

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

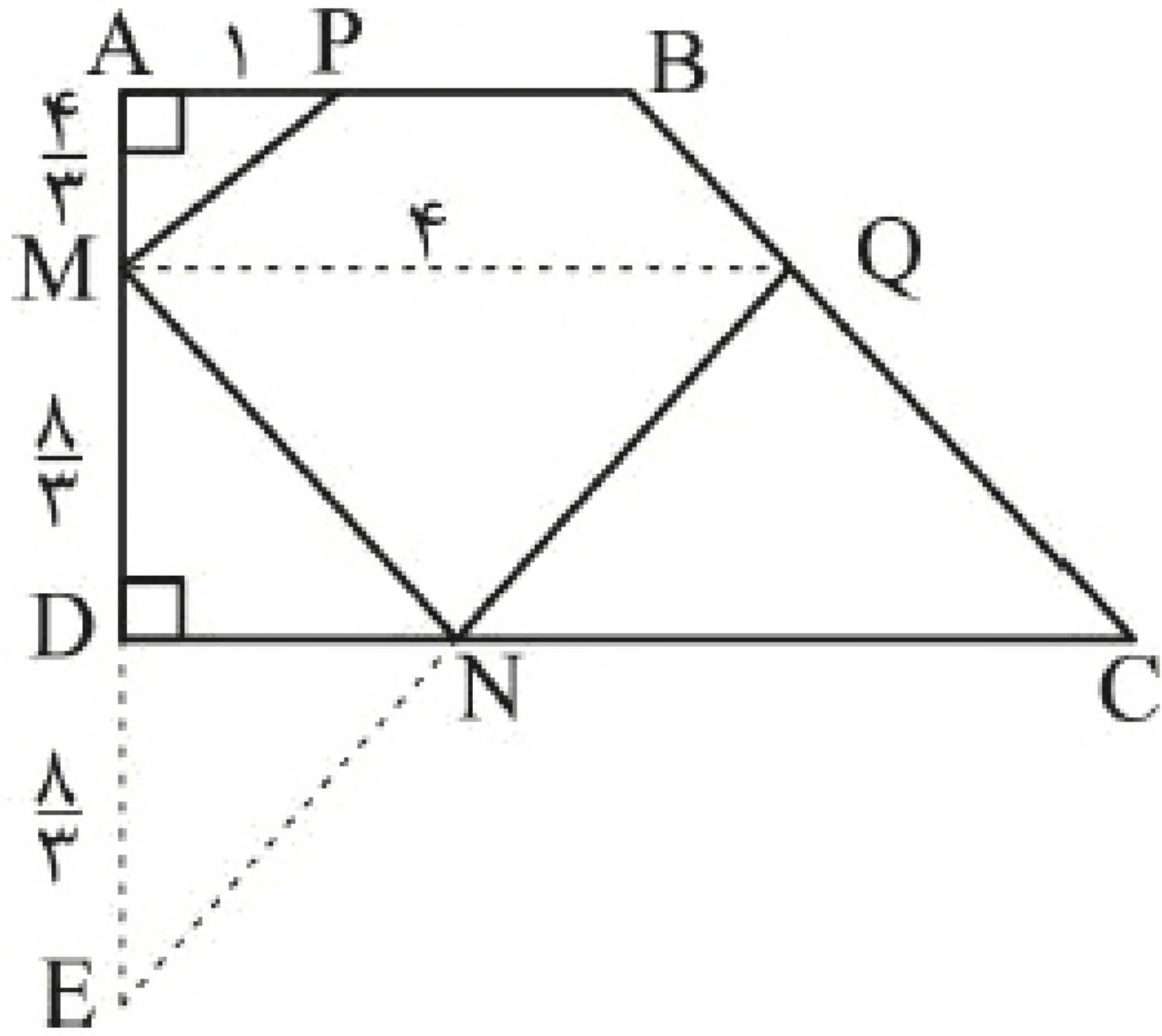


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{AM}{AD} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3} \Rightarrow MQ \parallel DC$$

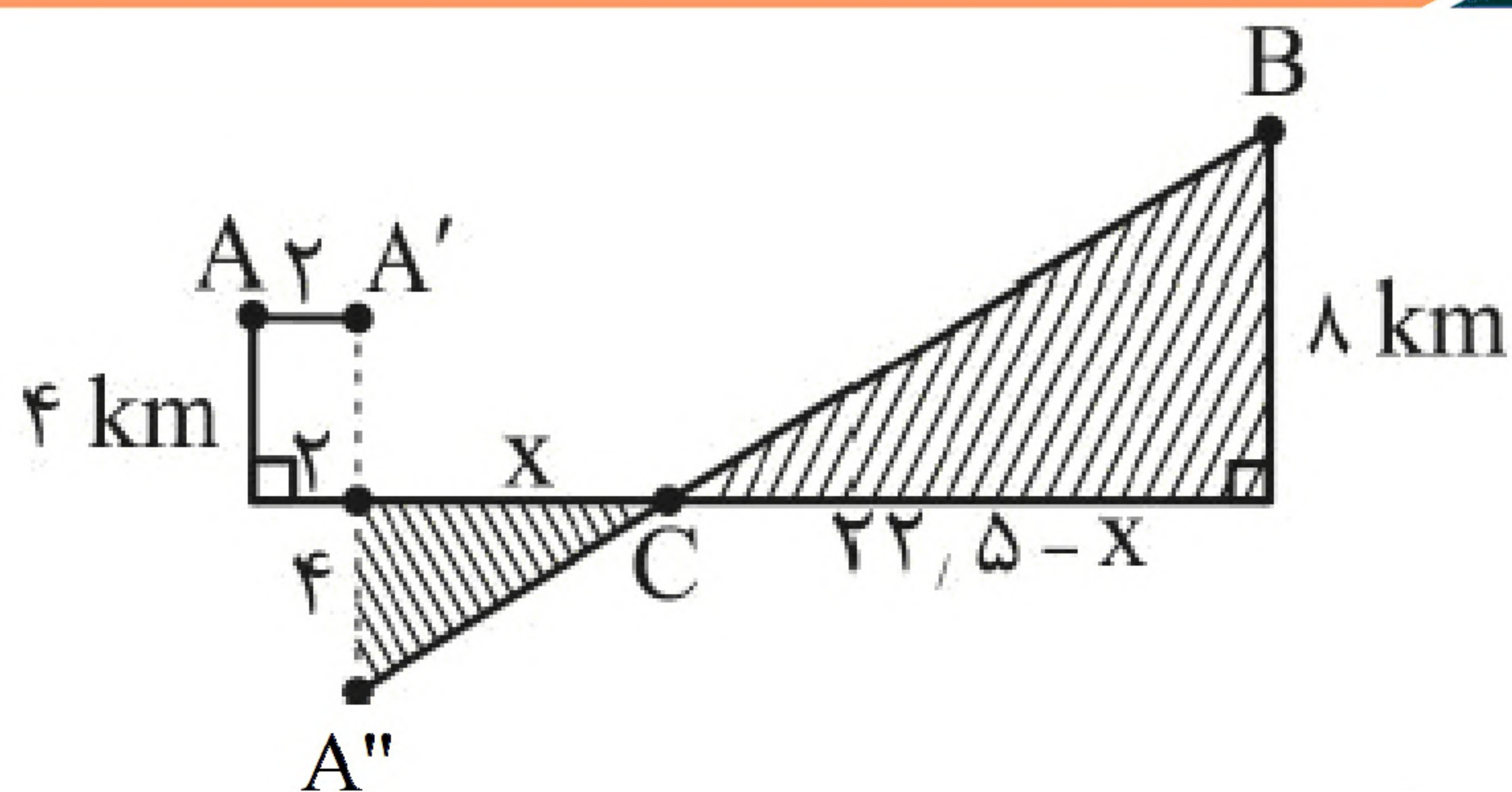
از نقطه A قطر AC را رسم می‌کنیم با دو بار نوشتن قضیه تالس به نتیجه زیر می‌رسیم.

$$MQ \parallel DC \Rightarrow MQ = \frac{2AB + CD}{3} \\ = \frac{2 \times 1 + 6}{3} = 4$$

$$PM = \sqrt{1 + \frac{16}{9}} = \frac{5}{3}, EQ = \sqrt{ME^2 + MQ^2}$$

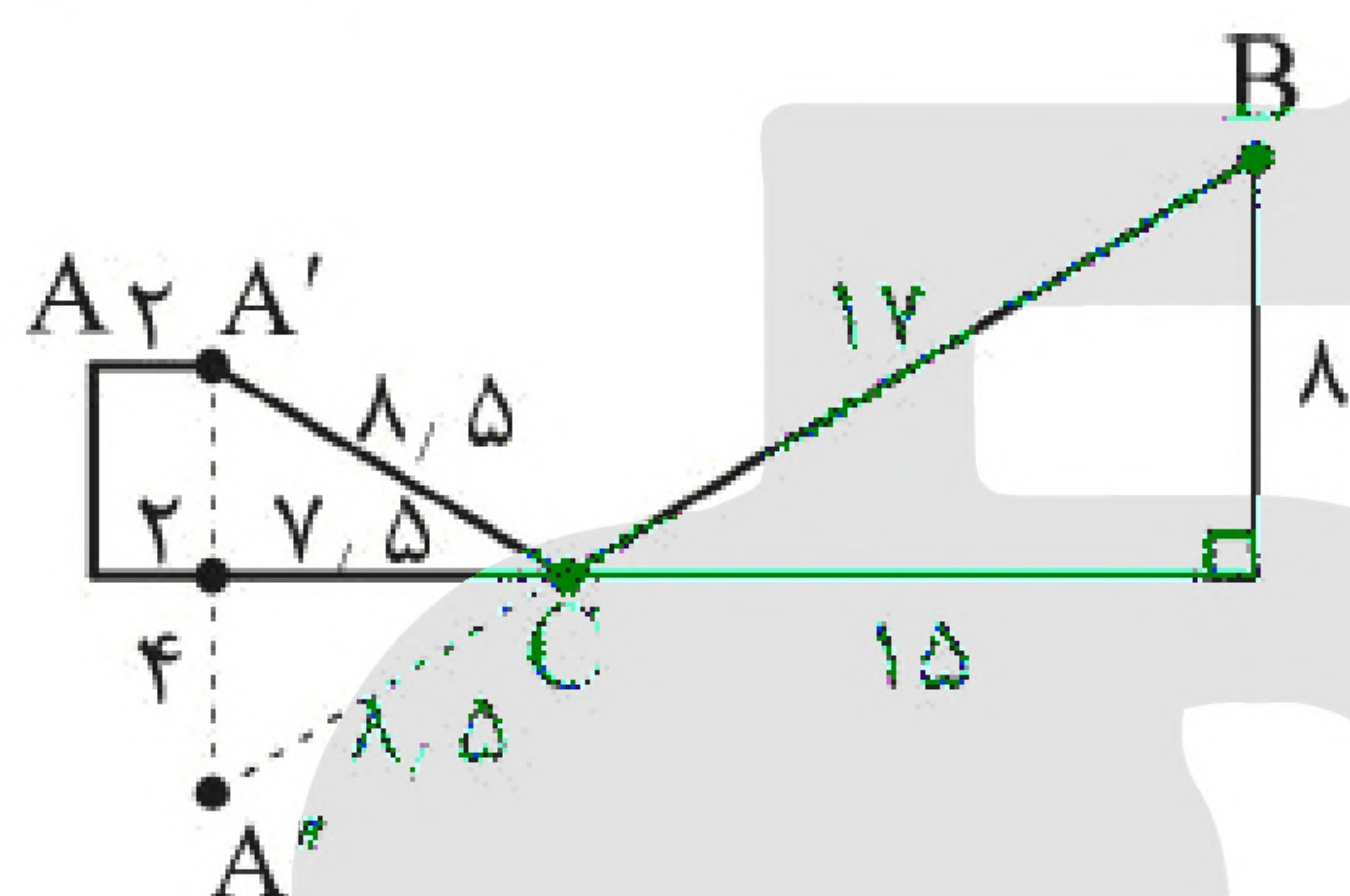
$$= \sqrt{\left(\frac{16}{3}\right)^2 + 4^2} = \frac{20}{3}$$

$$PM + MN + NQ = PM + EQ = \frac{5}{3} + \frac{20}{3} = \frac{25}{3}$$



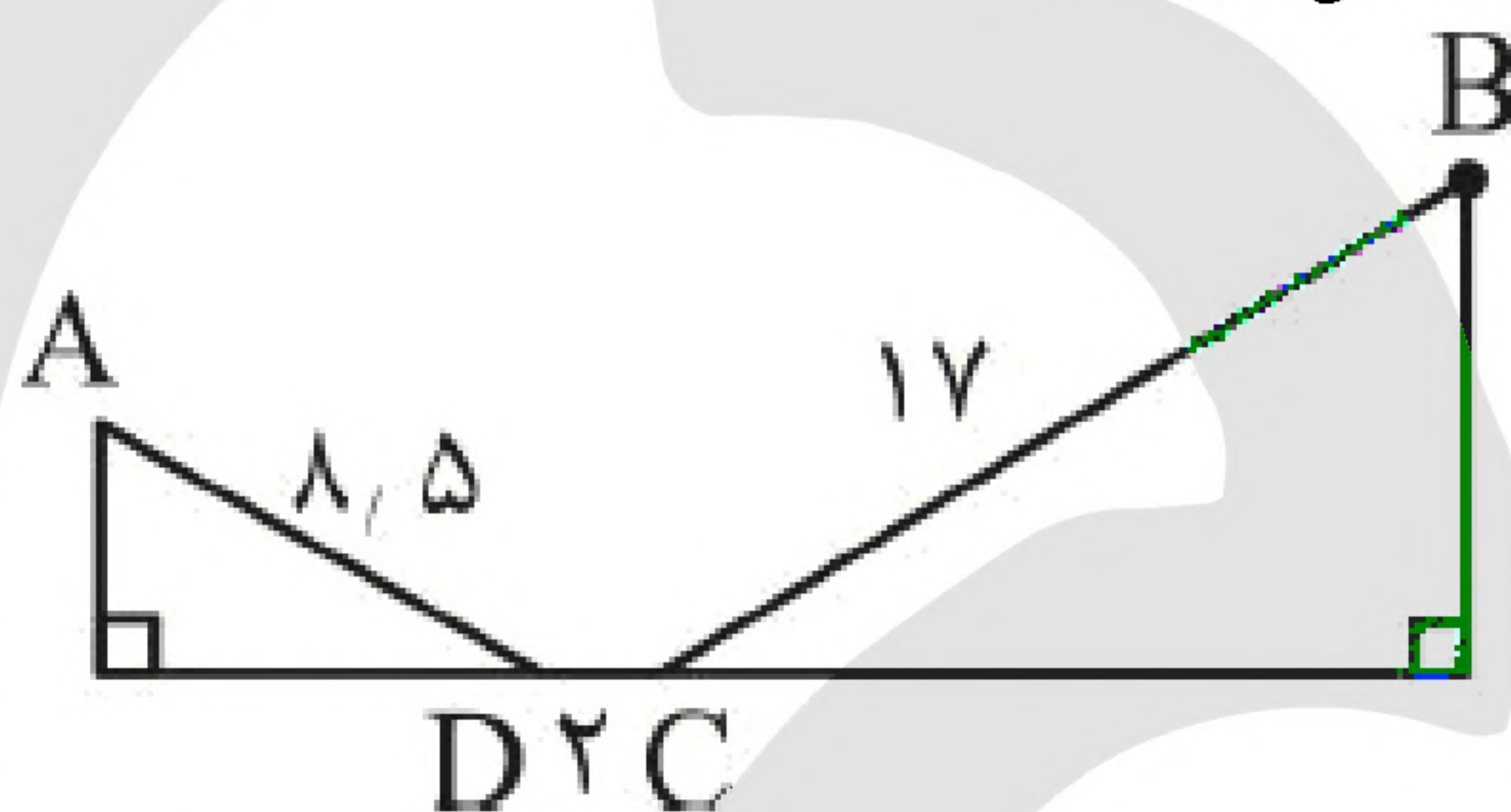
۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا نقطه A را به موازات خط d به اندازه ۲ کیلومتر به سمت راست منتقل می‌کنیم تا به نقطه A' برسیم. سپس قرینه A' نسبت به خط d می‌یابیم و آن را A'' می‌نامیم. نقطه A'' را به نقطه B وصل می‌کنیم. اگر پاره خط $A''B$ ، خط d را در نقطه C قطع کند، آنگاه با توجه به تشابه مثلث‌های سایه‌زده خواهیم داشت:

$$\frac{X}{4} = \frac{22/5 - X}{1} \Rightarrow 1X = 9. - 4X \Rightarrow 12X = 9. \Rightarrow X = \frac{9.}{12} = 7/5 \Rightarrow 22/5 - X = 22/5 - 7/5 = 15$$



$$\begin{aligned} BC^{\vee} &= \wedge^{\vee} + 15^{\vee} = 64 + 225 = 289 \\ \Rightarrow BC &= 17 \Rightarrow A^{\vee}C = \wedge/5 \Rightarrow A'C = \wedge/5 \end{aligned}$$

بنابراین کوتاه‌ترین مسیر ممکن مطابق شکل زیر است:



$$\text{طول کوتاهترین مسیر} = ۸/۵ + ۲ + ۱۷ = ۲۷/۵ \text{ km}$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز دوران، محل برخورد عمودمنصف‌های پاره‌خط حاصل از هر نقطه و دوران یافته‌اش است. بنابراین معادله خط دو عمودمنصف پاره‌خط‌های AA' و BB' را نوشته و قطع می‌دهیم تا مختصات مرکز دوران

$$m_{AA'} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{-5 - 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = 2$$

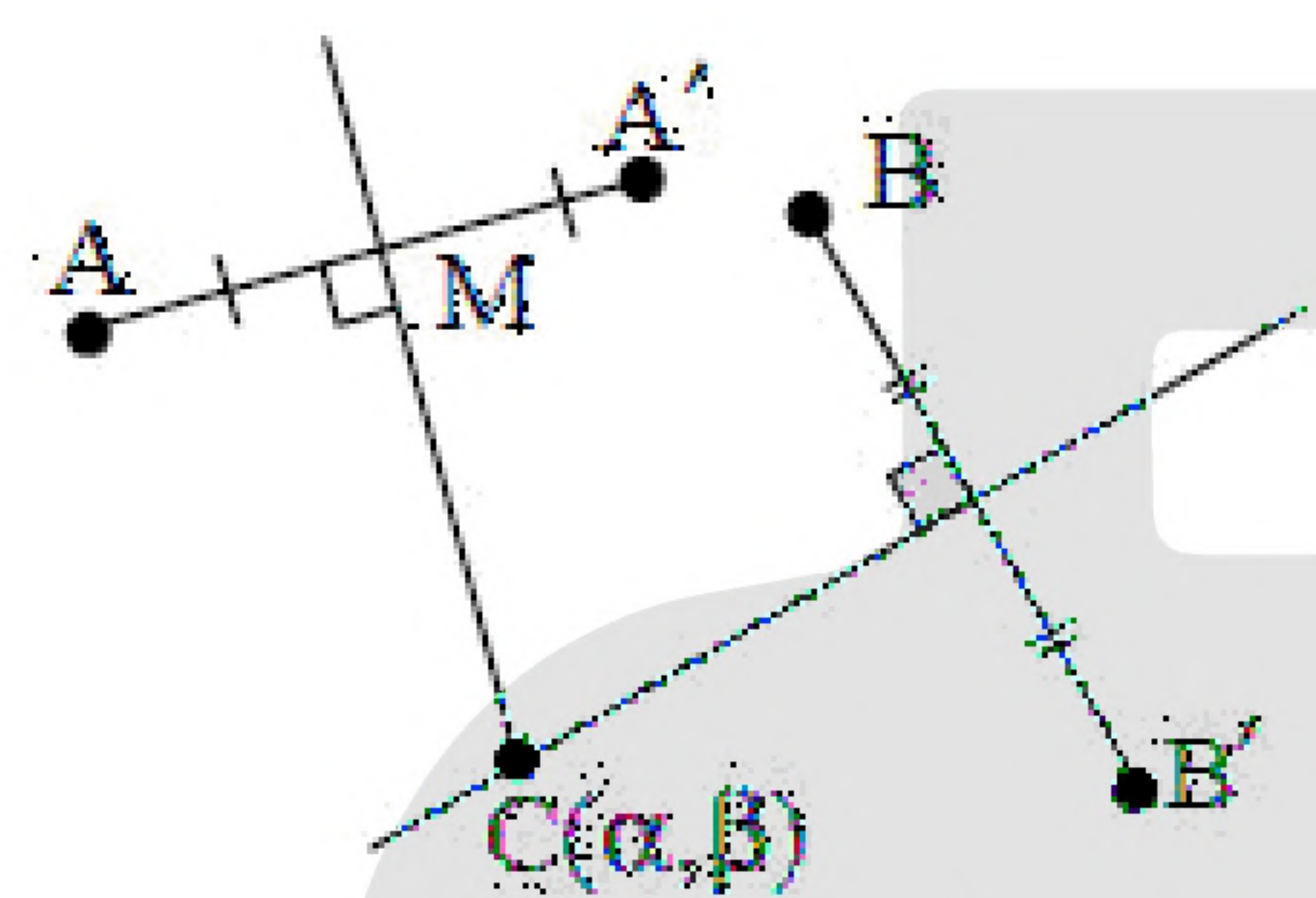
$C(\alpha, \beta)$ به دست آید:

$$AA' \text{ وسط } M \begin{cases} \frac{-5+1}{2} = -2 \\ \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 2(x - (-2)) \Rightarrow y = 2x + \frac{9}{2} \quad (1)$$

$$m_{BB'} = \frac{4-1}{3-0} = 1 \Rightarrow m_2 = -1$$

$$BB' \text{ وسط } N \begin{cases} \frac{3+0}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow y - \frac{5}{2} = -1 \left(x - \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = -x + 4 \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + \frac{9}{2} \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{-1}{6} = \alpha, y = \frac{25}{6} = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 4$$



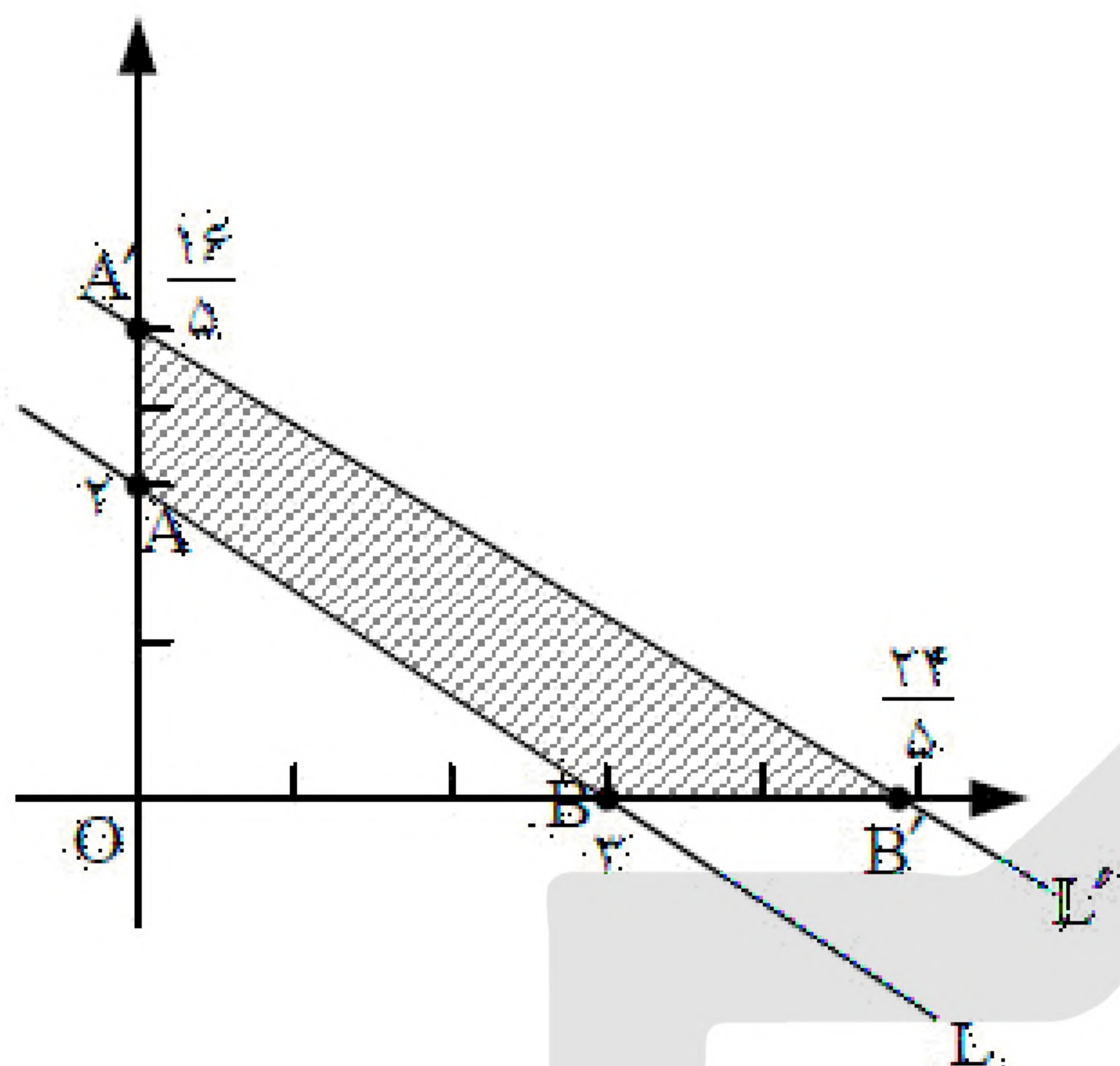
۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

ویژگی تبدیل	طول پاره‌خط را حفظ می‌کند	اندازه زاویه را حفظ می‌کند	شیب خط را حفظ می‌کند	جهت شکل را حفظ می‌کند	مساحت شکل را حفظ می‌کند
بازتاب	درست	درست	نادرست	نادرست	درست
انتقال	درست	درست	درست	درست	درست
دوران	درست	درست	نادرست	درست	درست
تجانس	نادرست	درست	درست	درست	نادرست

$$\frac{15}{20} \times 100 = 75\%$$

از ۲۰ خانه جدول ۱۵ خانه درست است، بنابراین:

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} \text{OA}' = \text{K} \times \text{OA} = \frac{1}{5} \times 2 = \frac{16}{5} \\ \text{OB}' = \text{K} \times \text{OB} = \frac{1}{5} \times 3 = \frac{24}{5} \end{cases}$$

$$S_{\text{هاشورخورد}} = S_{O A' B'} - S_{O A B}$$

$$S_{\text{هاشورخورده}} = \frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times \frac{24}{5} - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 4/68$$

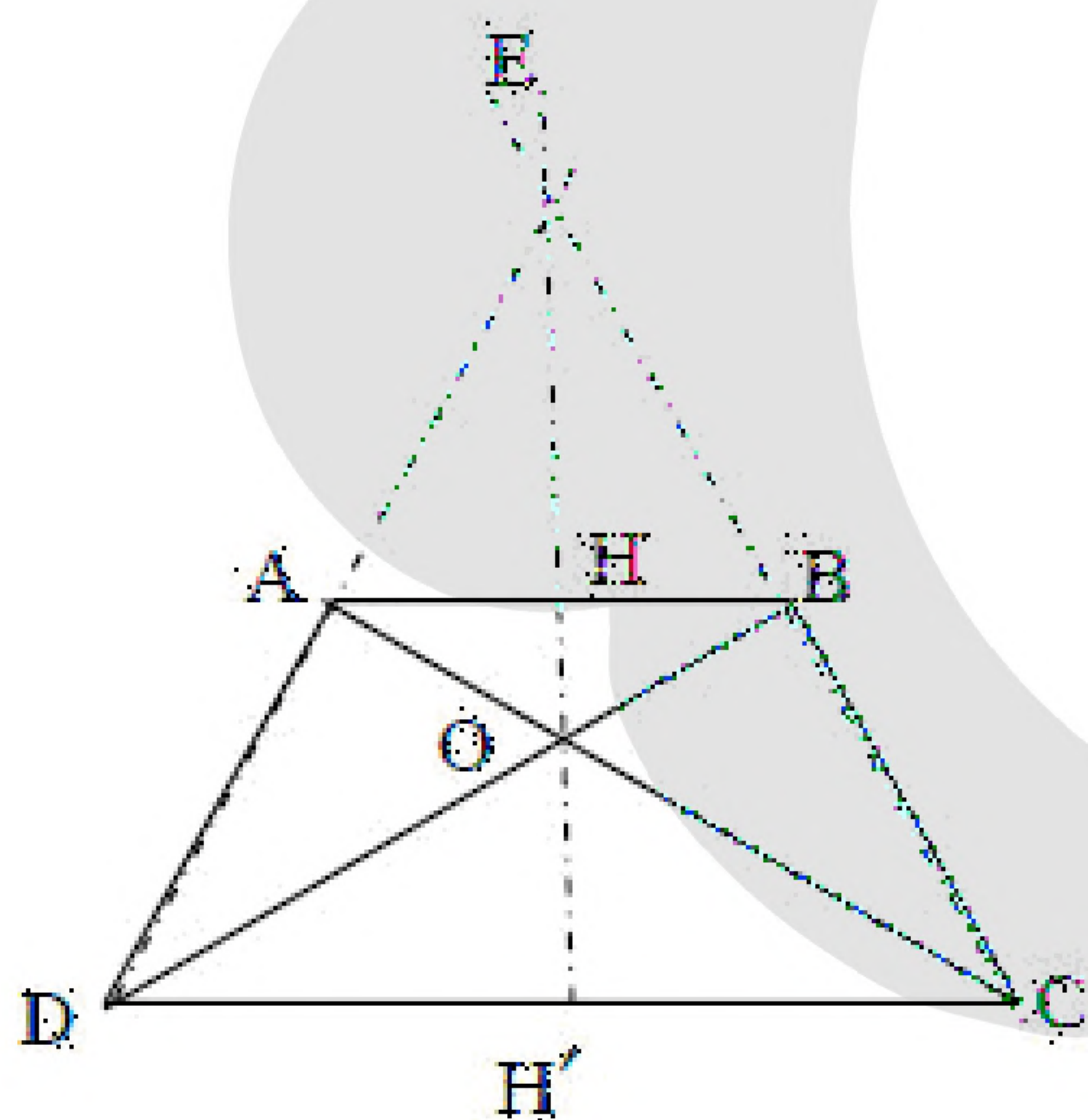
۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرکز تجانس مستقیم و معکوس دو قاعده دوزنقه نقاط E, O است دو مثلث EAB و EDC متشابه هستند.

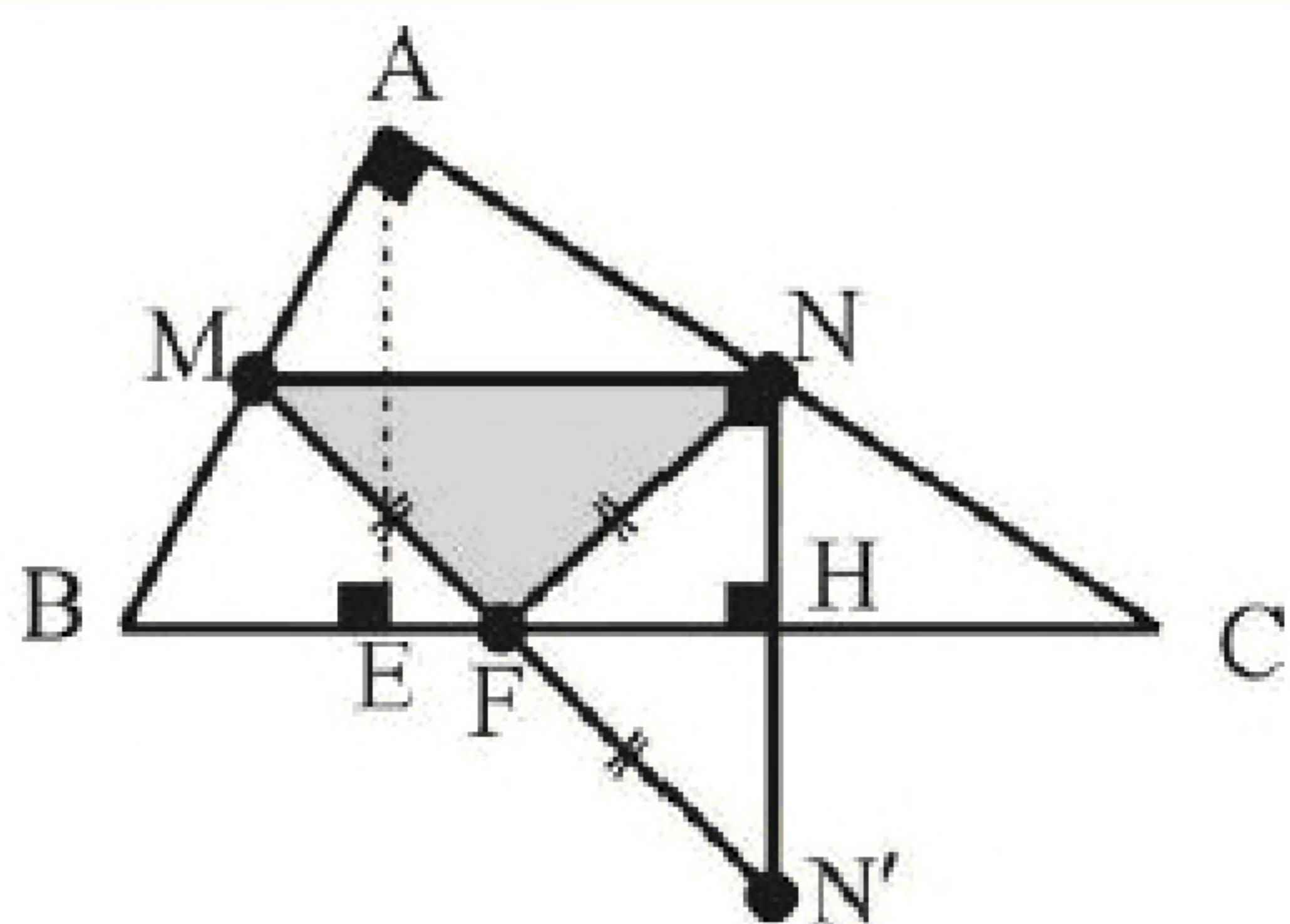
$$\frac{EH}{EH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{EH}{EH+2} = \frac{2}{5} \Rightarrow EH = \frac{4}{3}$$

از تشابه دو مثلث OAB , ODC نتیجه می شود:

$$\frac{OH}{OH'} = \frac{AB}{CD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{OH}{OH + OH'} = \frac{2}{2+5} \Rightarrow OH = \frac{2}{7}$$

$$\text{EO} = \text{EH} + \text{OH} = \frac{\wedge}{\text{ㄣ}} + \frac{\wedge}{\vee} = \frac{\wedge}{\text{ㄣ}\vee}$$





۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$$

بازتاب N را نسبت به BC نقطه N' نامیده و آن را به M وصل می‌کنیم.

MN' وتر BC را در F قطع می‌کند. محیط MNF کمترین مقدار را دارد زیرا:

$$\begin{aligned} MN + NF + FM &= MN + FN' + FM \\ &= MN + MN' \end{aligned}$$

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow MN = 5$$

$$AE \times BC = AB \times AC \Rightarrow AE \times 10 = 6 \times 8 \Rightarrow AE = 4/8$$

$$NH \parallel AE \Rightarrow \triangle NHC \sim \triangle AEC : \frac{NH}{AE} = \frac{NC}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow NH = \frac{1}{2} AE = 2/8$$

$$NN' = 2NH = 4/8 \Rightarrow NN' = 4/8$$

$$S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} S_{\triangle MNN'} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MN \times NN' \right) = \frac{1}{4} \times 5 \times 4/8 = 6$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به مسئله هم‌پیرامونی، کافی است بازتاب نقاط A و C و E و G را به ترتیب نسبت به محور بازتاب HB و BD و DF و FH به دست آورده و مساحت مثلث‌های ایجاد شده را حساب کنیم:

$$S_1 = 2S_{\triangle ABH} = 2 \times \frac{3 \times 4}{2} = 12$$

$$S_2 = 2S_{\triangle BCD} = 2 \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sin 135^\circ \right) = 12$$

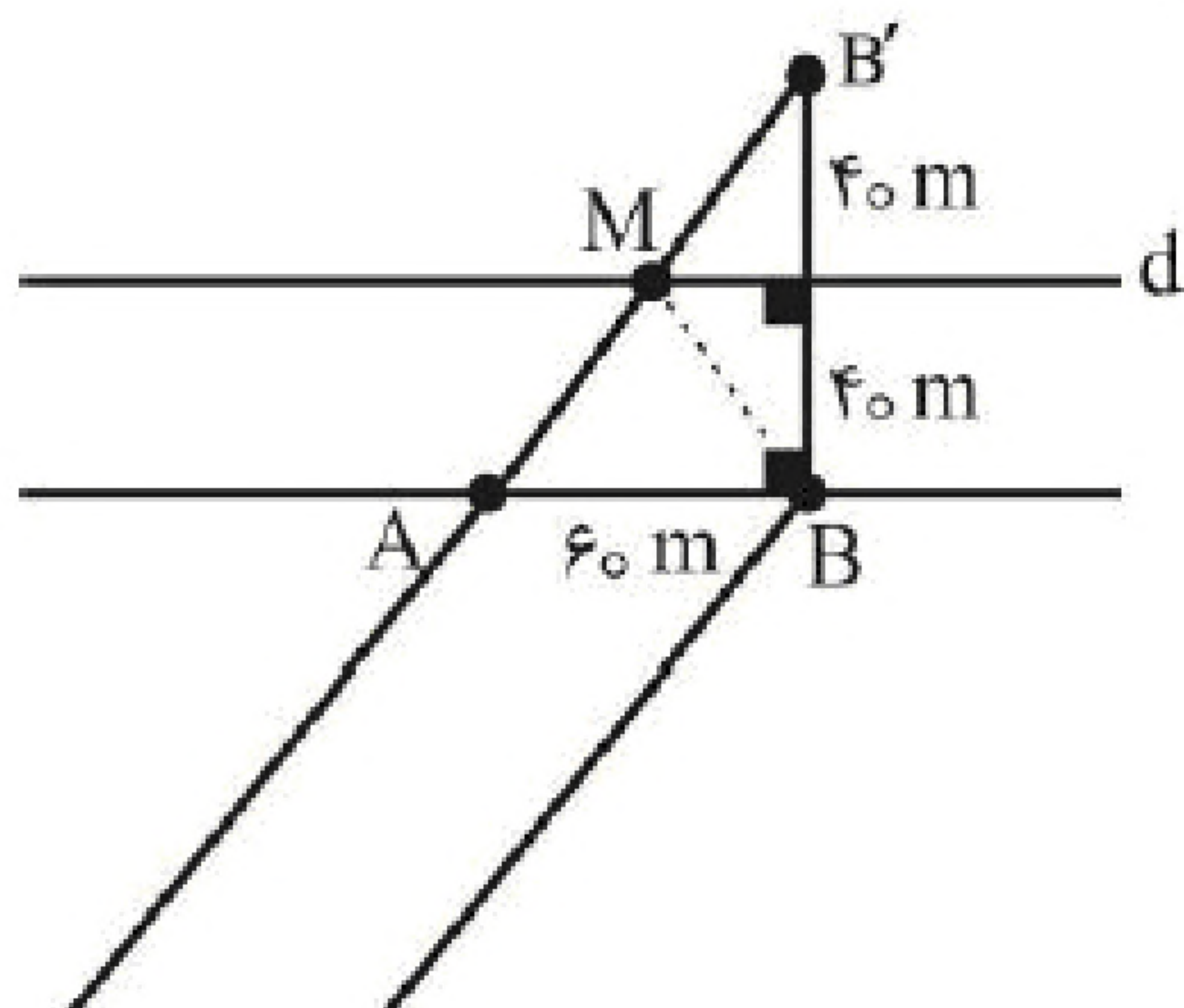
$$S_3 = 2S_{\triangle DEF} = 2 \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sin 120^\circ \right) = 18$$

$$S_4 = 2S_{\triangle FGH} = 2 \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \sin 150^\circ \right) = 9$$

$$\Delta S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 12 + 12 + 18 + 9 = 51$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

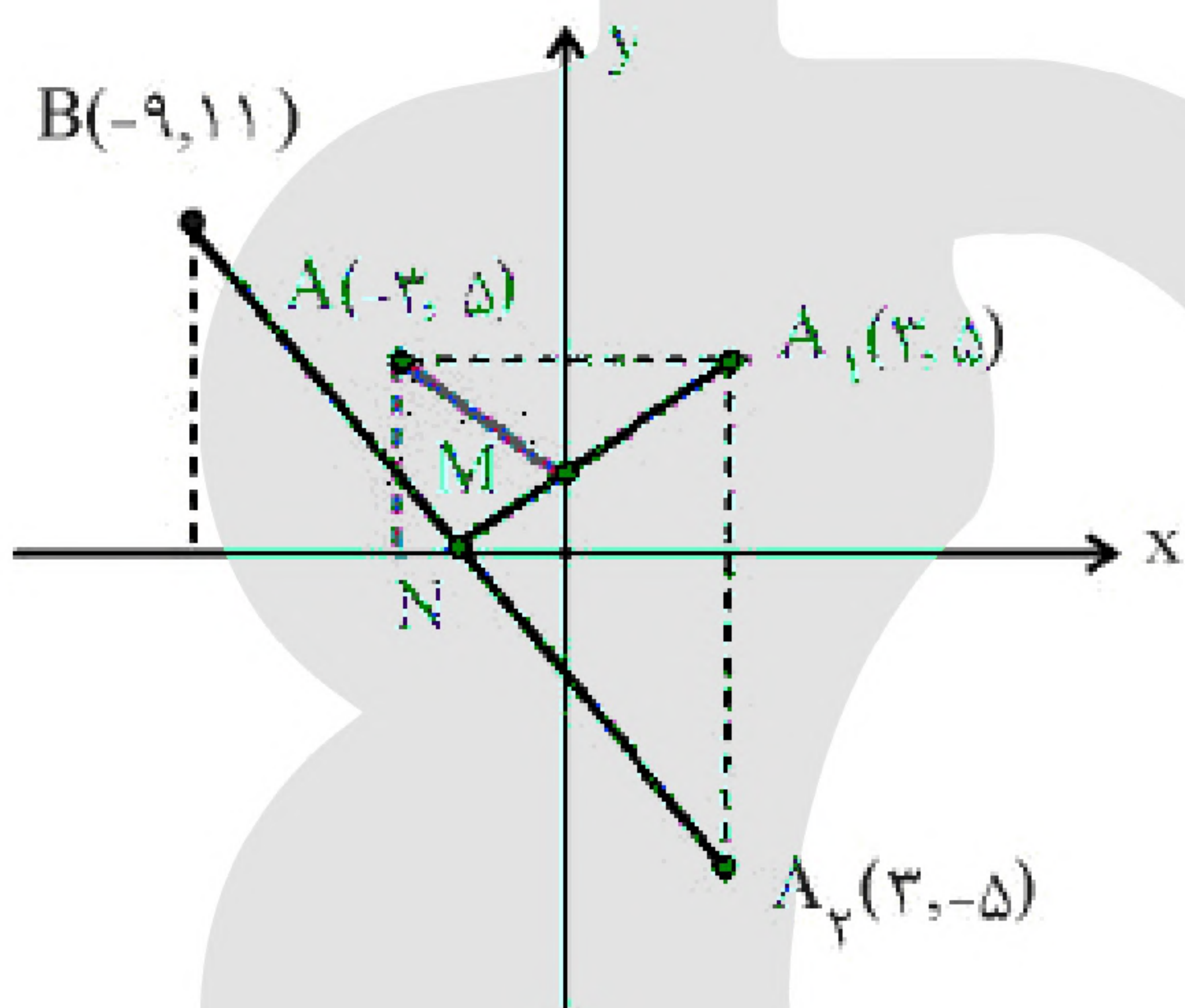


۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بازتاب نقطه B را نسبت به خط ساحل (d) یافته و آن را B' می‌نامیم و به A وصل می‌کنیم. طبق مسئله هرون، مسیر کوتاه‌ترین مسیر است. میانه BM در مثل قائم‌الزاویه ABB' نصف وتر $AB' = 100$ متر است.

$$(AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Rightarrow AB'^2 = 60^2 + 40^2 \Rightarrow AB' = 100)$$

بنابراین با در نظر گرفتن $BM = MA = 50$:

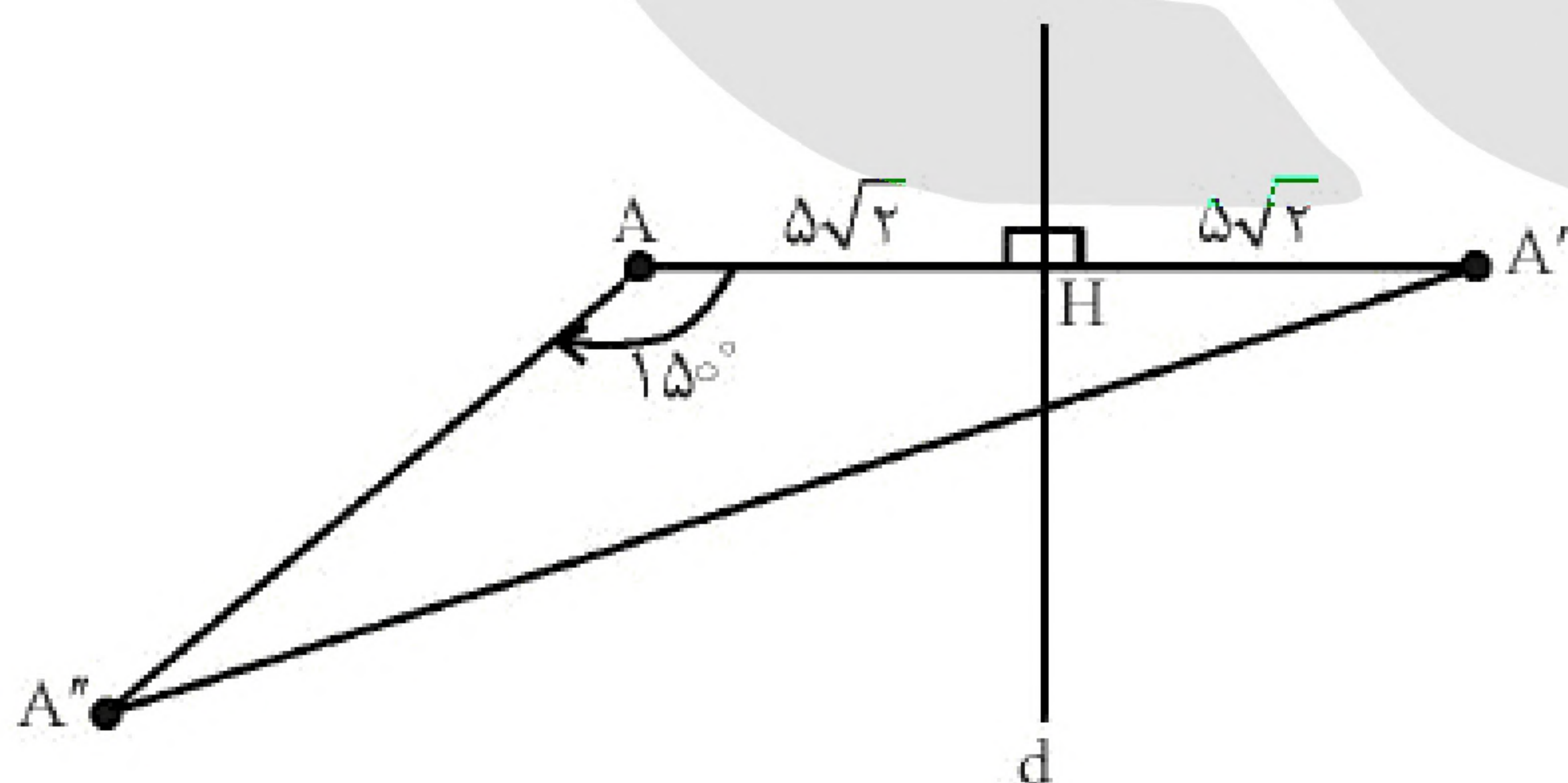
$$MABM = MA + AB + BM = 50 + 60 + 50 = 160 \text{ متر}$$



۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مطابق مسئله پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر هرون، در شکل مقابل پس از بازتاب A نسبت به محور Y ها و سپس بازتاب تصویر آن (A_1) نسبت به محور X ها به نقطه A_2 می‌رسیم و طول مسیر AMNB همان A_2B است که کوتاه‌ترین مسیر ممکن است.

$$A_2B = \sqrt{(3 - (-9))^2 + (-5 - 11)^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

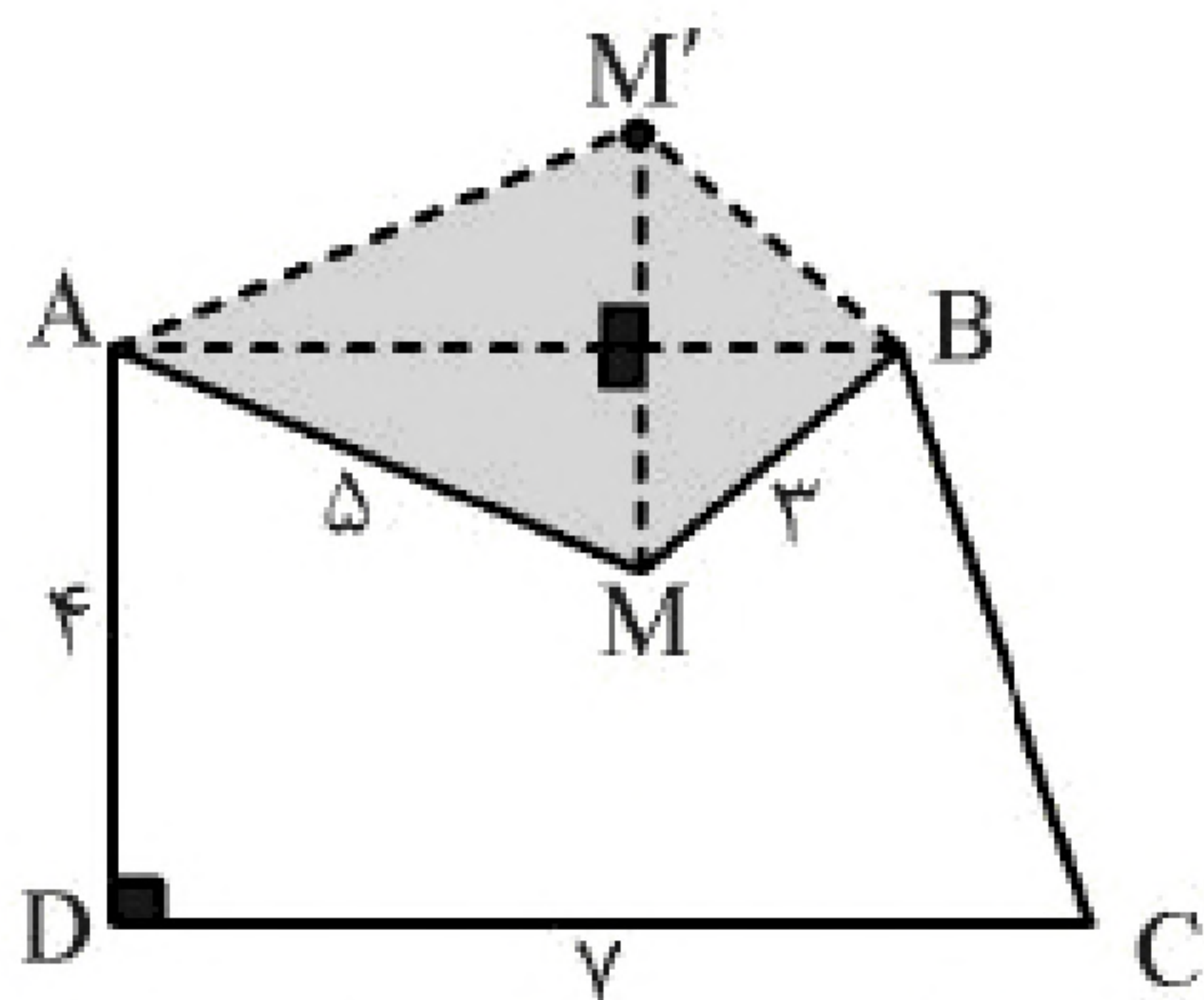
۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل $AA' = 10\sqrt{2}$ و چون دوران طولی است: $AA'' = 10\sqrt{2}$. بنابراین مساحت مثلث $AA'A''$ برابر است با:



$$S_{\triangle AA'A''} = \frac{1}{2} AA' \times AA'' \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 10\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 50$$



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD(AB + CD) \text{ دوزنقه}$$

$$26 = \frac{1}{2} \times 4(AB + 7) \Rightarrow AB = 6$$

$$\triangle AMB \text{ محیط} = 3 + 5 + 6 = 14 \Rightarrow 2P = 14 \Rightarrow P = 7$$

$$S_{\triangle AMB} = \sqrt{P(P - AB)(P - AM)(P - BM)} = \sqrt{7 \times 1 \times 2 \times 4} = 2\sqrt{14}$$

بنابراین در صورت بازتاب نقطه M نسبت به محور بازتاب AB، میزان افزایش مساحت شکل دو برابر $S_{\triangle AMB}$ یعنی $4\sqrt{14}$ است.

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عمودمنصف هر نقطه و دوران یافته‌اش از مرکز دوران می‌گذرد بنابراین برای یافتن مختصات مرکز دوران، معادله خط عمودمنصف AA' و BB' را نوشته و با هم قطع می‌دهیم:

$$M_{AA'} = \frac{4-1}{3-0} = 1 \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\Delta} = -1, \text{ وسط } AA' \text{ است } M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

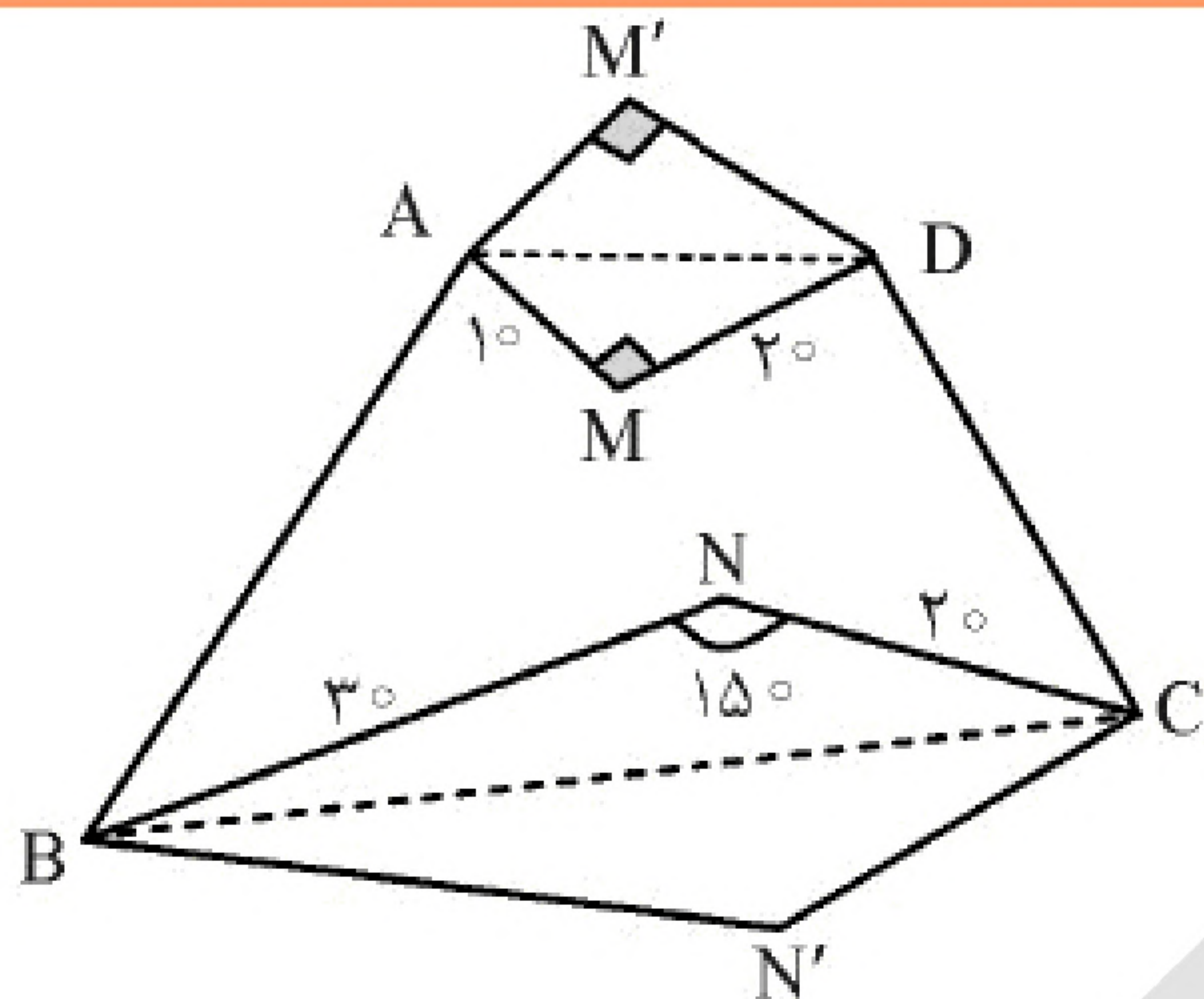
$$AA' \text{ عمود منصف خط معادله: } y - \frac{5}{2} = -1\left(x - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 4 \quad (1)$$

$$m_{BB'} = \frac{-1-2}{1-(-5)} = \frac{-1}{2} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\Delta'} = 2, \text{ وسط } BB' \text{ است } N\left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

$$BB' \text{ عمود منصف خط معادله: } y - \frac{1}{2} = 2(x + 2) \Rightarrow y = 2x + \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\begin{cases} y = -x + 4 \\ y = 2x + \frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow 2x + \frac{9}{2} = -x + 4 \Rightarrow x = \frac{-1}{6}, y = \frac{25}{6}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-1}{6} + \frac{25}{6} = \frac{24}{6} = 4$$



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از بازتاب نسبت به محورهای AD و BC افزایش مساحت مطابق مسئله همپیرامونی (هم‌محیطی) اتفاق می‌افتد:

$$S_{\triangle AMD} = \frac{10 \times 20}{2} = 100$$

$$S_{\triangle BNC} = \frac{1}{2} \times 20 \times 30 \times \underbrace{\sin 150^\circ}_{\frac{1}{2}} = 150$$

$$\Delta S = 2S_{\triangle AMD} + 2S_{\triangle BNC} = 2(100) + 2(150) = 500$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مرکز دوران، محل برخورد عمودمنصف‌های هر نقطه و دوران یافته‌اش است. معادله خط دو عمودمنصف را نوشته و قطع می‌دهیم تا مختصات $O(\alpha, \beta)$ به دست آید:

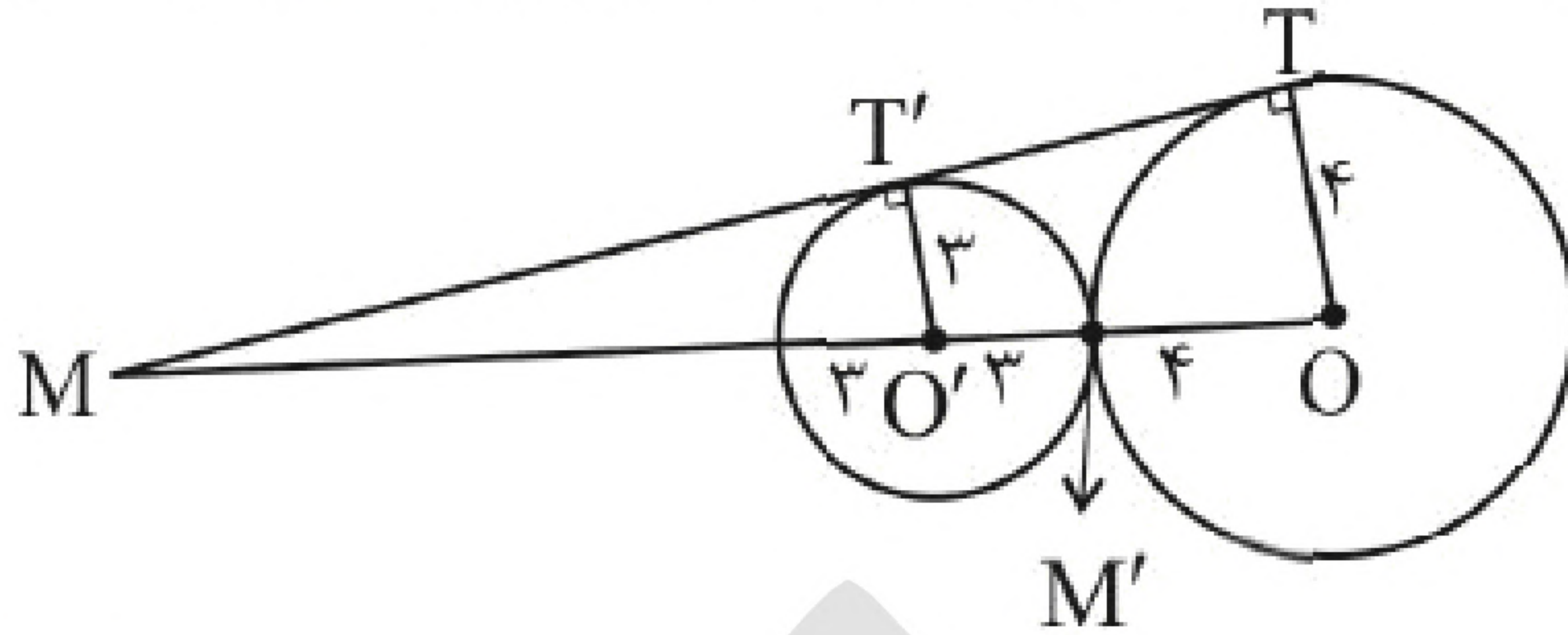
$$\begin{cases} m_{AA'} = \frac{2 - (-1)}{-5 - 1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_{\Delta} = 2 \\ AA' \text{ وسط } M = \begin{cases} \frac{-5 + 1}{2} = 2 \\ \frac{2 + (-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(2, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y = 2x + \frac{9}{2} \quad (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_{BB'} = \frac{4 - 1}{3 - 0} = 1 \Rightarrow m_{\Delta'} = -1 \\ BB' \text{ وسط } N = \begin{cases} \frac{3 + 0}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow y = -x + 4 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} y = 2x + \frac{9}{2} \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{6} = \alpha \\ y = \frac{25}{6} = \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = 4$$

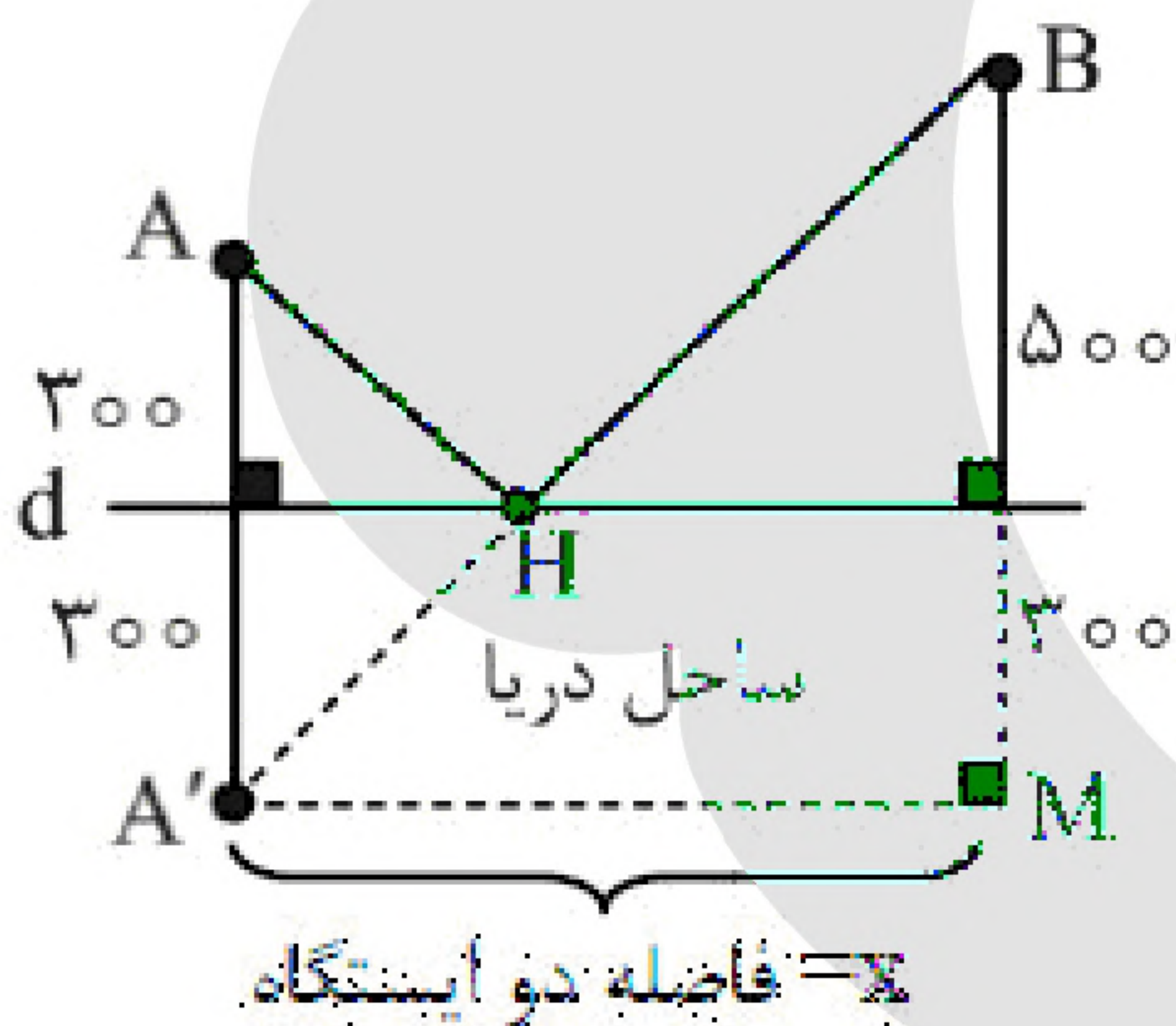


۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه برخورد امتداد خط المکزین و مماس مشترک خارجی دو دایره در این حالت مرکز تجانس مستقیم است (M) و نقطه تماس دو دایره بر روی خط المکزین (M') مرکز تجانس معکوس است:



$$OT \parallel O'T' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{O'M}{OM} = \frac{O'T'}{OT} \Rightarrow \frac{O'M}{3+4+O'M} = \frac{3}{4} \Rightarrow O'M = 21$$

$$MM' = O'M + 3 = 21 + 3 = 24$$



۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن کوتاه‌ترین مسیر، نقطه A را نسبت به خط ساحلی (d) بازتاب می‌دهیم تا نقطه A' به دست آید. طول A'B کوتاه‌ترین مسیر است و با استفاده از قضیه فیثاغورث:

$$A'B^2 = A'M^2 + MB^2$$

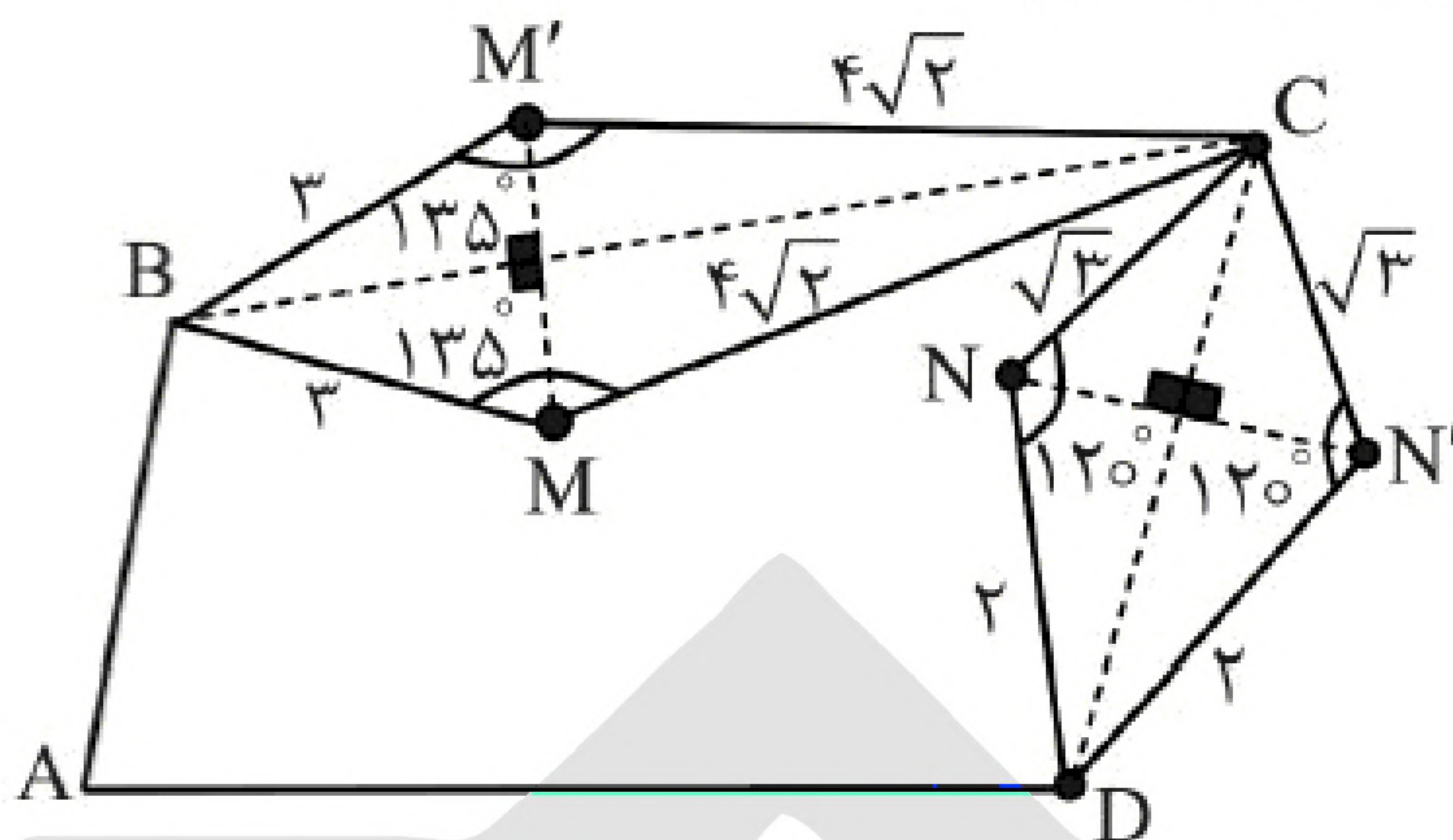
$$(1700)^2 = x^2 + (300 + 500)^2$$

$$x^2 = 1700^2 - 800^2 = (1700 - 800)(1700 + 800)$$

$$\Rightarrow x^2 = 900 \times 2500 \Rightarrow x = 1500 \text{ متر}$$



۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در مسائل هم محیطی، برای افزایش مساحت، باید نواحی مقعر را نسبت به خطی که دو رأس مقابل را به هم وصل می‌کند بازتاب دهیم:



$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{BMCM'} = 2S_{BMC} = 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ \Rightarrow S_{BMCM'} = 12$$

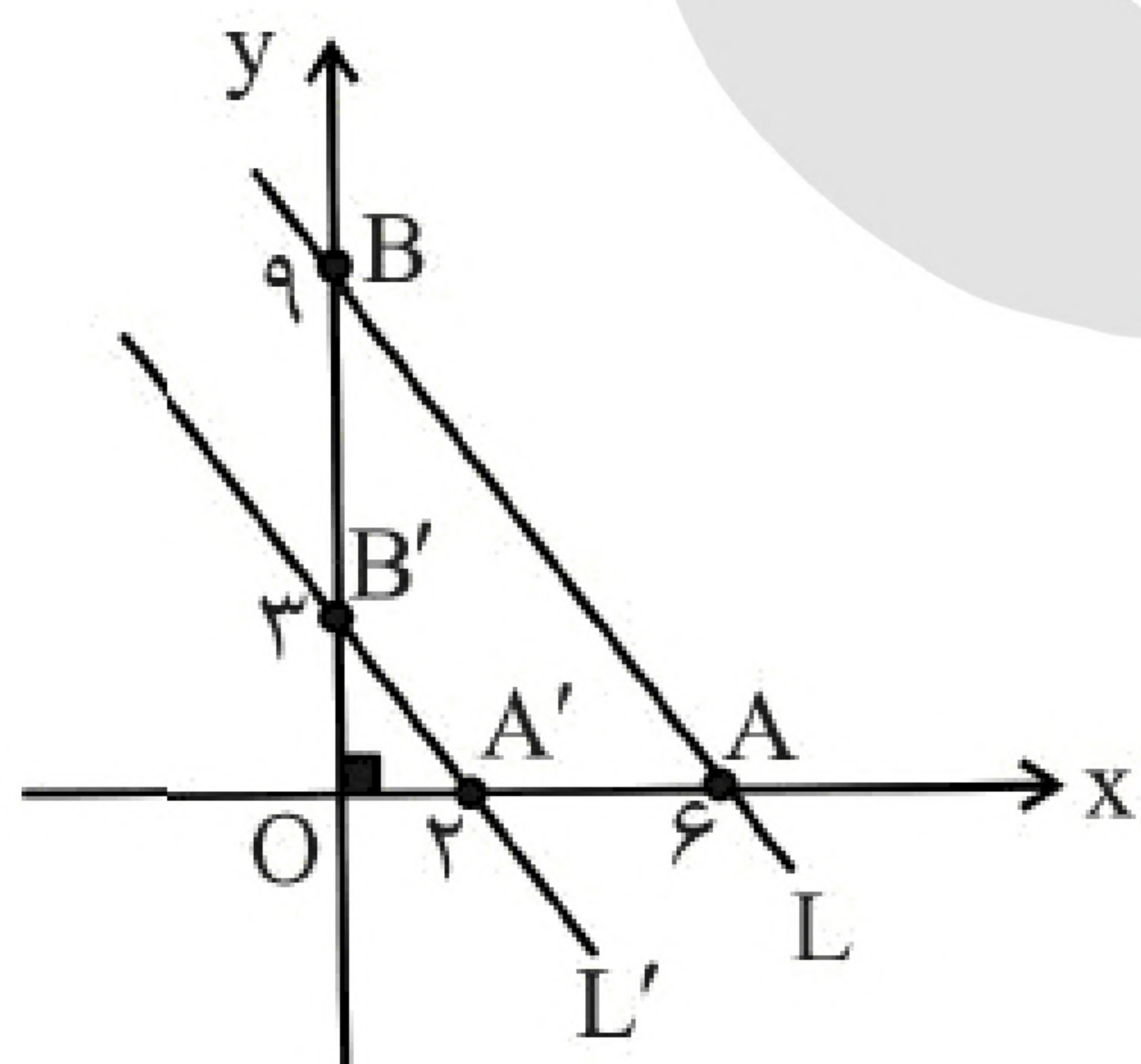
$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{CNDN'} = 2S_{DNC} = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 120^\circ \Rightarrow S_{CNDN'} = 3$$

پس افزایش مساحت برابر $12 + 3 = 15$ است.

$$\text{درصد افزایش مساحت} = \frac{15}{75} \times 100 = 20\%$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



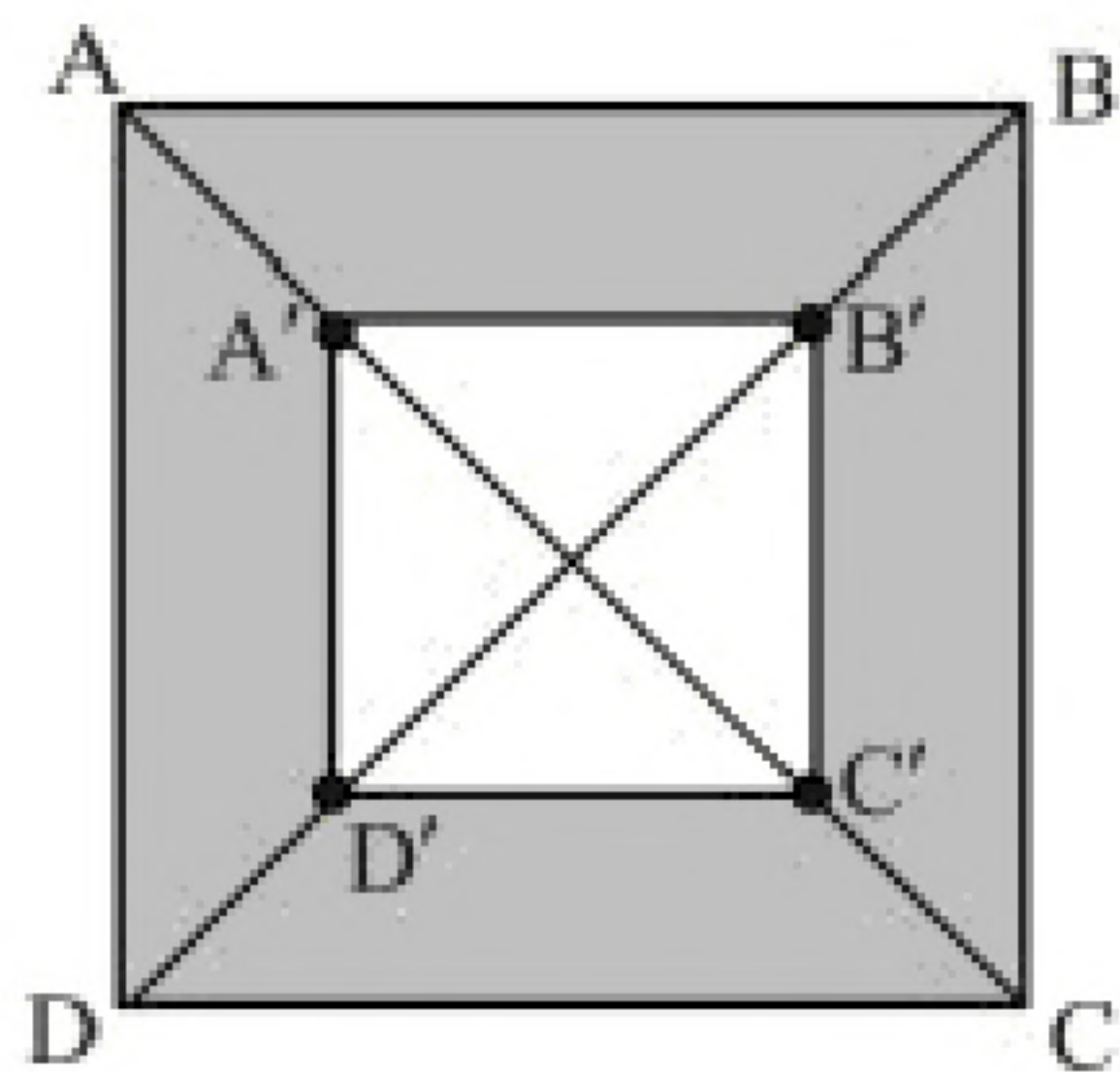
$$OA' = \frac{1}{3}OA = 2$$

$$OB' = \frac{1}{3}OB = 3$$

$$S_{AA'B'B} = S_{\triangle OAB} - S_{\triangle OA'B'} = \frac{1}{2} \times 6 \times 9 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 24$$



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با فرض تست، شکل مقابل را خواهیم داشت:
در تجانس با نسبت K:



$$\frac{S'}{S} = K^2 \rightarrow \frac{S'}{S} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \rightarrow S = \frac{25}{9} S'$$

$$S - S' = 100$$

$$\frac{25}{9} S' - S' = 100$$

$$\frac{16}{9} S' = 100 \rightarrow S' = \frac{25 \times 9}{4}$$

$$S = \frac{25}{9} \times \frac{25 \times 9}{4} \Rightarrow a^2 = \frac{25 \times 25}{4} \rightarrow a = \frac{25}{2} \text{ ضلع مربع اولیه}$$

$$\text{محیط مربع اولیه} = 4a = 4\left(\frac{25}{2}\right) = 50$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

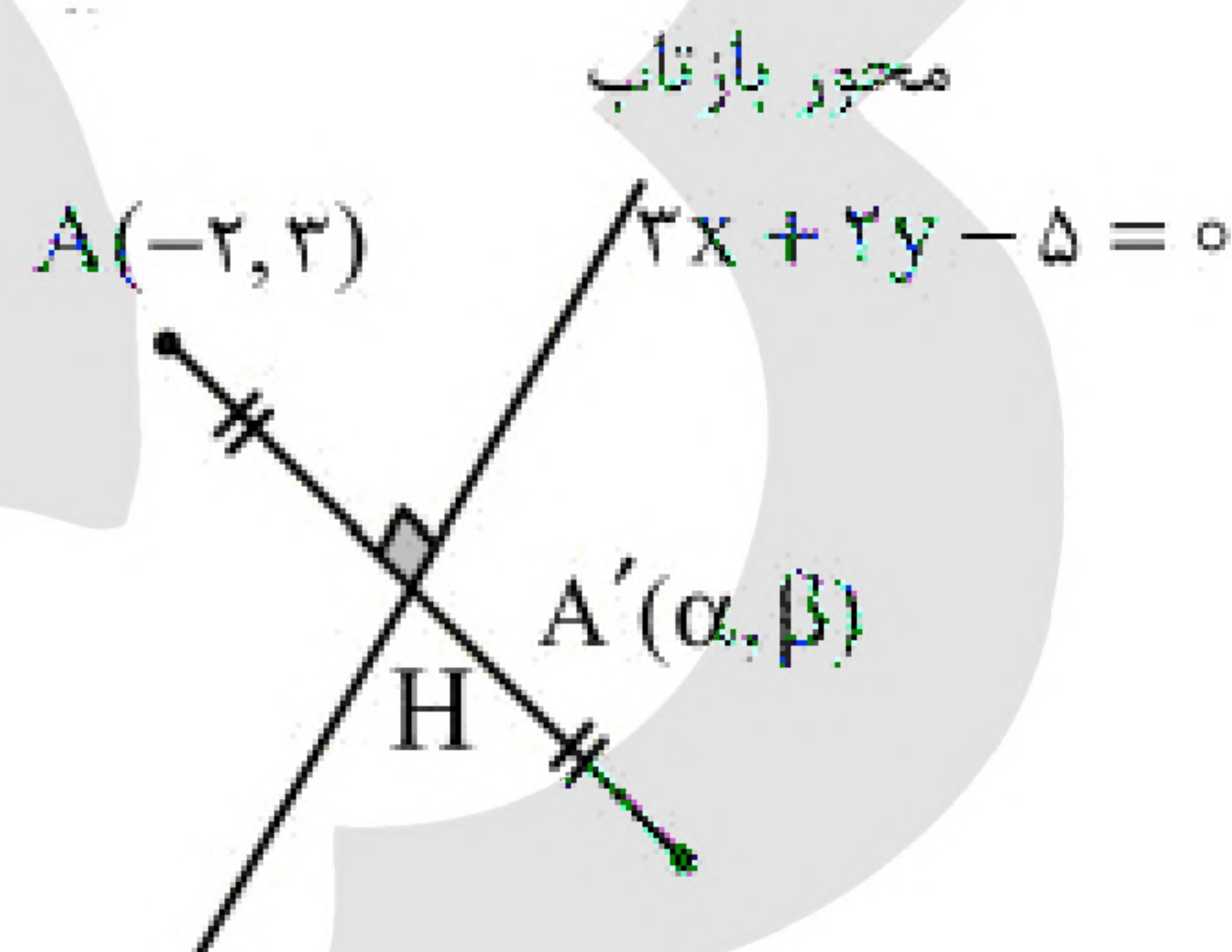
نقطه H روی محور بازتاب صدق می کند
H: $\left(\frac{\alpha - 2\beta + 3}{2}, \frac{\beta + 3}{2}\right)$ وسط AA' روی محور بازتاب

$$3\left(\frac{\alpha - 2}{2}\right) + 2\left(\frac{\beta + 3}{2}\right) - 5 = 0 \rightarrow \boxed{3\alpha + 2\beta = 10} \text{ رابطه (۱)}$$

$$\text{محور بازتاب} = \frac{-1}{m_{AA'}} \rightarrow m_{AA'} \text{ عمود بر محور بازتاب}$$

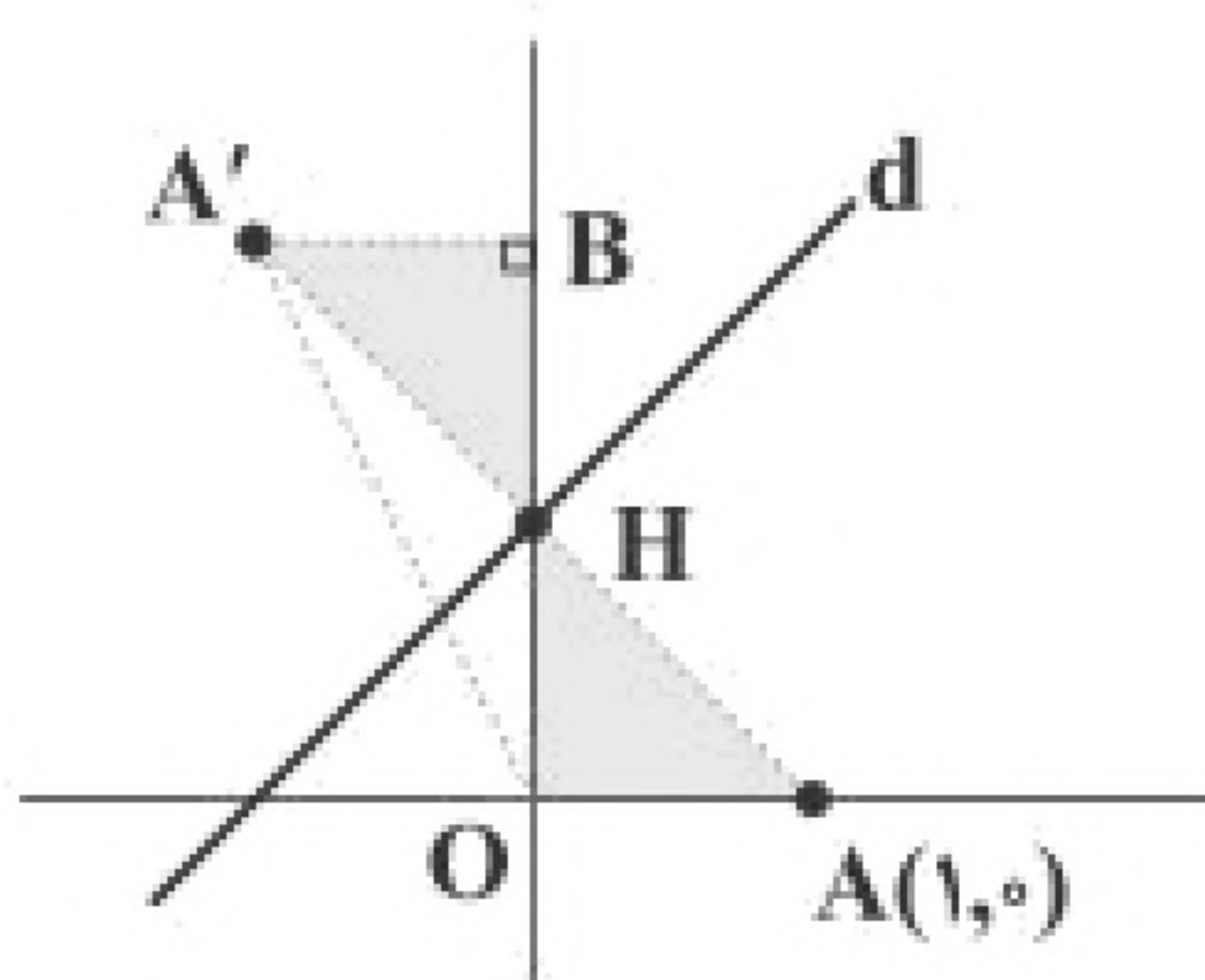
$$\rightarrow \frac{-3}{2} = \frac{-1}{\beta - 3} = \frac{\alpha + 2}{3 - \beta} \rightarrow \boxed{2\alpha - 3\beta = -13} \text{ رابطه (۲)}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{4}{13} \\ \beta = \frac{59}{13} \end{cases} \rightarrow 14\alpha + \beta = 7$$



۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر از A بر d عمود کنیم و آن را به اندازه‌ی خودش امتداد دهیم، نقطه‌ی A' به دست می‌آید. از برابری دو مثلث AOH و A'BH به راحتی معلوم می‌شود که مختصات نقطه‌ی A' برابر (۲، -۱) است.

$$S_{AOA'} = \frac{1}{2} \times OB \times OA = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



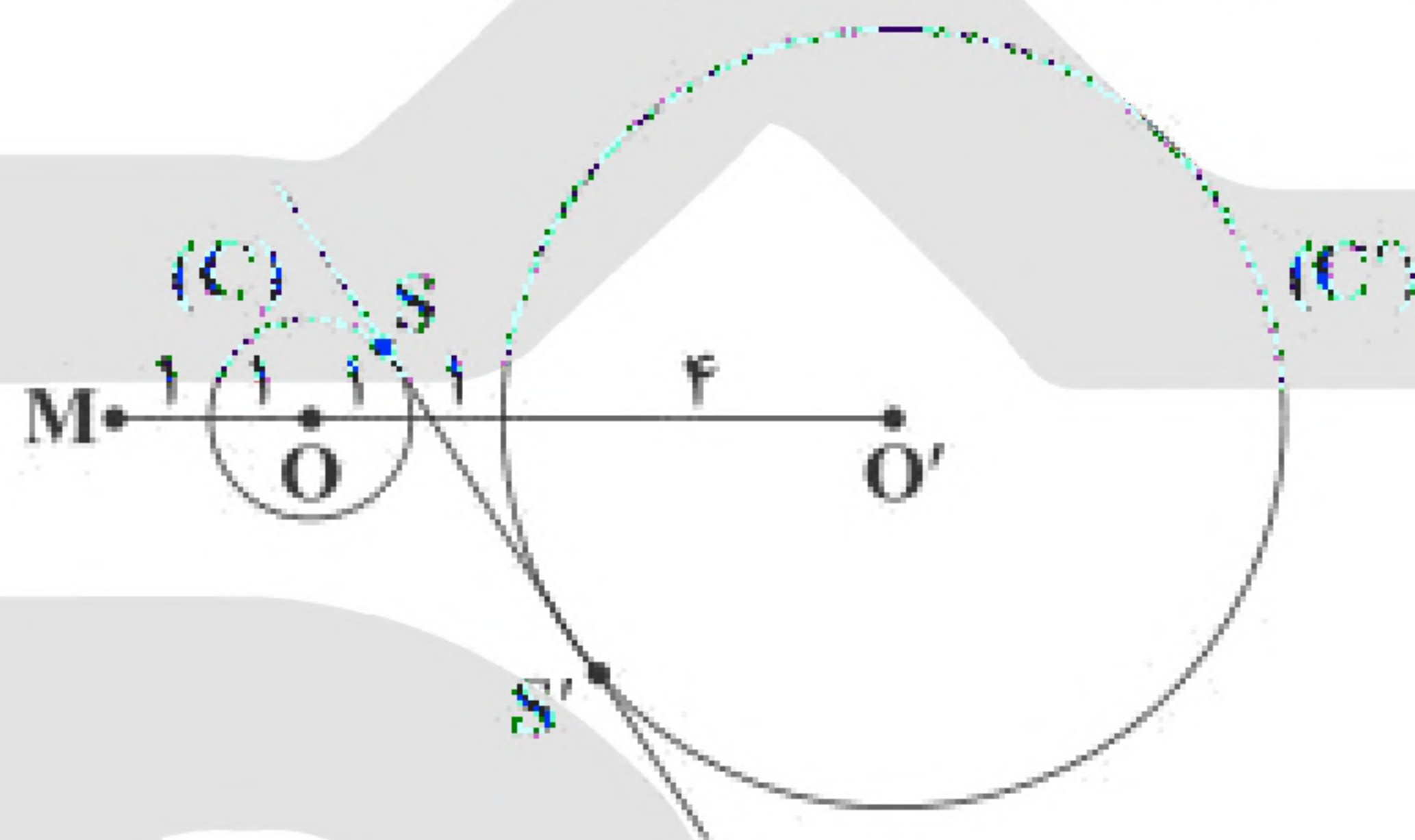


۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع d و d' و زاویه ۶۰° دورانی است به مرکز O و زاویه ۱۲۰° .

از آنجائی که دوران طولیاست $OA = OA'' = ۳$

$$\Rightarrow S_{OAA''} = \frac{1}{2} OA \times OA'' \sin 120^\circ = \frac{1}{2} (3) \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف تجانس، داریم:



$$MO' = ۴MO = ۴ \times ۲ = ۸$$

$$R' = ۴R = ۴ \times ۱ = ۴$$

پس طول خط‌المركزین دو دایره مطابق شکل، برابر است با:

$$d = OO' = ۱ + ۱ + ۴ = ۶$$

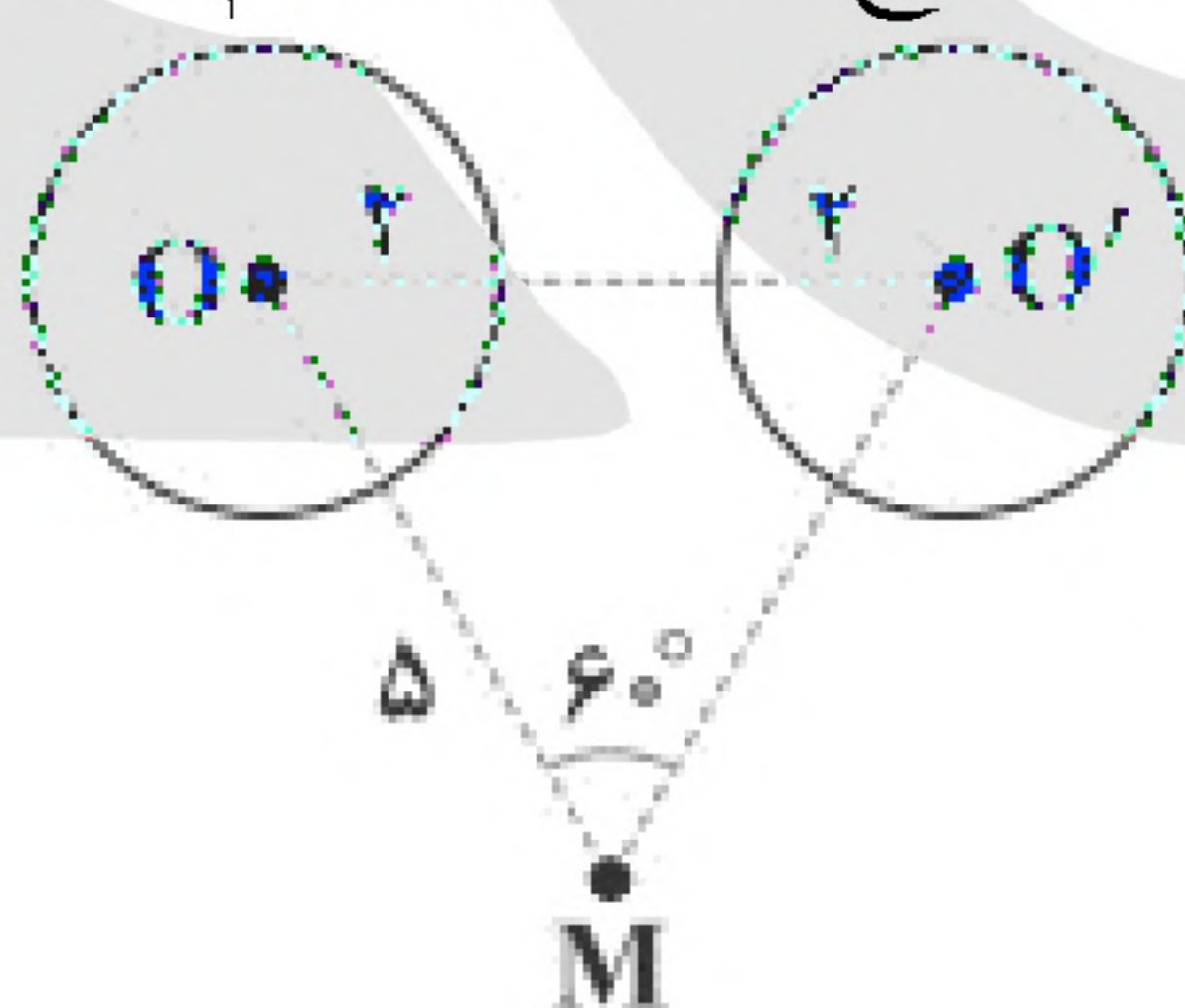
و در نهایت، طول مماس مشترک داخلی دو دایره، برابر خواهد بود با:

$$SS' = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{۶^2 - (۱ + ۴)^2} = \sqrt{۳۶ - ۲۵} = \sqrt{۱۱}$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

اولاً: دوران طولیاست، پس شعاع هر دو دایره برابر ۲ است.

ثانیاً: با توجه به شکل، مثلث MOO' متساوی‌الاضلاع است و داریم:

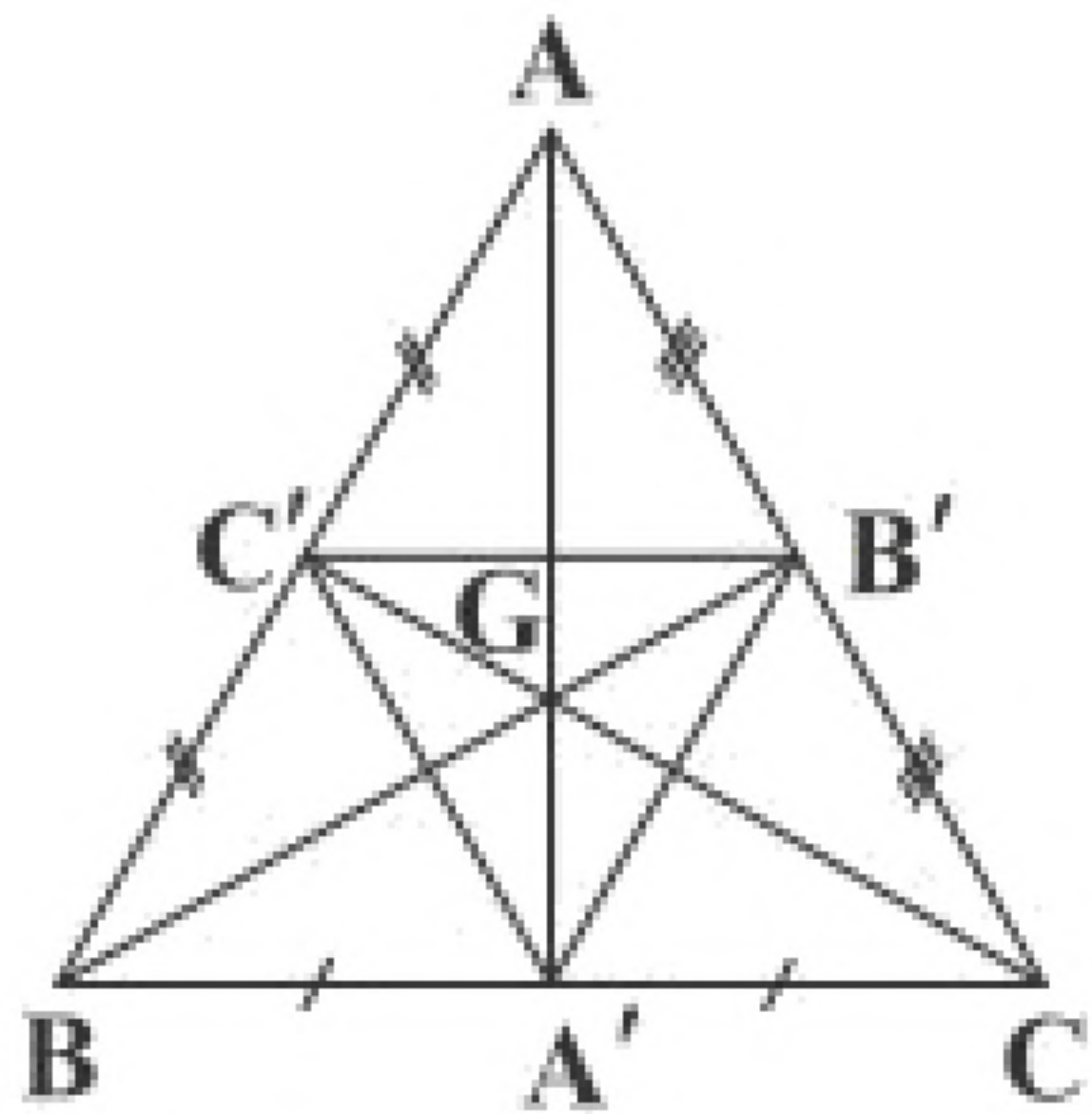


ثالثاً: به کمک فرمول مماس مشترک داخلی دو دایره، داریم:

$$\sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{۲۵ - (۲ + ۲)^2} = \sqrt{۲۵ - ۱۶} = \sqrt{۹} = ۳$$



۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در هر مثلث فاصله‌ی محل هم‌رسی میانه‌ها از هر رأس دو برابر فاصله‌ی آن از وسط ضلع مقابل است، پس اگر مثلث ABC را به مرکز محل هم‌رسی میانه‌ها و نسبت $\frac{1}{3}$ تجانس معکوس بدهیم، رئوس مثلث $A'B'C'$ دقیقاً وسط اضلاع مثلث ABC قرار می‌گیرد و خواهیم داشت:



$$\begin{cases} GA' = \frac{1}{3} GA \\ GB' = \frac{1}{3} GB \\ GC' = \frac{1}{3} GC \end{cases}$$

پس نسبت $\frac{AB'}{B'C}$ برابر یک خواهد بود.

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

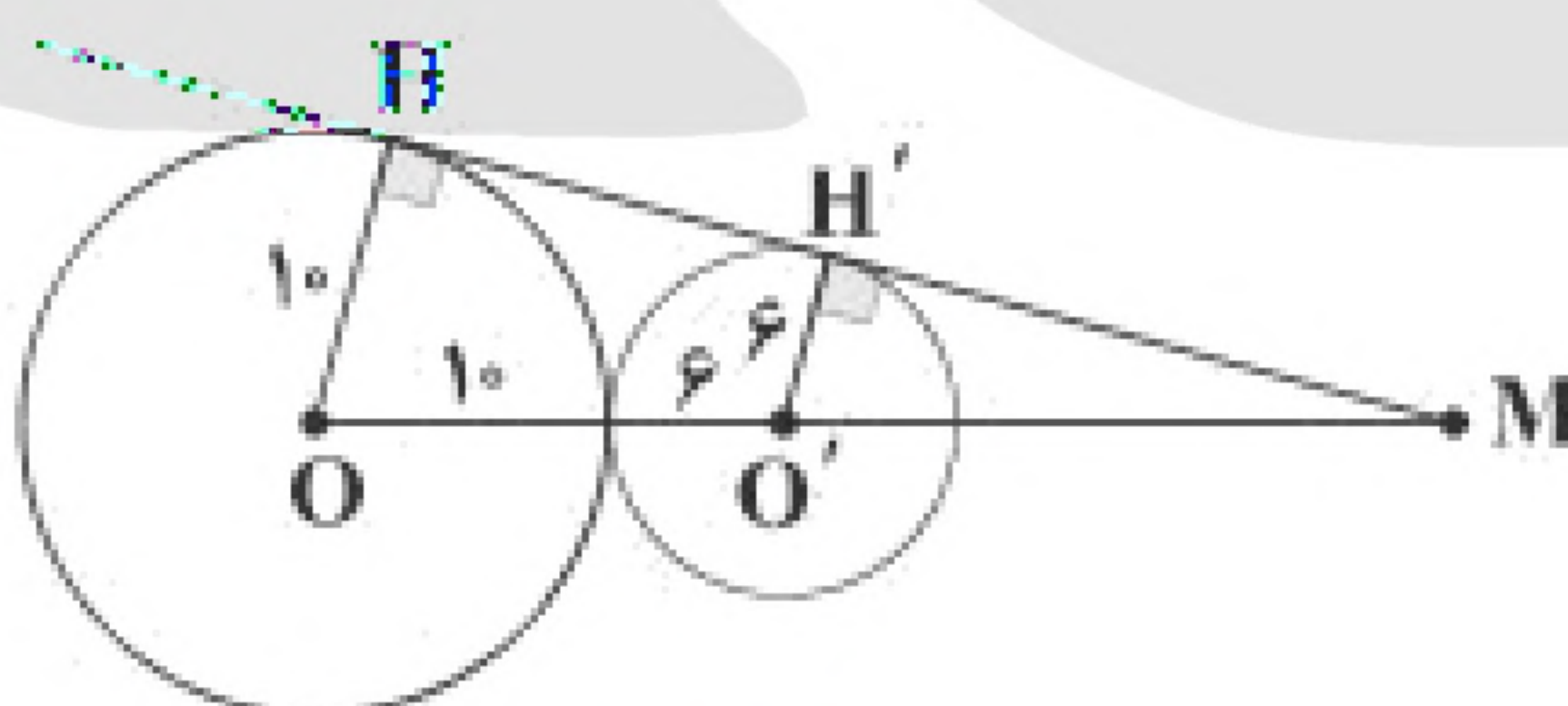
اولاً: می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ ، پس مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

ثانیاً: می‌دانیم در تجانس به مرکز O و نسبت k ، مساحت با نسبت k^2 تغییر می‌کند، پس مساحت شکل تصویر، برابر است با:

$$S' = (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از آنجایی که $d = 16 = 10 + 6 = R + R'$ پس دو دایره مماس خارج‌اند. پس اگر مجانس یک‌دیگر باشند، مرکز تجانس، نقطه‌ی M تلاقی خط‌المركزین دو دایره و مماس مشترک خارجی دو دایره است.



می‌دانیم $OH \parallel O'H'$ پس طبق تعمیم تالس در مثلث MOH ، داریم:

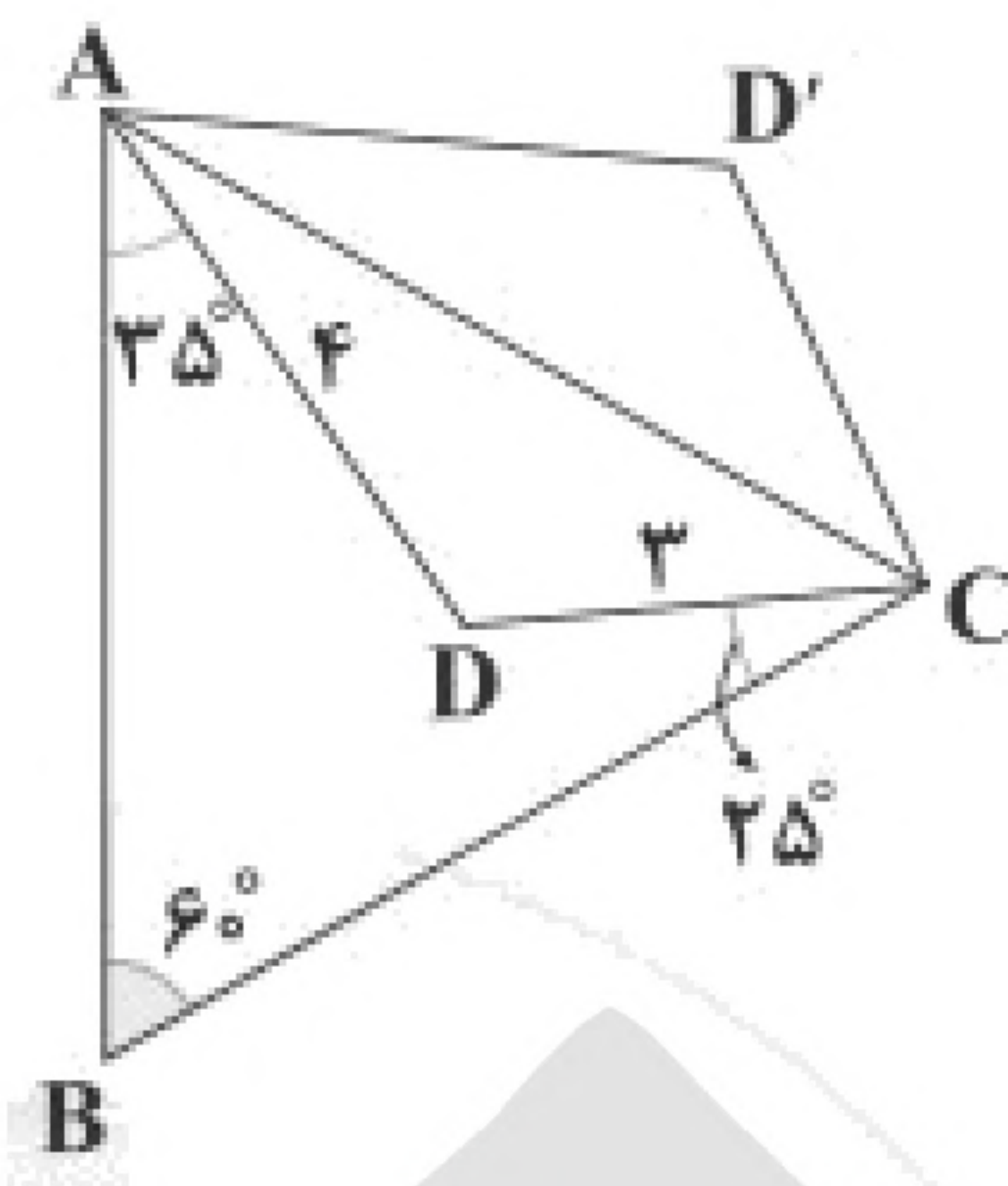
$$\frac{MH'}{MH} = \frac{MO'}{MO} = \frac{O'H'}{OH} \Rightarrow \frac{MO - OO'}{MO} = \frac{6}{10} \Rightarrow \frac{MO - 16}{MO} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5MO - 80 = 3MO \Rightarrow 2MO = 80 \Rightarrow MO = 40$$



۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر D را نسبت به AC بازتاب کنیم چون بازتاب طولیاست:

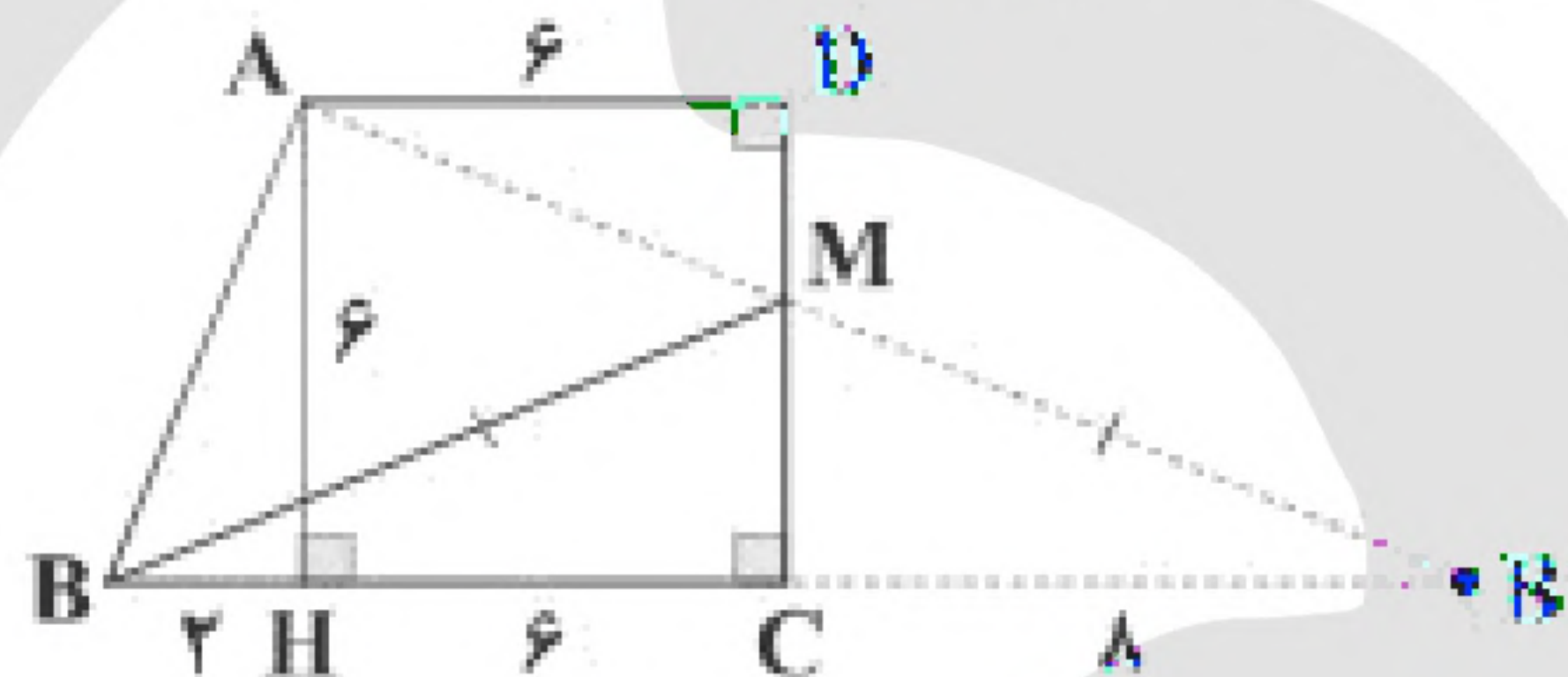
$$AD = AD', CD = CD'$$



$$\hat{D} = 25^\circ + 35^\circ + 60^\circ = 120^\circ = 2S_{ADC} = 2\left(\frac{1}{2}\right)(AD)(CD) \sin 120^\circ$$

$$\text{مقدار مساحت افزایش یافته} = 3(4) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\sqrt{3}$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بر طبق مسئله‌ی هرون در پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر و مطابق شکل، داریم:



$$AM + MB = AM + MB' = AB'$$

و به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHB' خواهیم داشت:

$$AB' = \sqrt{AH^2 + HB'^2} = \sqrt{36 + 196} = \sqrt{232} = 2\sqrt{58}$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تبدیل انتقال طولیاست. بنابراین:

$$m - 2 = 6 - m \Rightarrow m = 4 \Rightarrow r = 2, r' = 2$$

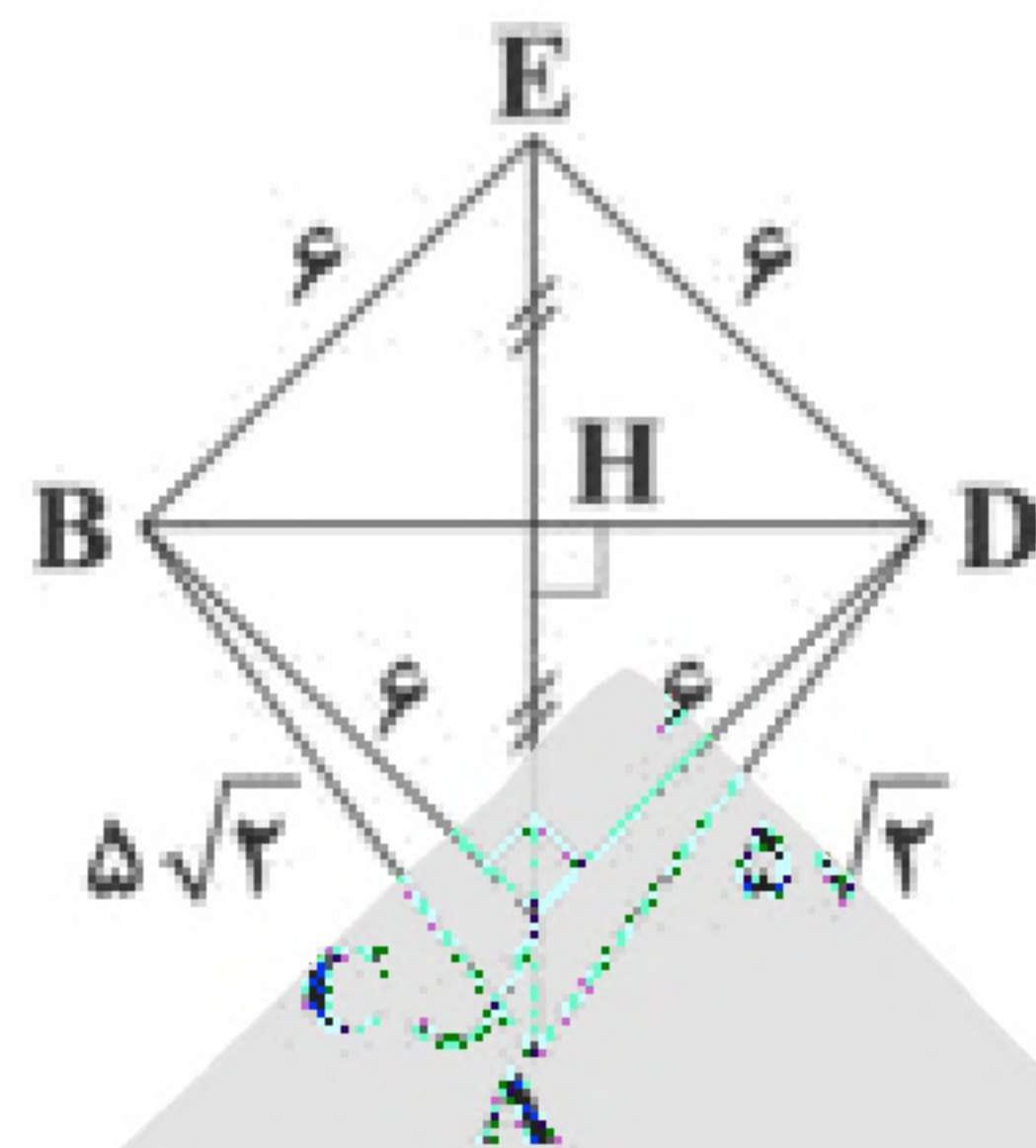
$$OO' = 6$$

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{OO'^2 - (r + r')^2} = \sqrt{36 - 16} = 2\sqrt{5}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در بازتاب نسبت به محور BD ، پاره‌خطهای BC و CD را تصویر می‌کنیم. پاره‌خطهای BE و DE حاصل می‌شوند به طوری که $BC = BE$ و $CD = DE$ ، پس محیط چهارضلعی‌های $ABCD$ و $ABED$ برابرند، اما مساحت چهارضلعی $ABED$ بیش‌تر است که به شرح زیر محاسبه می‌شود:



$$BD^2 = BE^2 + DE^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2 \Rightarrow BD = CE = 6\sqrt{2}$$

$$HE = \frac{CE}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow BH = DH = HE = 3\sqrt{2}$$

$$AH^2 = AD^2 - DH^2 = (5\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 50 - 18 = 32 \Rightarrow AH = 4\sqrt{2}$$

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} AE \times BD = \frac{1}{2} (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \times 6\sqrt{2} = 42$$

۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$17^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow \text{مثلث قائم‌الزاویه است}$$

$$\text{مساحت مثلث تصویر} = k^2 S_{ABC} = 4 \left(\frac{1}{4} \right) (8)(15) = 240$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بررسی موارد:
(الف) درست است.

(ب) دوران شیب خط را لزوماً حفظ نمی‌کند، پس نادرست است.

(ج) در تجانس اگر $k < 0$ باشد، تجانس معکوس و اگر $|k| < 1$ باشد، تجانس انقباض است، پس نادرست است.

(د) درست است.

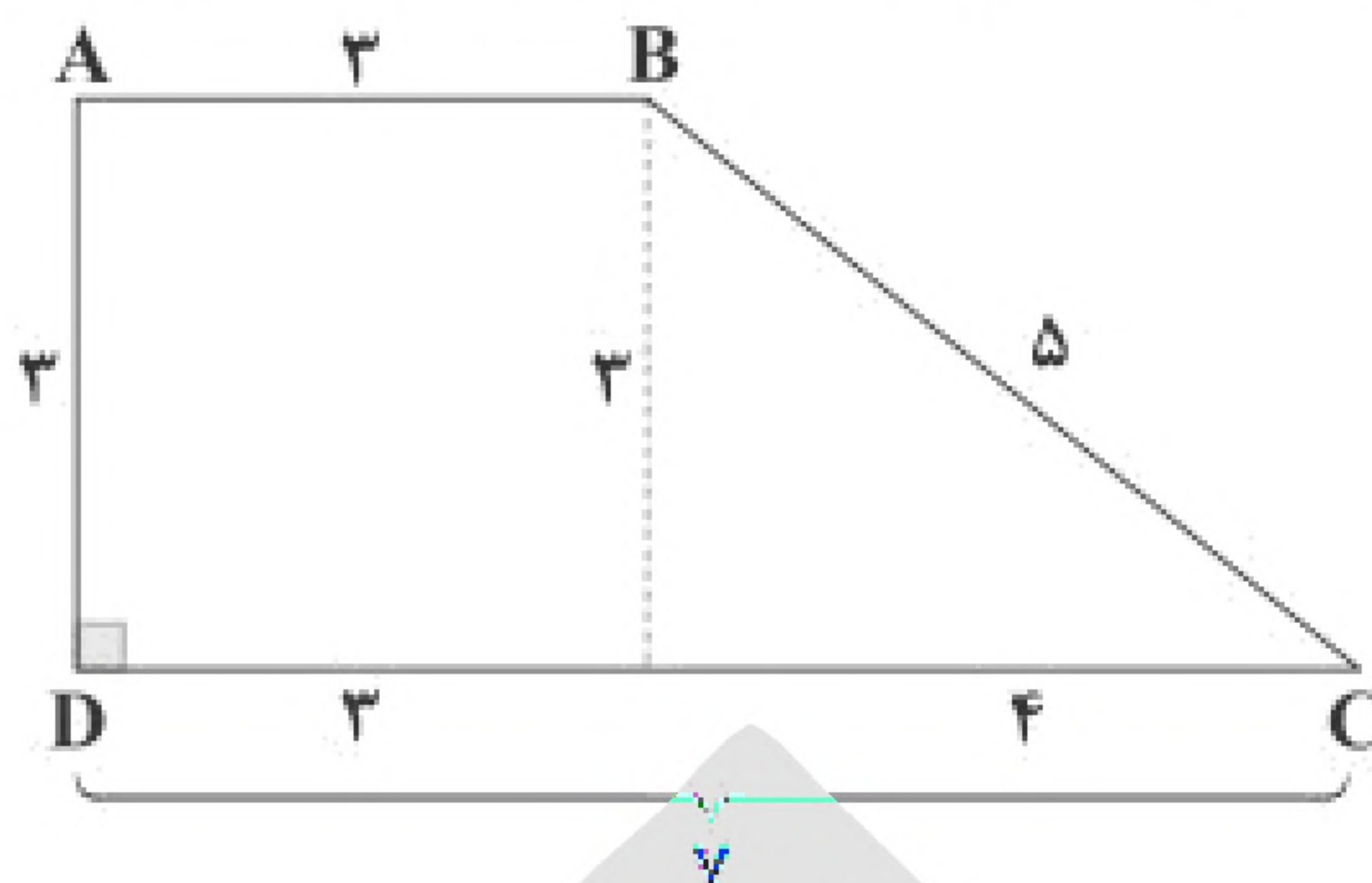
(ه) در تجانس، خطوطی که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کنند در مرکز تجانس هم‌رسانند، پس نادرست است.

(و) درست است.

پس موارد (الف)، (د) و (و) درست است.



۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون تبدیل T یک تبدیل طولی است پس چهارضلعی $A'B'C'D'$ با چهارضلعی $ABCD$ کاملاً هم‌نهشت است و می‌توان محیط و مساحت آن‌ها را یکسان در نظر گرفت. پس داریم:

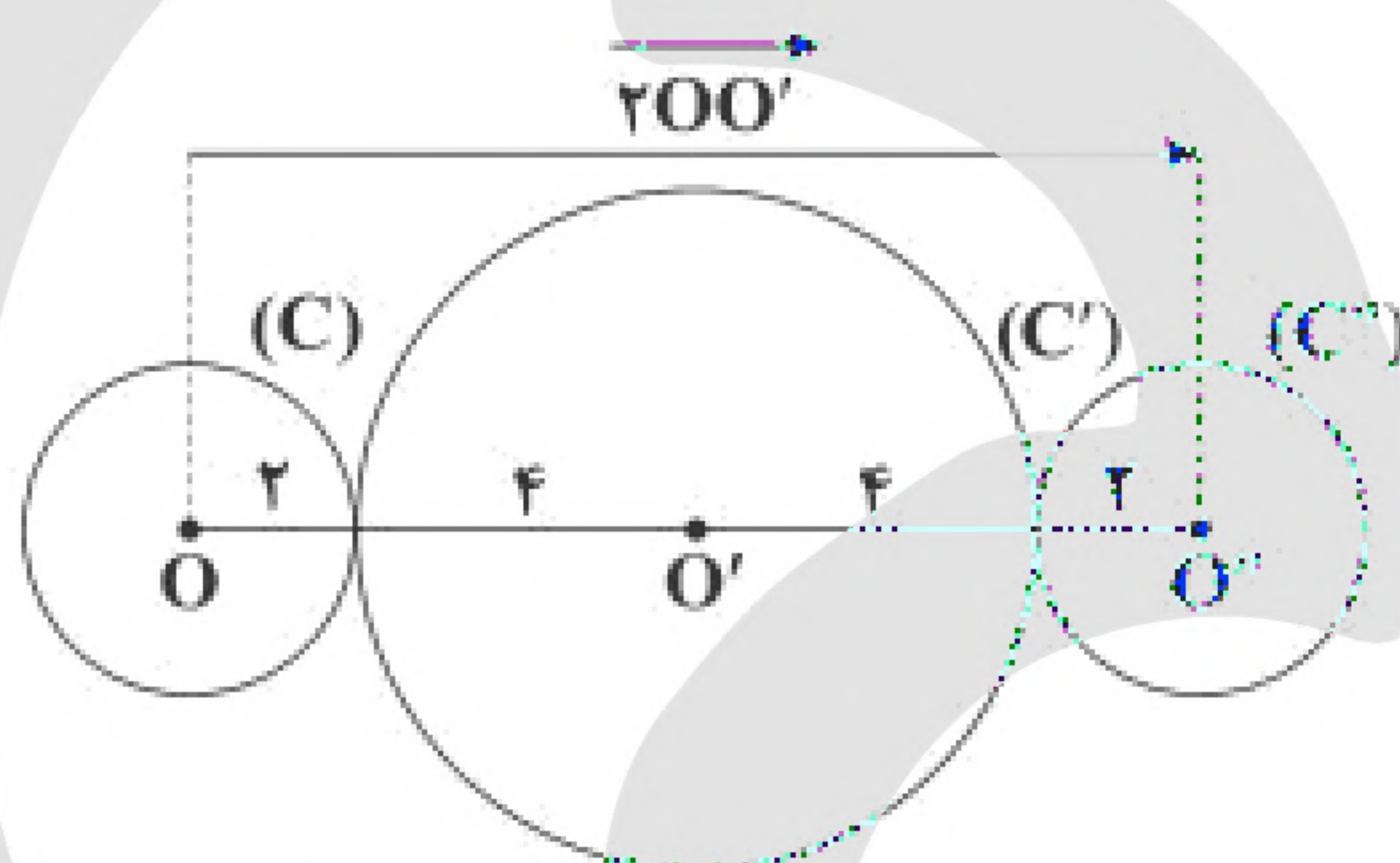


$$\text{محیط} = 3 + 3 + 5 + 7 = 18$$

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} \times (3 + 7) \times 3 = 15$$

$$\frac{\text{عدد محیط}}{\text{عدد مساحت}} = \frac{18}{15} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$$

۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل اولاً دایره‌ی C'' بر دایره‌ی C' مماس است. ثانیاً از آنجایی که انتقال (C'') طولی است پس $R'' = 2$.

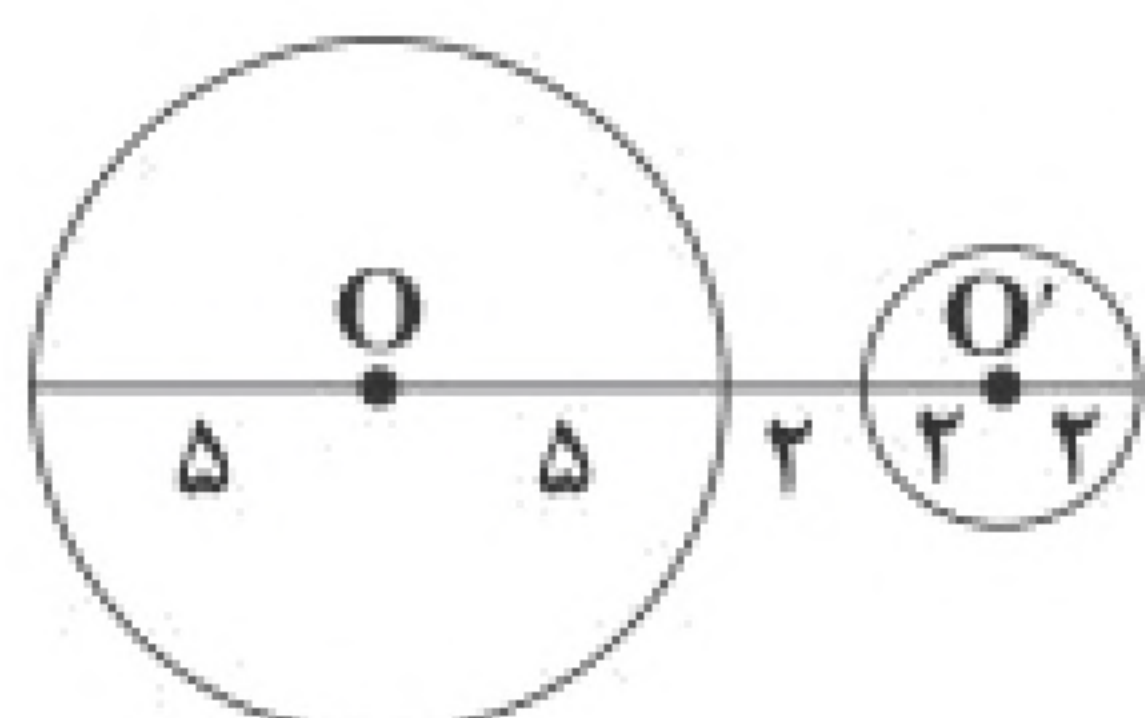


می‌دانیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره مماس به شعاع R_1 و R_2 برابر است با $2\sqrt{R_1 R_2}$. پس

$$2\sqrt{4 \times 2} = 2\sqrt{8} = 4\sqrt{2}$$

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره‌ی C' و C'' برابر است با:

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال، وضعیت دو دایره به صورت زیر است.



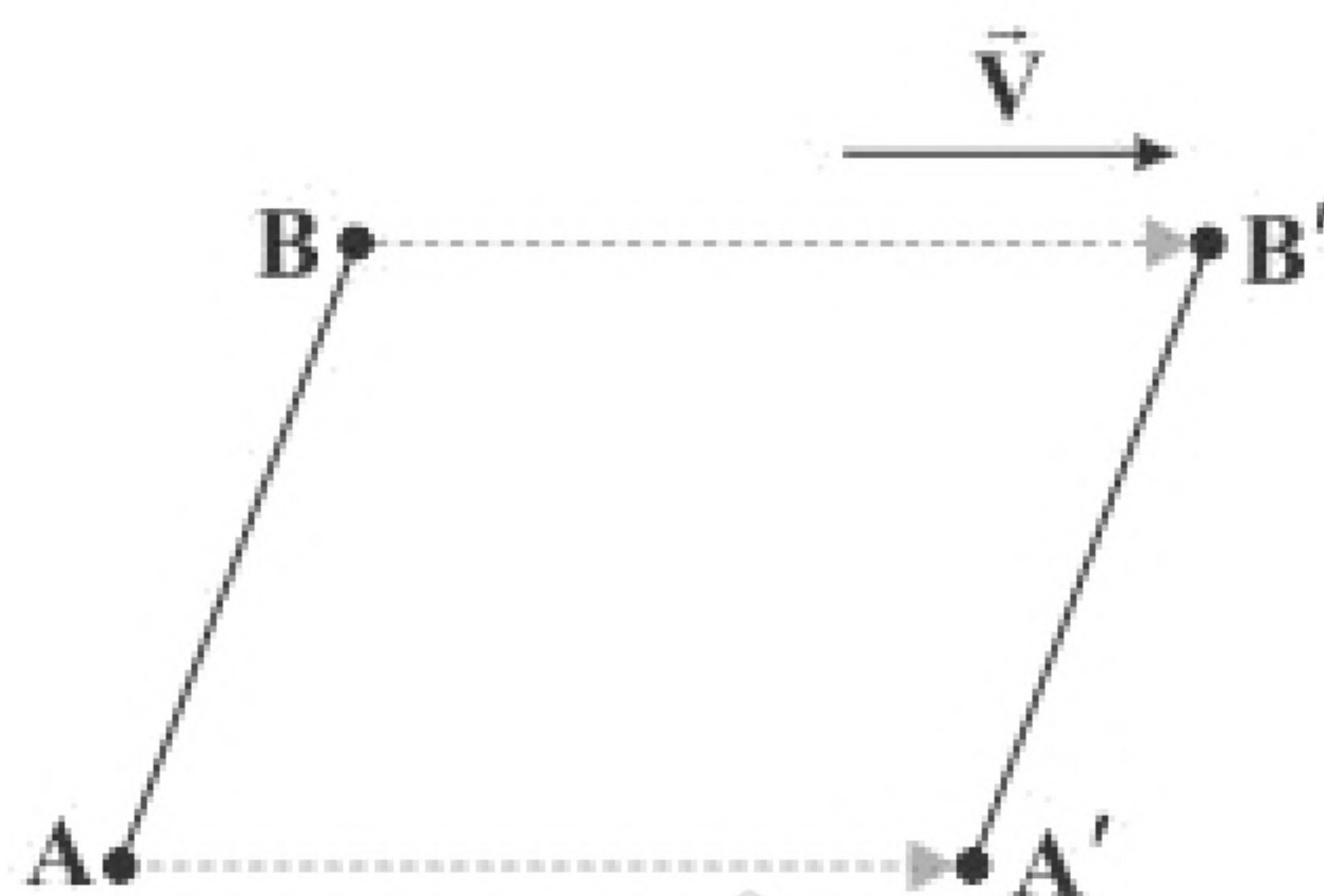
$$\Rightarrow k = OO' = 9$$

تجانس یافته دایره‌ی کوچک با نسبت تجانس ۹، دایره‌ای به شعاع ۱۸ است که مساحت آن 324π است.



۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اولاً: می‌دانیم انتقال شیب خط را حفظ می‌کند، پس:

$$A'B' \parallel AB$$



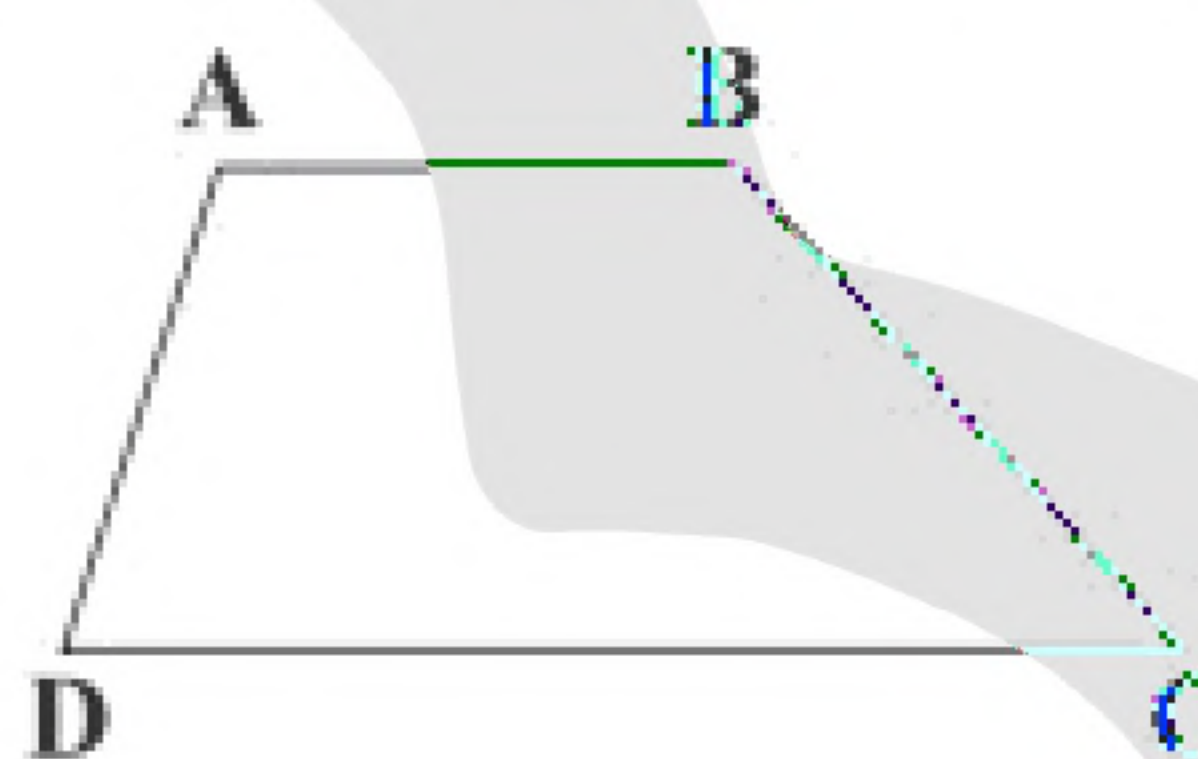
ثانیاً: می‌دانیم در انتقال خطوطی که هر نقطه را به تصویرش وصل می‌کنند با بردار انتقال موازیند، پس:

$$AA' \parallel BB' \quad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که چهارضلعی $ABB'A'$ متوازی‌الاضلاع است.
دقت کنید: چهارضلعی $ABB'A'$ الزاماً متوازی‌الاضلاع است و در حالات خاص ممکن است لوزی یا مستطیل باشد.

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

دقت کنید: ساق‌های AD و BC با هم برابر نیستند و شیب‌های یکسانی ندارد.



بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) پاسخ درست نیست. زیرا تجانس و انتقال حافظ شیب هستند.

(۲) پاسخ درست نیست. زیرا انتقال و دوران طولها هستند.

(۳) پاسخ درست نیست. زیرا بازتاب و دوران طولها هستند.

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر دو خط متقاطع باشند، هر نقطه روی نیم‌ساز زاویه‌ی بین دو خط مانند O ، مرکز دورانی است که در آن D' تصویر خط D است و اگر دو خط D و D' موازی باشند، آن‌گاه D' در بی‌شمار دوران به زاویه‌ی ۱۸۰° تصویر خط d است و مرکز این دوران‌ها روی خطی موازی و متساوی‌فاصله از خطوط D و D' قرار دارند.

