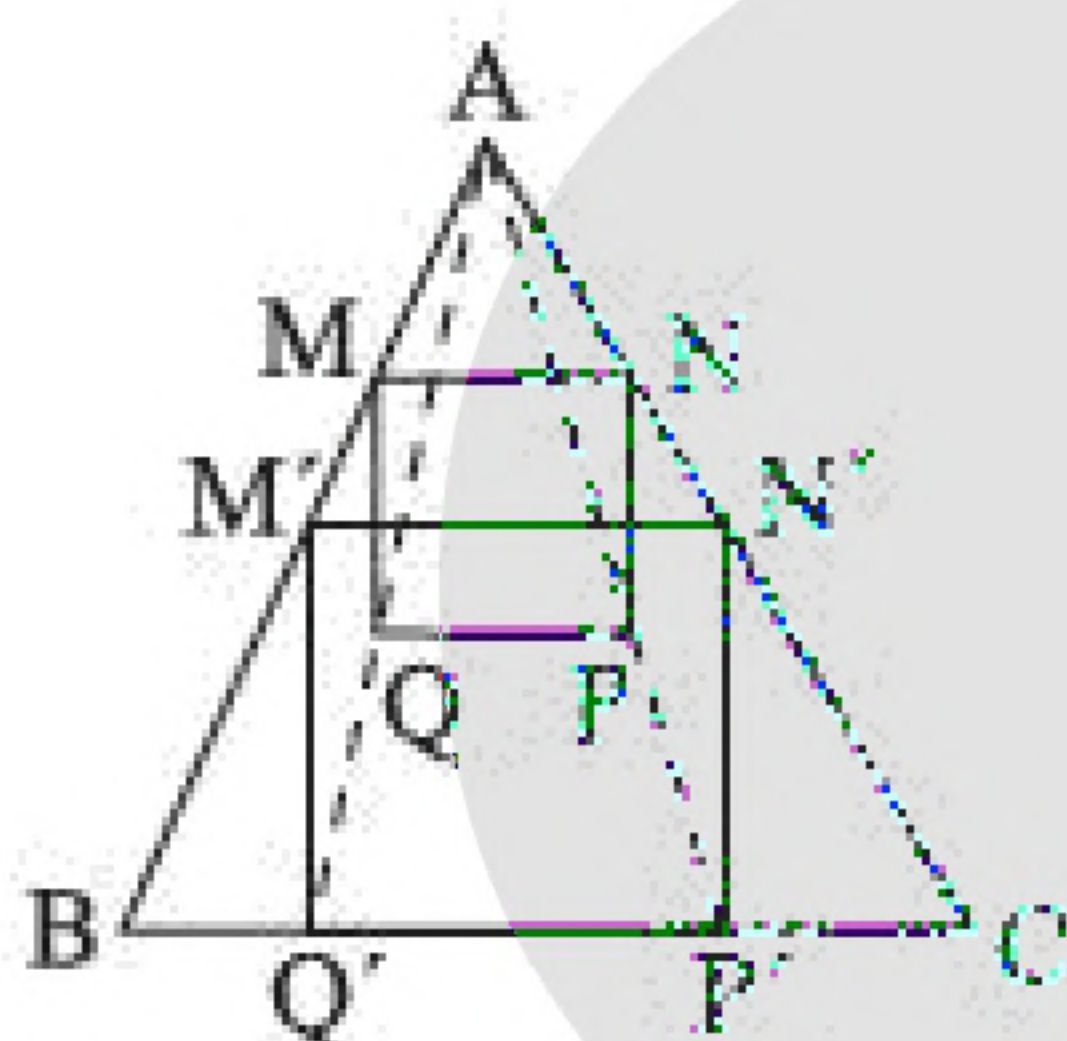
$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} DE \times DC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(3) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

بنابراین:

$$2S_{\triangle AEF} + 2S_{\triangle DEC} = 6 + 9 = 15 = \text{میزان افزایش مساحت}$$

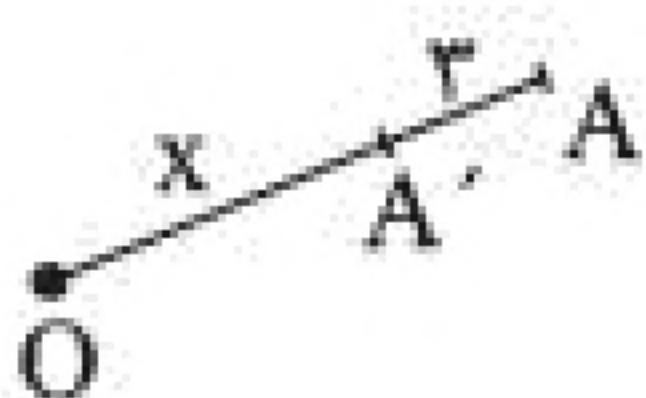
۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

نقاط M و N را به ترتیب روی اضلاع AB و AC طوری در نظر می گیریم که MN با BC موازی باشد. مربع MNPQ را داخل مثلث ABC رسم می کنیم به طوری که MN یکی از اضلاع آن باشد. از A به Q و P وصل می کنیم. امتداد AP و AQ ضلع BC را در نقاط P' و Q' قطع می کنند حالا از P' و Q' عمودهایی بر BC رسم می کنیم تا اضلاع AB و AC را در M' و N' قطع کنند. M'N'P'Q' مجانس مربع MNPQ است و برای رسم آن از تبدیل تجانس استفاده شده است.



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون $\frac{3}{4}$ بین صفر و یک است پس تجانس انقباض است.

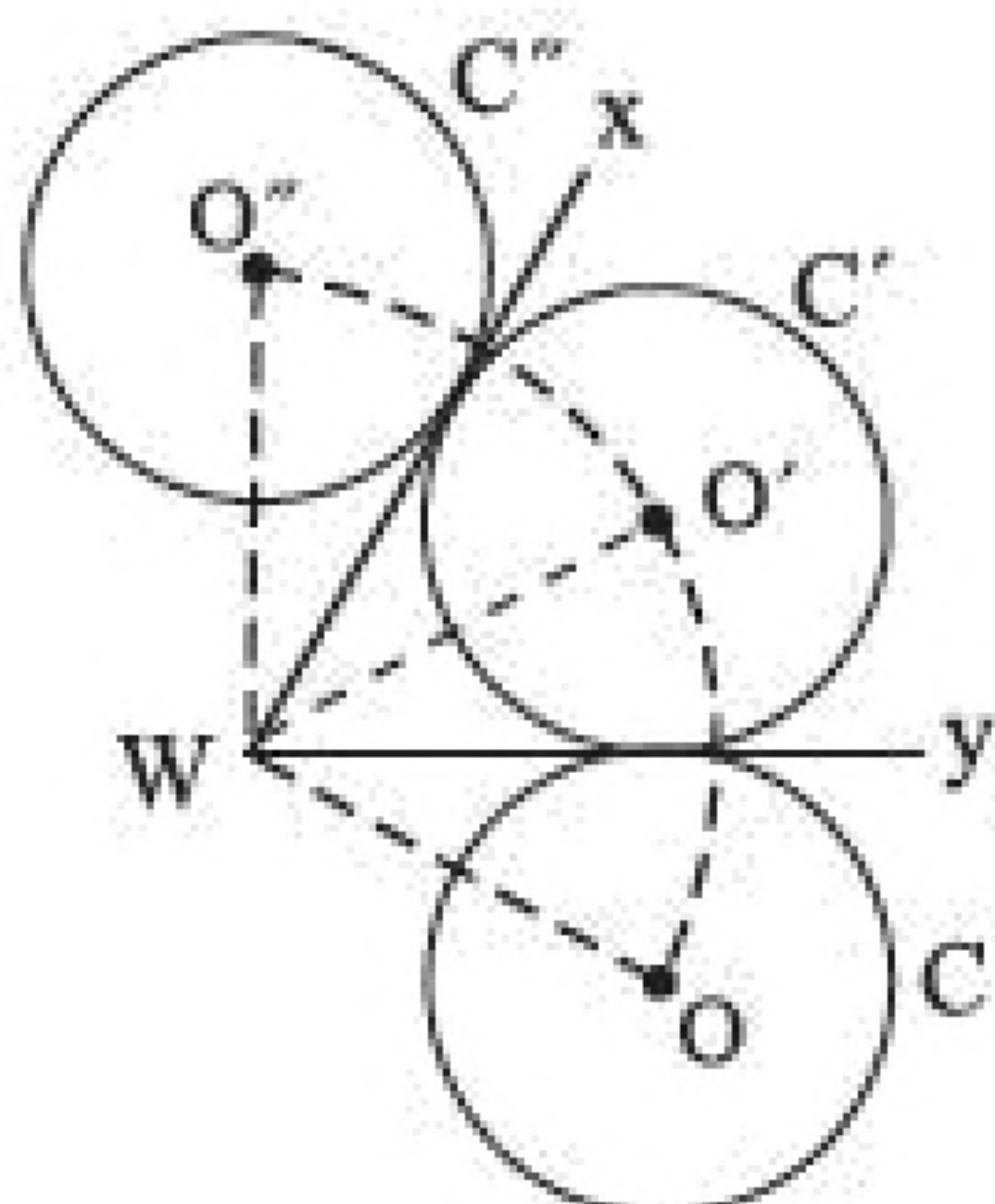


$$OA' = \frac{3}{4} OA \Rightarrow x = \frac{3}{4} (x + 3) \xrightarrow{\times 4} 4x = 3x + 9 \Rightarrow x = OA' = 9$$

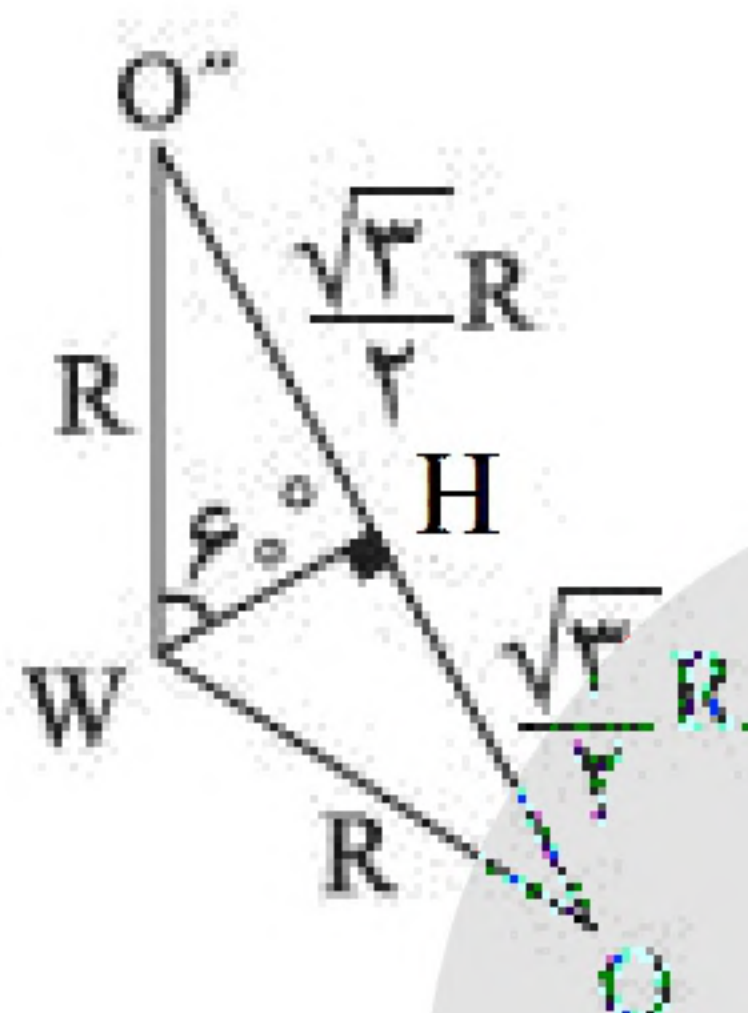


۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم بازتاب متوالی نسبت به دو خط متقاطع یک دوران به مرکز نقطه برخورد دو خط متقاطع (W) و با زاویه‌ای دو برابر زاویه بین دو خط ($120^\circ = 2 \times 60^\circ$) است.



چون بازتاب طولی می‌باشد پس $R = R' = R''$ است، فاصله O تا W و O'' تا W با هم برابرند، بنابراین مثلث $WO''O$ متساوی الساقین است پس با رسم ارتفاع WH داریم:

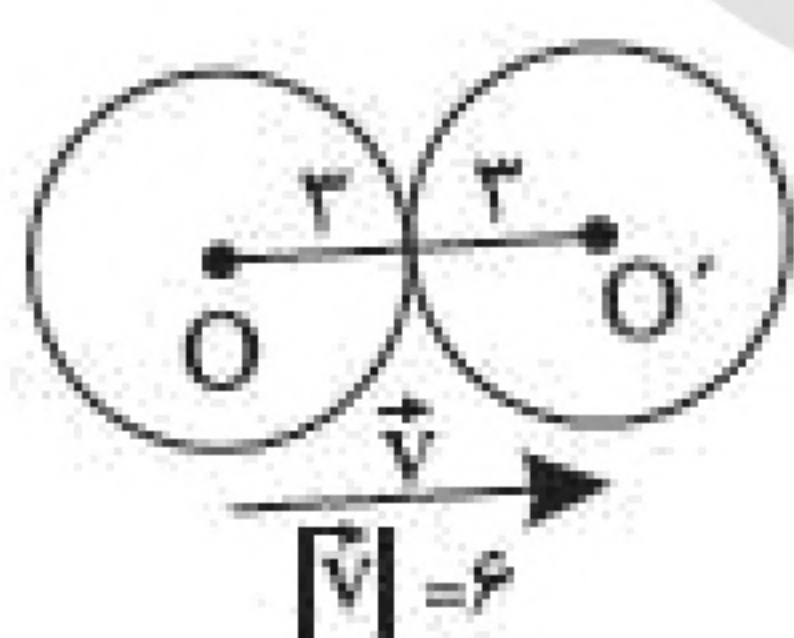


بنابراین:

$$\frac{OO''}{WO} = \frac{\sqrt{3}R}{R} = \sqrt{3}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم تبدیل انتقال، طولی می‌باشد پس برای تبدیل دایره C باید مرکز O را هم‌راستا با بردار \vec{v} به اندازه ۶ واحد انتقال دهیم، بنابراین: $OO' = 6$.



$$R' = R = 3$$

$$OO' = 6 = R + R'$$

پس دو دایره مماس خارج‌اند.

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

موارد «الف» و «ج» طبق تعریف کتاب درست هستند.

ب) نقطه ثابت تبدیل، نقطه‌ای است که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود.

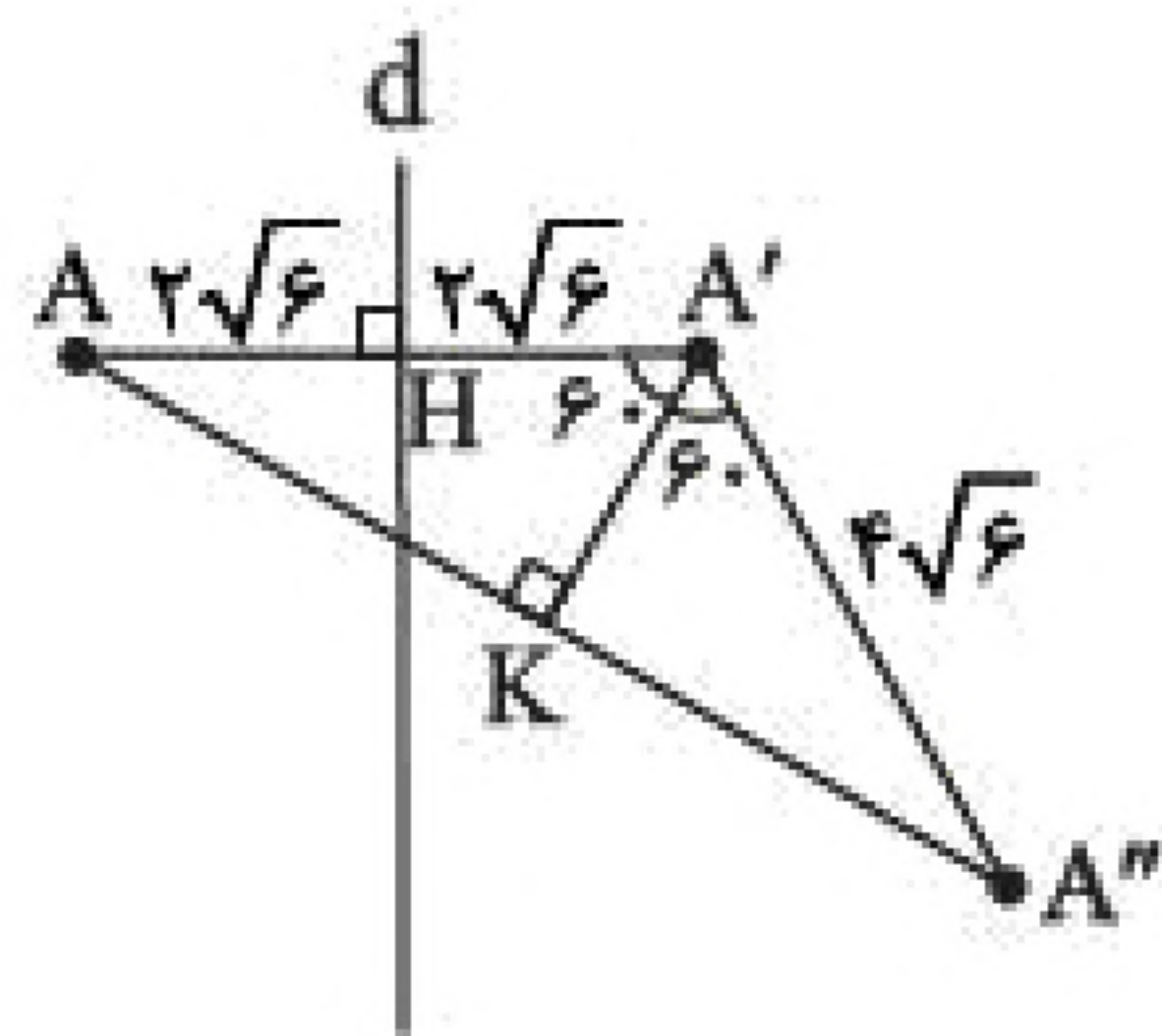
د) تبدیل انتقال همیشه شیب خط را حفظ می‌کند.

ه) اگر $|k| > 1$ باشد، تجانس را انبساط و اگر $|k| < 1$ باشد، تجانس را انقباض گویند.

پس دو مورد درست است.



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



بازتاب طولی است، در نتیجه:

$$AH = A'H = 2\sqrt{6}$$

و دوران نیز طولی است، در نتیجه:

$$AA' = A''A' = 4\sqrt{6}$$

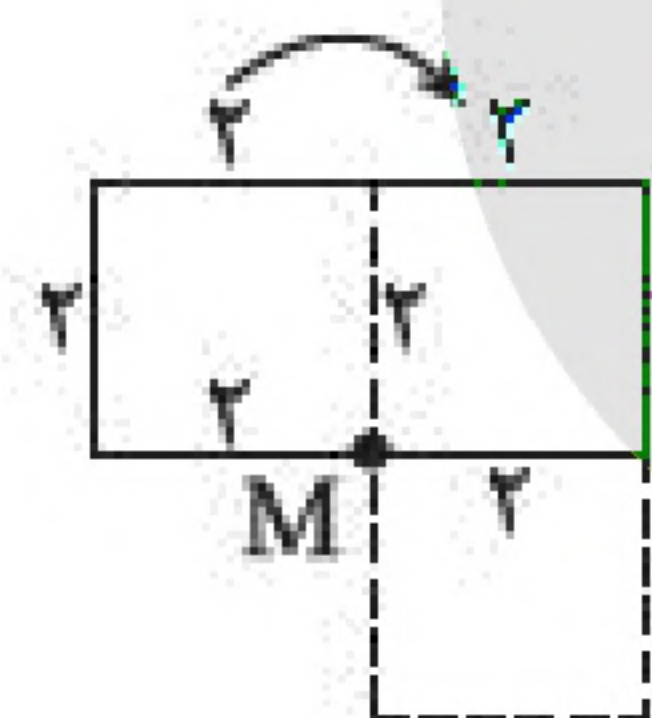
در مثلث متساوی الساقین $AA'A''$ ، ارتفاع و نیمساز است و ضلع روبه‌رو به زاویه 60° درجه، وتر $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است:

$$AK = A''K = \frac{\sqrt{3}}{2} (4\sqrt{6}) = 6\sqrt{2}$$

در نتیجه: $AA'' = 12\sqrt{2}$.

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

شکل مسأله را رسم می‌کنیم. ناحیه مشترک بین دو مستطیل، مربعی به ضلع ۲ واحد است.



$$S = 2^2 = 4$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

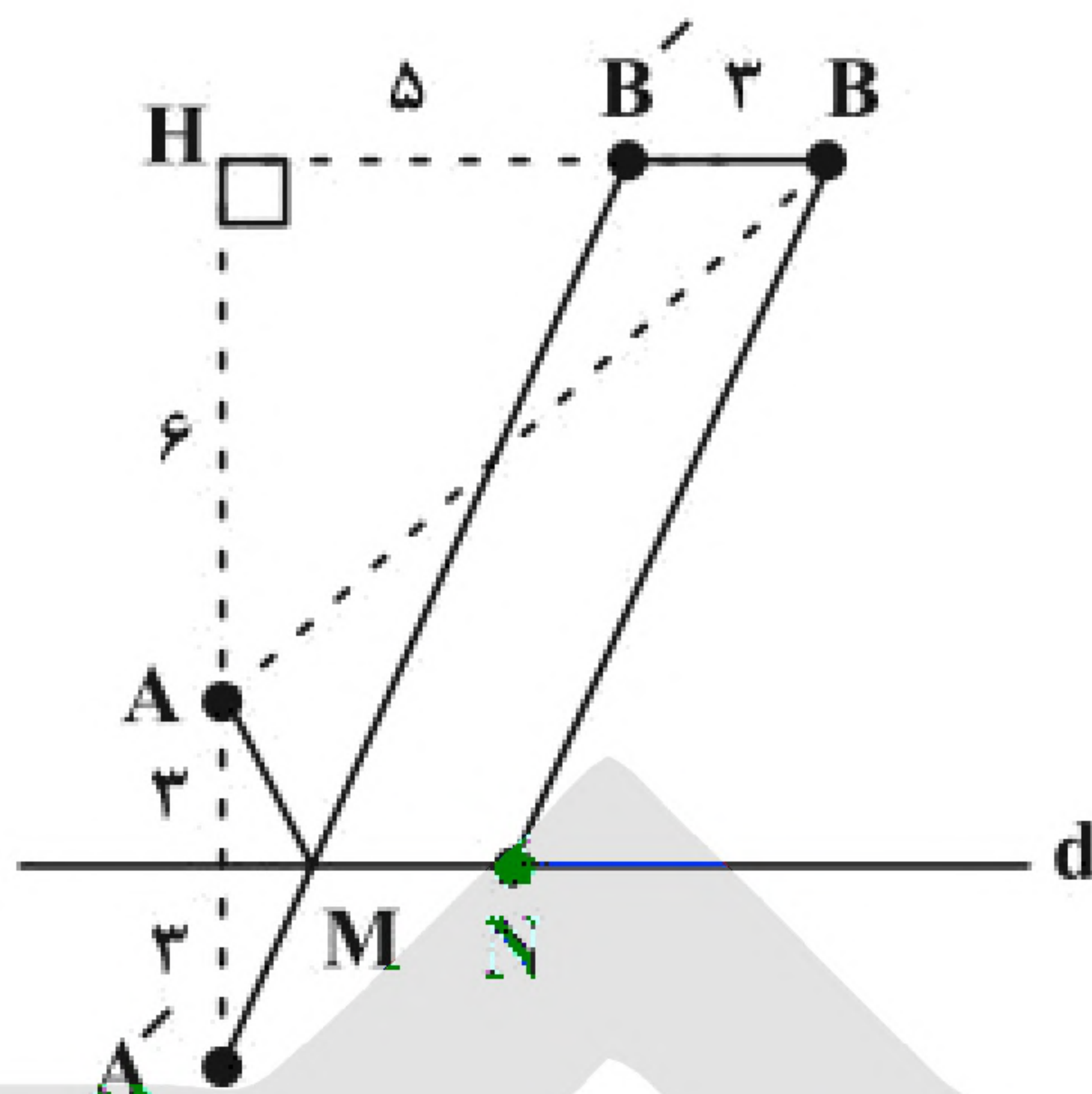
دوران لزوماً شیب را حفظ نمی‌کند، در نتیجه گزینه (۱) نادرست است.

بازتاب نسبت به خط، زاویه بین خطوط را حفظ می‌کند ولی جهت شکل را حفظ نمی‌کند، در نتیجه گزینه (۲) نادرست است.

انتقال تحت برداری به طول غیرصفر، نقطه ثابت ندارد، در نتیجه گزینه (۴) نادرست است.



۲۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{AHB}: AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 10^2 = 6^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow BH = 8$$

از نقطه‌ی B، خطی به طول ۳ کیلومتر موازی با خط d (ساحل دریا) رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی B' حاصل شود. سپس از نقطه‌ی A' (بازتاب نقطه‌ی A نسبت به خط d) به B' وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. اگر N نقطه‌ای به فاصله‌ی ۳ کیلومتر از M روی خط d باشد، آن‌گاه مسیر AMNB کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

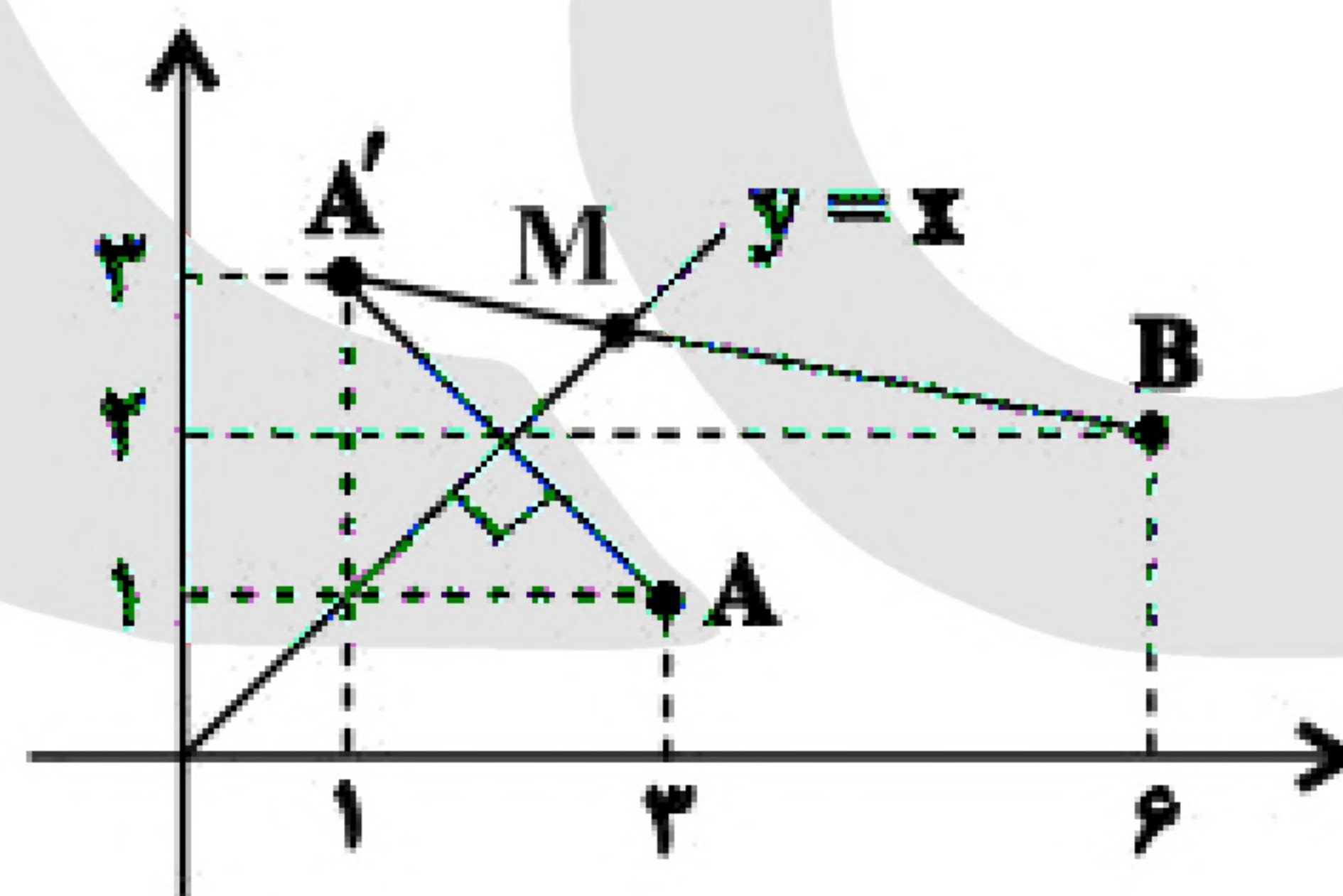
$$\begin{aligned} \text{طول مسیر AMNB} &= AM + MN + NB \\ &= A'M + BB' + MB' = (A'M + MB') + BB' = A'B' + BB' \end{aligned}$$

$$\widehat{A'HB'}: A'B'^2 = A'H^2 + B'H^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow A'B' = 13$$

بنابراین طول جاده‌ی بین A و B، برابر $13 + 3 = 16$ است.

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا قرینه‌ی A را نسبت به خط $y = x$ پیدا می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم. طبق ویژگی بازتاب $MA = MA'$ است و داریم:

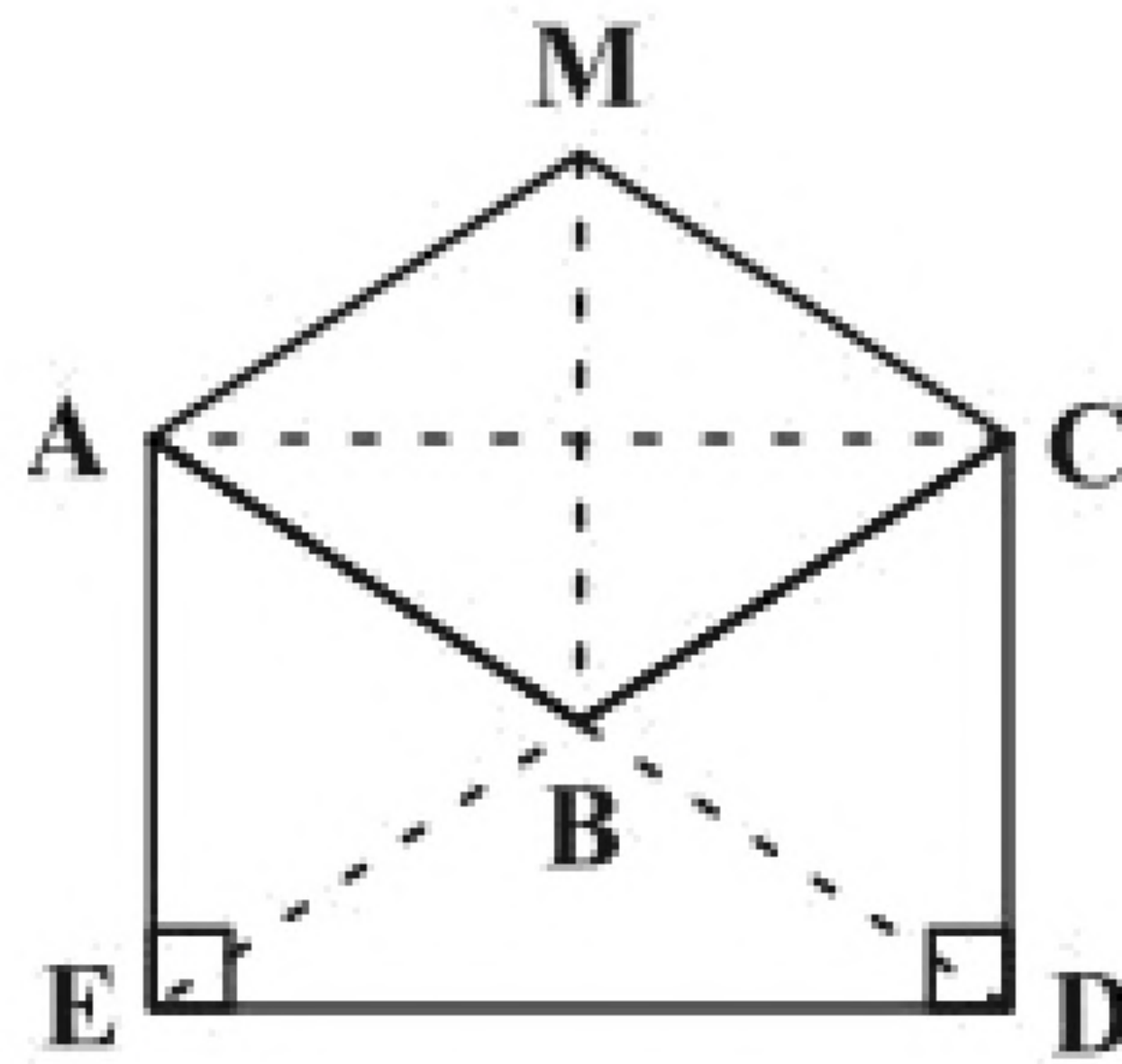


$$MA + MB \stackrel{MA = MA'}{=} MA' + MB = A'B$$

$$A'B = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$



۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

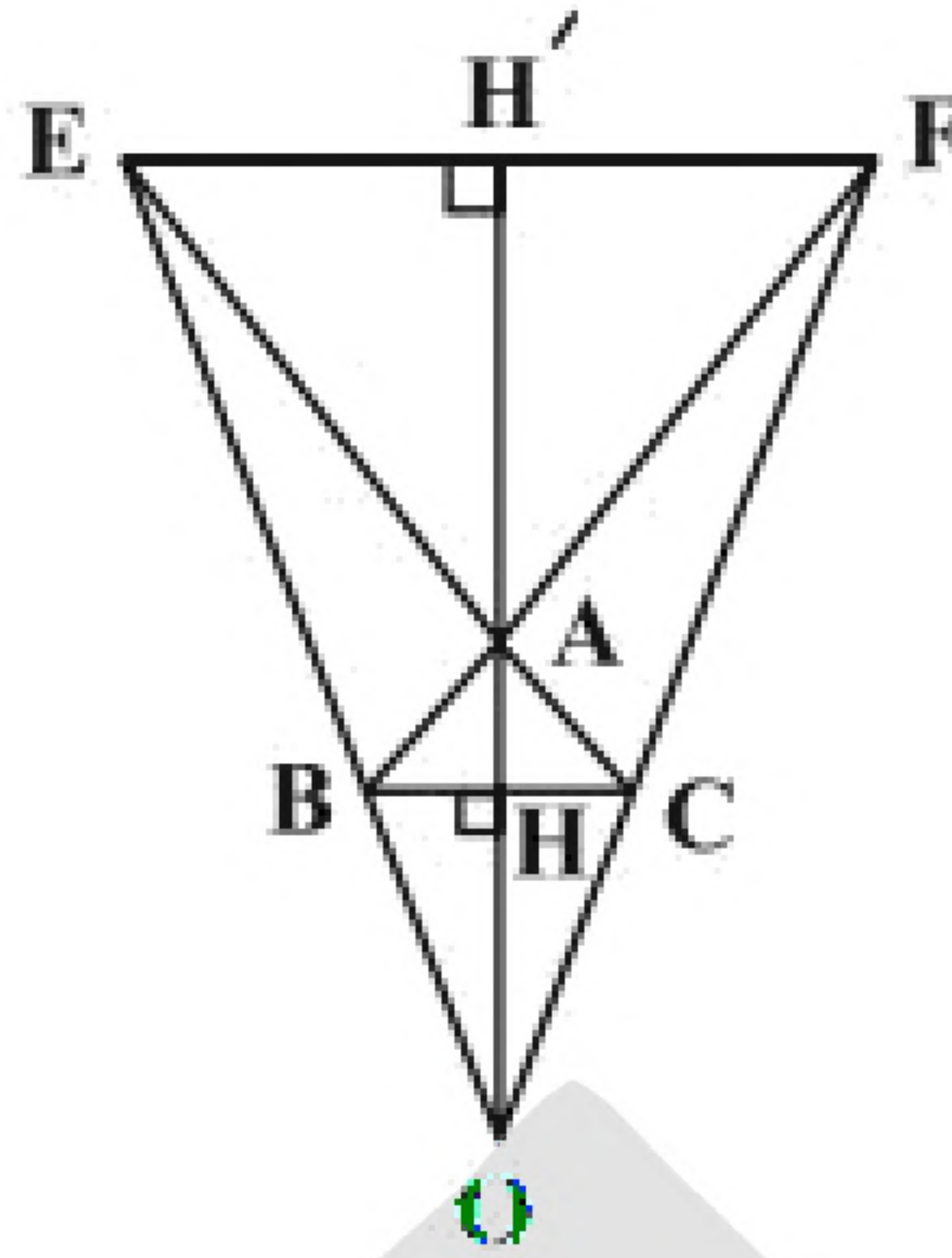


برای افزایش مساحت چندضلعی بدون تغییر محیط و تعداد اضلاع، کافی است بازتاب نقطه‌ی B را نسبت به خط گذرنده از نقاط A و C به دست آوریم.
مطابق شکل چهارضلعی $ACDE$ مستطیل است و مساحت مثلث‌های ABE ، ABC ، BCD و BDE برابر یکدیگر است.
از طرفی دو مثلث AMC و ABC هم‌نهشت هستند و مساحت آن‌ها برابر یکدیگر است. اگر مساحت هر کدام از این مثلث‌ها را با S نمایش دهیم، داریم:

$$\frac{S_{ABCDE}}{S_{AMCDE}} = \frac{3S}{5S} = 0.6$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



مرکز تجانس معکوس همن نقطه‌ی A است. برای یافتن مرکز تجانس مستقیم کافی است از E به B و از F به C وصل کرده و امتداد دهیم تا یکدیگر را در نقطه‌ی O قطع کنند. این نقطه مرکز تجانس مستقیم است. در مثلث

متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع a، طول ارتفاع از رابطه‌ی $h_a = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AH' = \frac{\sqrt{3}}{2} EF = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$HH' = AH + AH' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

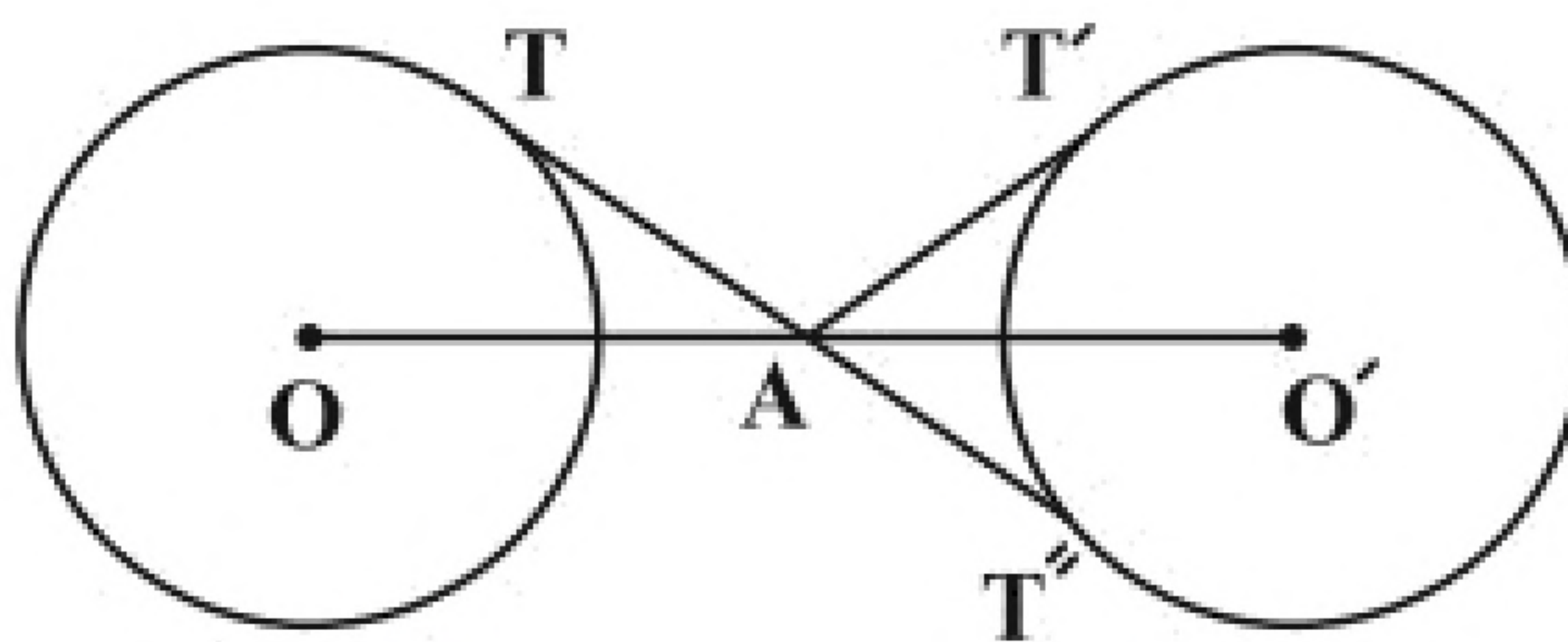
طبق قضیه‌ی اساسی تشابه، دو مثلث OBC و OEF متشابه هستند. پس نسبت ارتفاع‌ها در این دو مثلث برابر نسبت تشابه دو مثلث است.

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{BC}{EF} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفصیل نسبت در مخرج}} \frac{OH}{\frac{5\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{OH}{5\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow OH = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{فاصله‌ی مراکز تجانس : } OA = OH + AH = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مرکز تجانس معکوس، محل برخورد مماس مشترک‌های داخلی و خط‌المركزین دو دایره است.

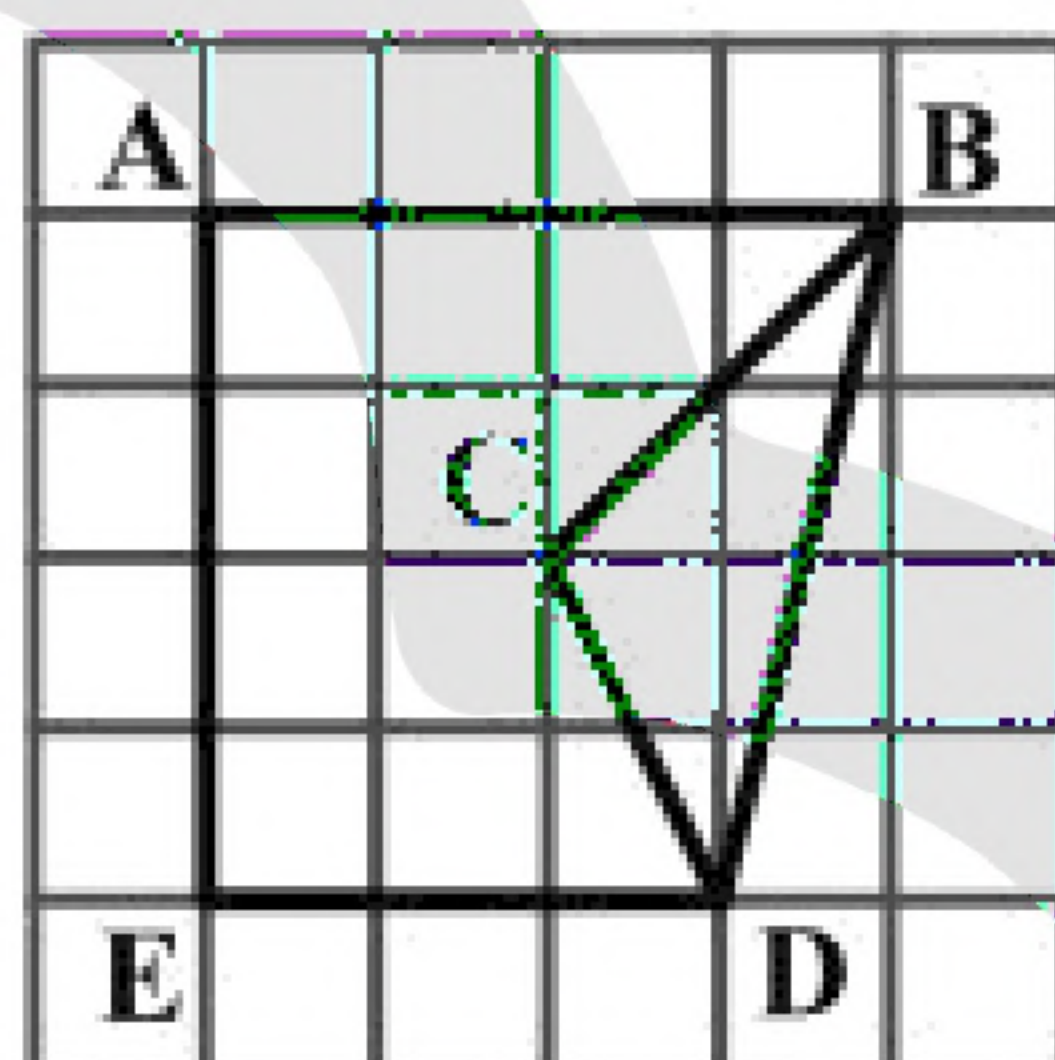


$$AT = AT' = AT + AT'' = TT'' = \sqrt{OO'^2 - (R + R')^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - (4 + 4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

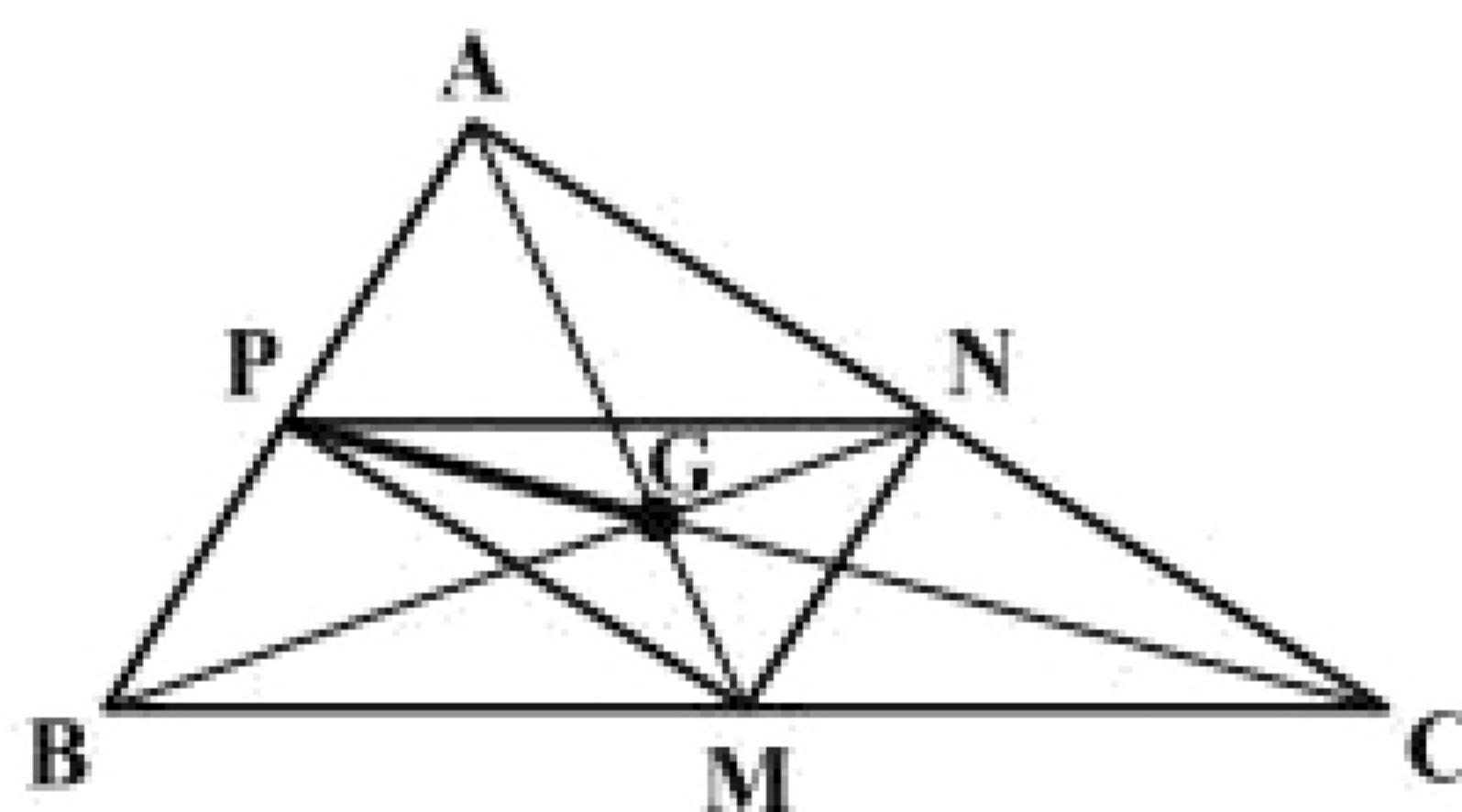


مطابق شکل اگر از B به D وصل کنیم، در مثلث شبکه‌ای BCD، تعداد نقاط مرزی برابر $b = 4$ و تعداد نقاط درونی برابر $i = 2$ است. در نتیجه طبق رابطه‌ی پیک داریم:

$$S_{\triangle BCD} = \frac{b}{2} + i - 1 = 3$$

مقدار افزایش مساحت، دقیقاً دو برابر مساحت مثلث BCD، یعنی برابر ۶ است.

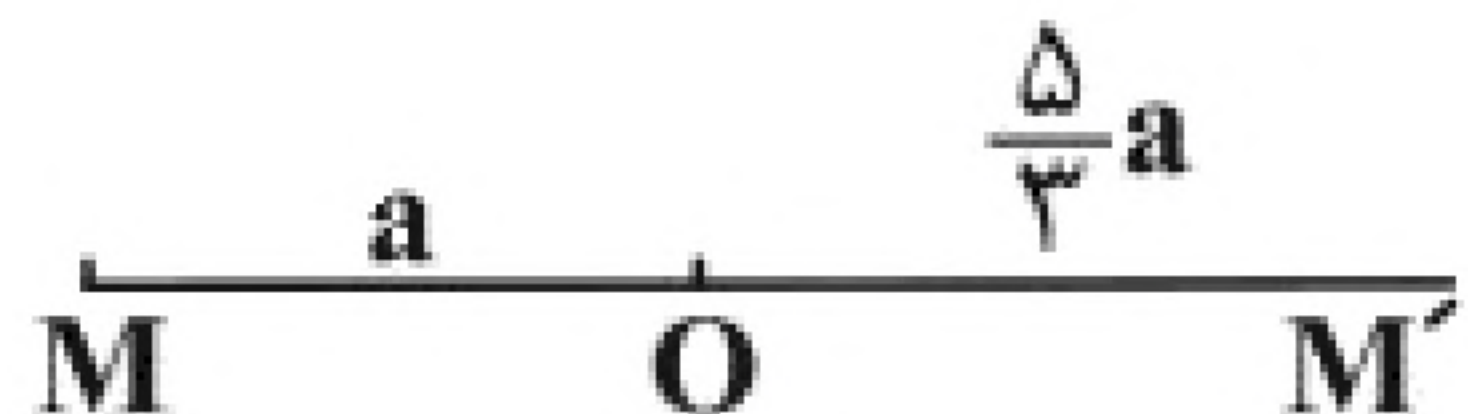
۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق تعریف تجانس، اگر نقطه‌ی A' تصویر نقطه‌ی A در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد، آنگاه سه نقطه‌ی O، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. بنابراین اگر نقاط M، N و P به ترتیب مجانس نقاط A، B و C در یک تجانس باشند، مرکز تجانس قطعاً بر روی خط‌های شامل پاره‌خط‌های AM، BN و CP قرار دارد. چون این سه پاره‌خط میانه‌های مثلث ABC هستند، پس نقطه‌ی تقاطع آنها همان نقطه‌ی هم‌مرسی میانه‌های مثلث ABC است.





۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون نسبت تجانس منفی است، نقطه‌ی O بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد. اگر فاصله‌ی O تا M را برابر a فرض کنیم، آن‌گاه طبق شکل خواهیم داشت:

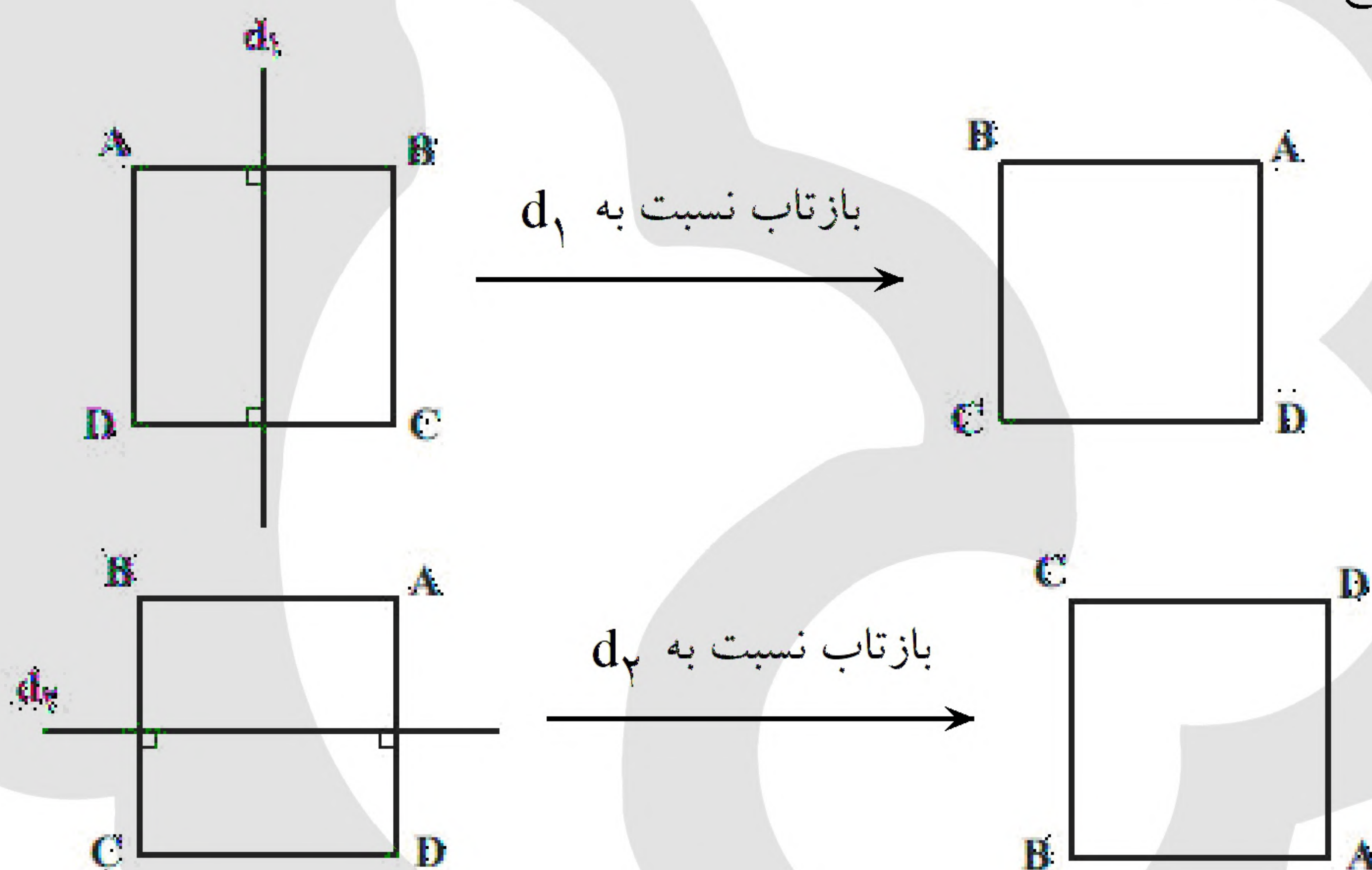
$$\frac{OM'}{MM'} = \frac{\frac{5}{3}a}{a + \frac{5}{3}a} = \frac{5}{8}$$



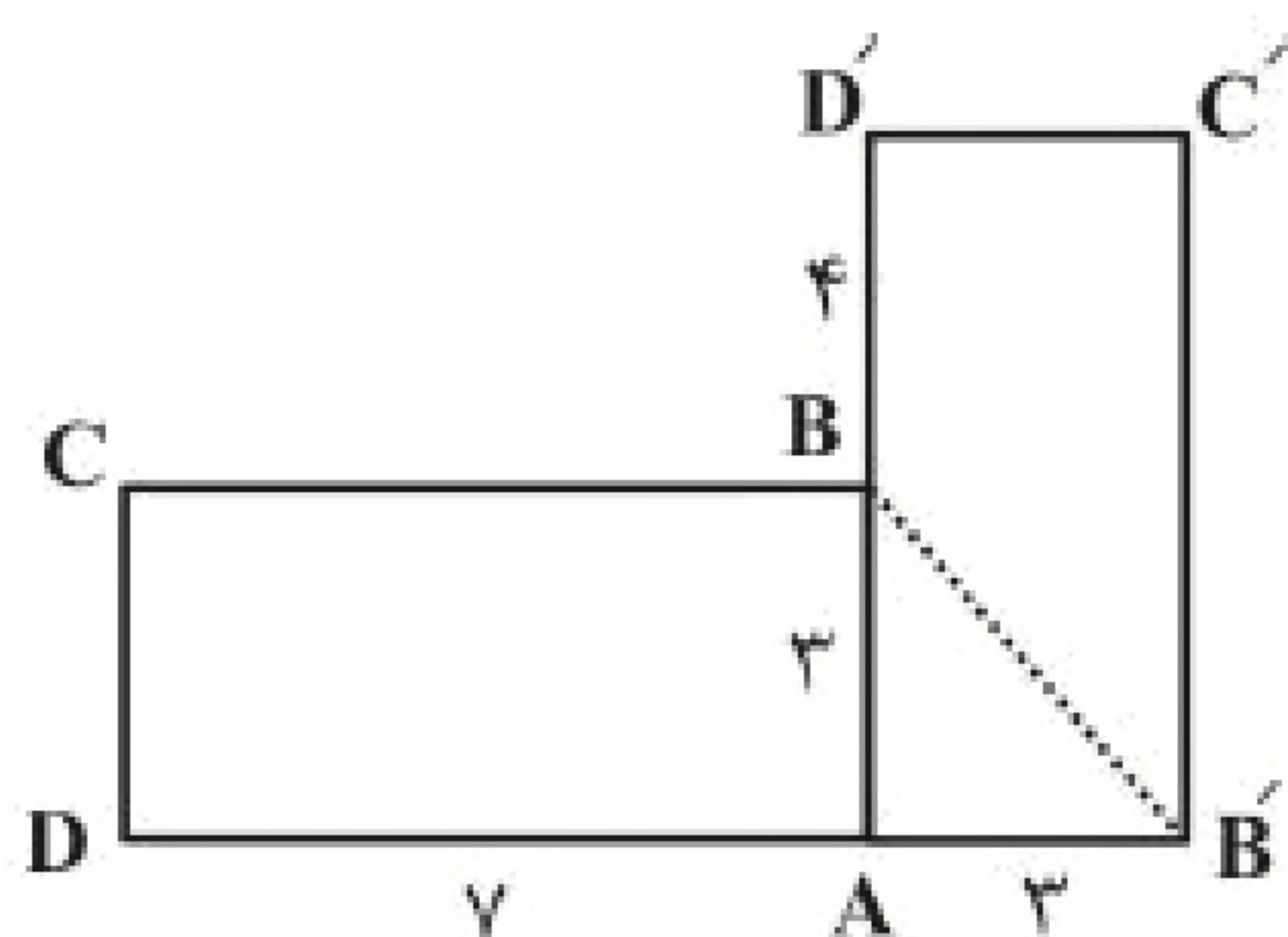
۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تجانس، در حالت کلی طولی نیست، مگر اینکه $|k| = 1$ باشد.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در یک تجانس غیر همانی ($k \neq 1$)، تنها مرکز تجانس تحت تبدیل، ثابت می‌ماند. بنابراین مرکز تجانس، تنها نقطه‌ی ثابت تبدیل در یک تجانس غیرهمانی است.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



بنابراین بعد از دو بازتاب، نقطه B جایگزین نقطه D در شکل اولیه می‌شود.



۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دوران یک تبدیل طولی است، پس داریم:

$$AD' = AD \Rightarrow AB + 4 = 7 \Rightarrow AB = 3$$

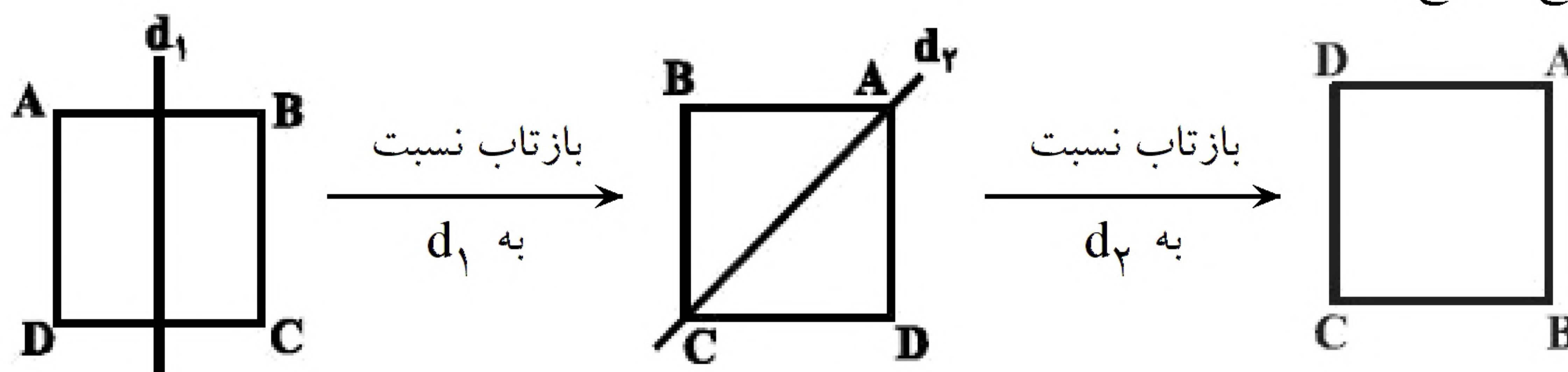
از طرفی ضلع AB در این دوران بر AB' منطبق می‌شود، پس $AB' = AB = 3$.

طبق قضیه فیثاغورس در مثلث ABB' داریم:

$$BB'^2 = AB^2 + AB'^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow BB' = 3\sqrt{2}$$



۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



در واقع مربع نسبت به دو خط متقاطع بازتاب یافته است، پس مطابق شکل، مربع به اندازه‌ی دو برابر زاویه‌ی بین دو خط یعنی به اندازه‌ی 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران یافته است. در نتیجه تنها نقطه‌ی ثابت تبدیل، مرکز دوران (محل برخورد خطوط d_1 و d_2 یعنی مرکز مربع) است.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

فرض کنید طول هر ضلع مربع ABCD برابر با a باشد.

مطابق شکل چهارضلعی $B'B''D''D'$ مستطیل است و داریم:

$$B'D' = a\sqrt{2}$$

$$B'B'' = BB' + BB'' = 2a\sqrt{2}$$

$$S_{B'B''D''D'} = B'D' \times B'B'' = a\sqrt{2} \times 2a\sqrt{2}$$

$$= 4a^2 = 4S_{ABCD}$$

