

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

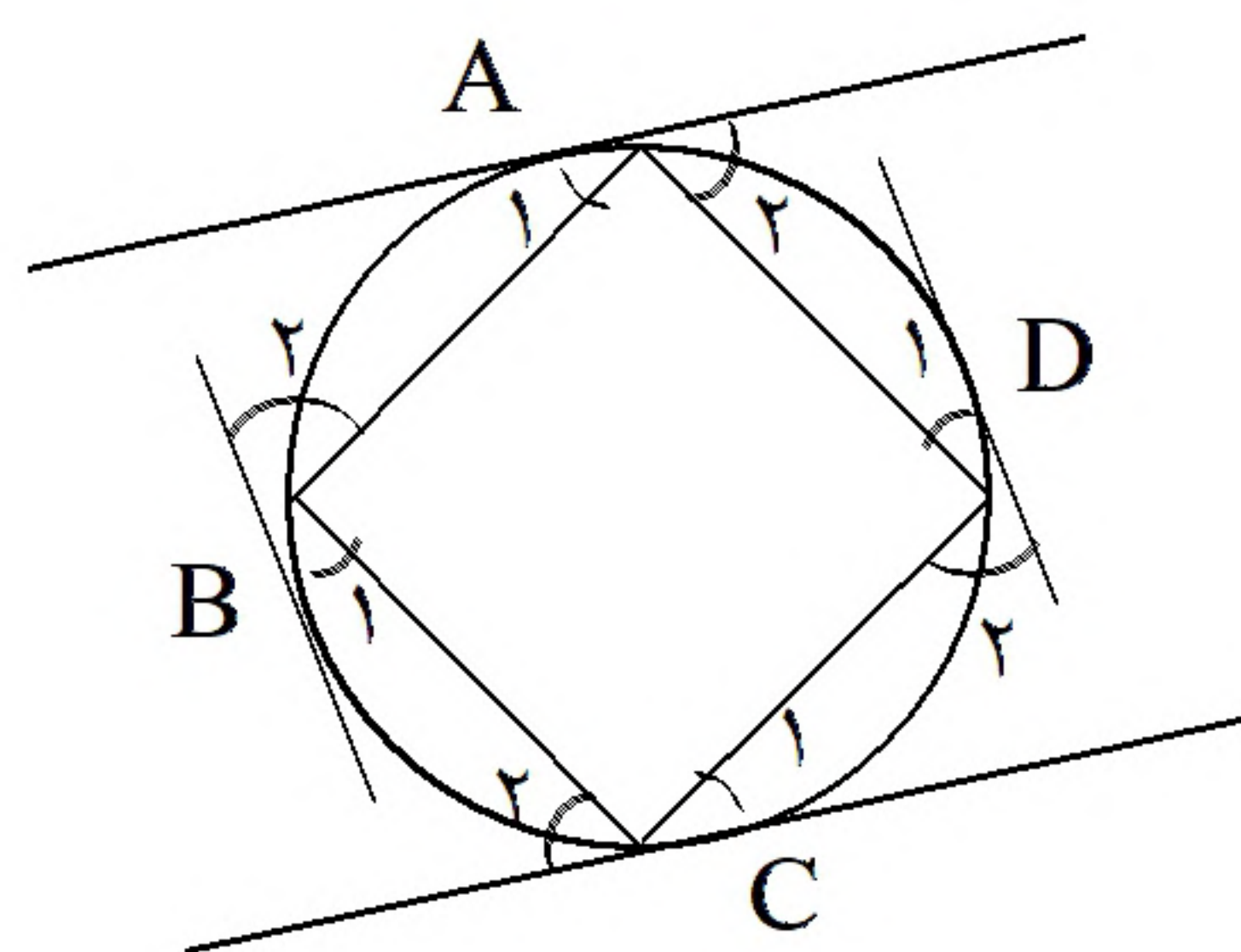


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل داریم:



$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{B}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{C}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}, \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AD}}{2}$$

$$\hat{A}_2 = \frac{\widehat{AD}}{2}, \hat{B}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2}, \hat{C}_2 = \frac{\widehat{BC}}{2}, \hat{D}_2 = \frac{\widehat{CD}}{2}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} & \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2 + \hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{D}_1 + \hat{D}_2 \\ &= \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} + \frac{\widehat{BC}}{2} + \frac{\widehat{AD}}{2} + \frac{\widehat{CD}}{2} = \widehat{AB} + \widehat{AD} + \widehat{BC} + \widehat{CD} = 360^\circ \end{aligned}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شعاع دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC از رابطه زیر تعیین می شود.

$$r_a = \frac{S}{P - a}$$

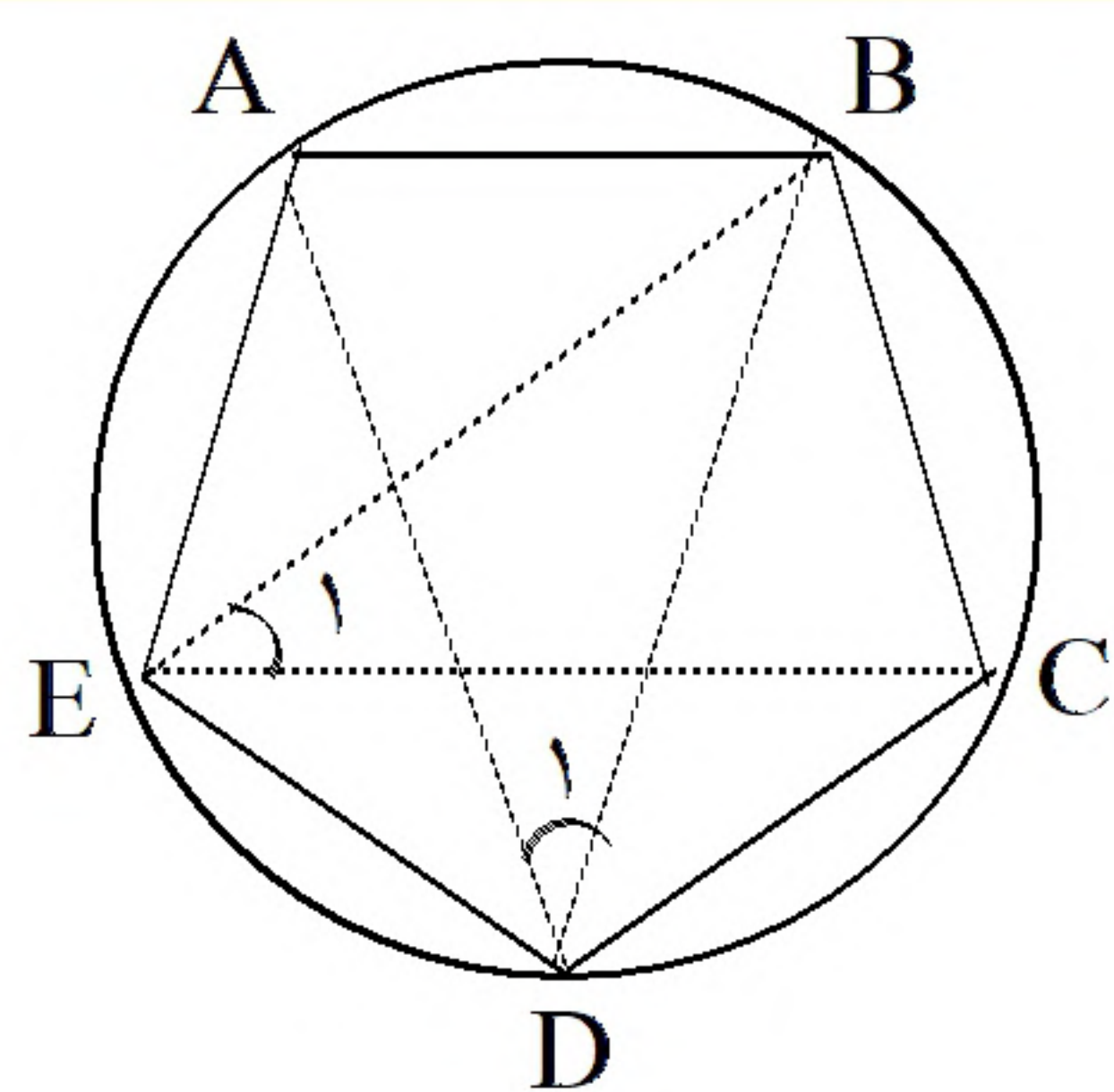
$$P = \frac{9 + 8 + 7}{2} = \frac{24}{2} = 12$$

$$S = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)} = \sqrt{12(12 - 9)(12 - 8)(12 - 7)} = \sqrt{12 \times 3 \times 4 \times 5}$$

$$= \sqrt{12^2 \times 5} = 12\sqrt{5}$$

$$r_a = \frac{S}{P - a} = \frac{12\sqrt{5}}{12 - 7} = \frac{12\sqrt{5}}{5} = 2\frac{4}{5}\sqrt{5}$$

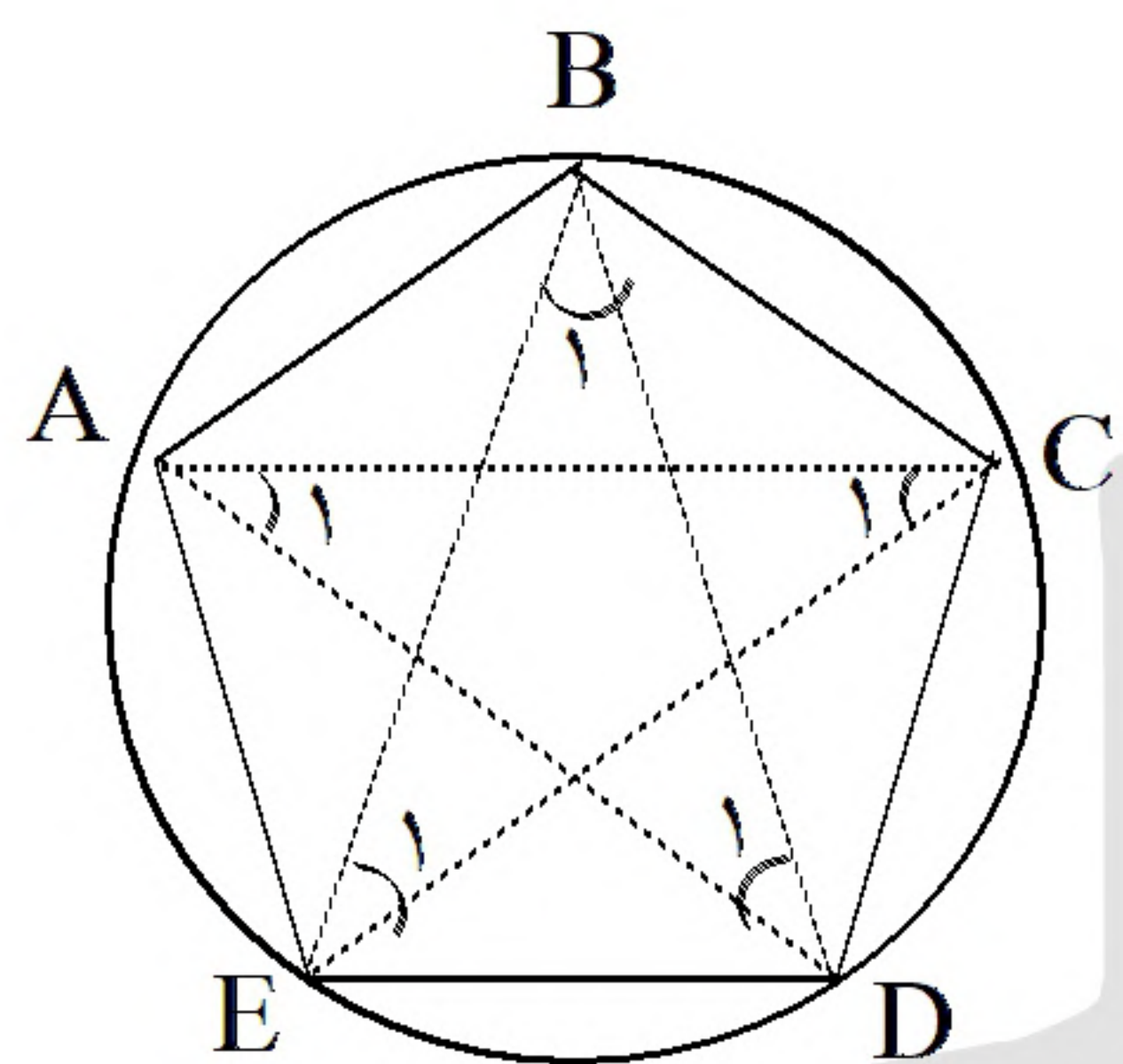
بنابراین:



۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. راه حل اول: این سؤال را در حالت خاص که پنج ضلعی منتظم است حل می کنیم. پنج ضلعی منتظم محاط در دایره، دایره را به پنج قسمت مساوی $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ تقسیم می کند. زاویه محاطی \hat{D}_1 روبه رو به وتر AB است پس:

$$\hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

به همین ترتیب زاویه های محاطی روبه رو به اضلاع این پنج ضلعی منتظم برابر 36° است بنابراین مجموع این زاویه ها $5 \times 36^\circ = 180^\circ$ است.



راه حل دوم: فرض کنیم ABCDE پنج ضلعی محاط در دایره باشد داریم:

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{CD}}{2}, \hat{B}_1 = \frac{\widehat{ED}}{2}, \hat{C}_1 = \frac{\widehat{AE}}{2}, \hat{D}_1 = \frac{\widehat{AB}}{2}, \hat{E}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

در نتیجه:

$$\hat{A}_1 + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 + \hat{D}_1 + \hat{E}_1 = \frac{\widehat{CD} + \widehat{ED} + \widehat{AE} + \widehat{AB} + \widehat{BC}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

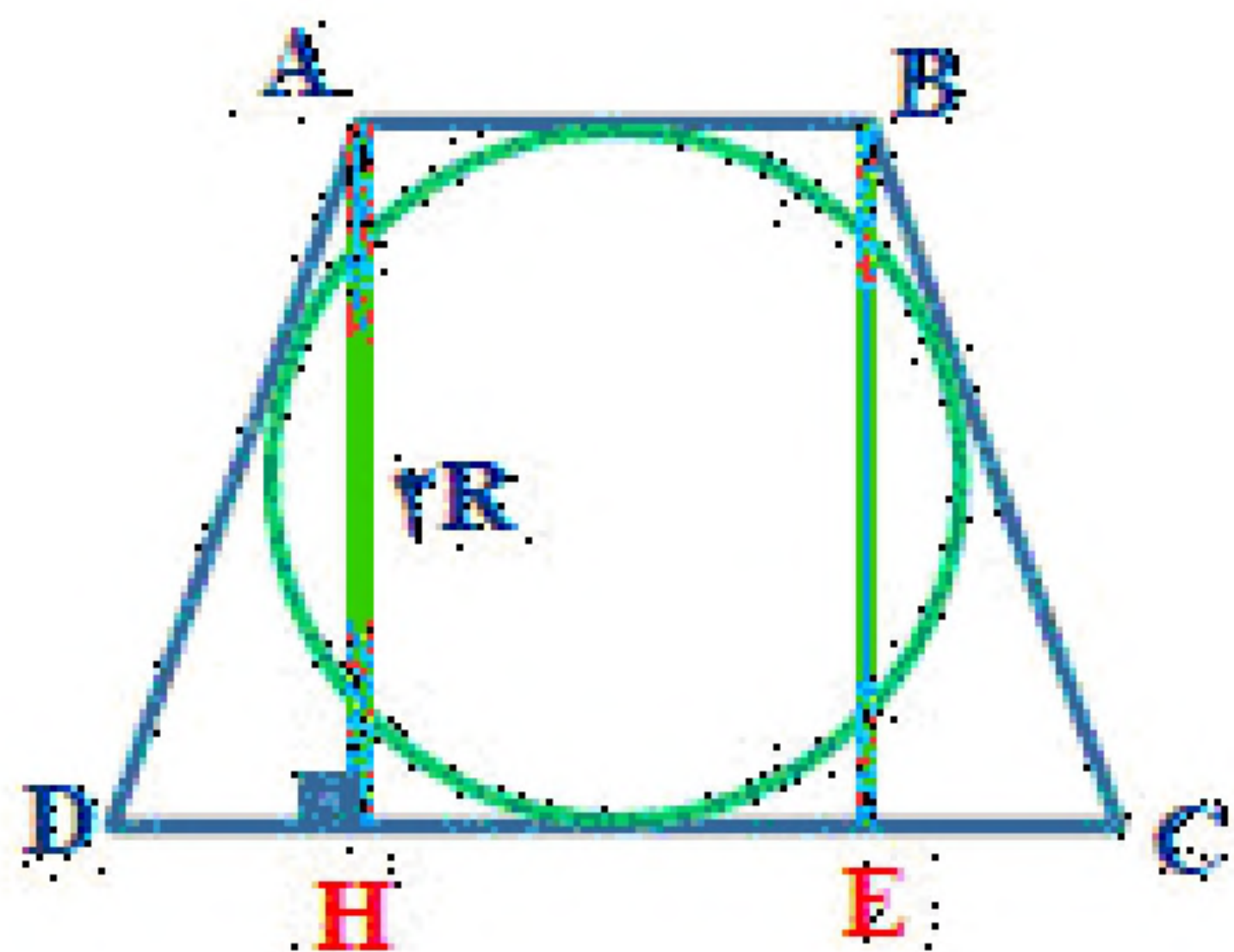
۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{(OO')^2 - (R + R')^2} \Rightarrow (R + R')^2 = 81 - (2\sqrt{14})^2 \Rightarrow R + R' = 5$$

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2} \Rightarrow (R - R')^2 = 81 - (4\sqrt{5})^2 \Rightarrow R - R' = 1$$

$$\xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2R = 6 \Rightarrow R = 3$$

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دوزنقه بر دایره ای به شعاع R محاط باشد، پس ارتفاع دوزنقه برابر 2R است. با رسم ارتفاع های AH و BE داریم:

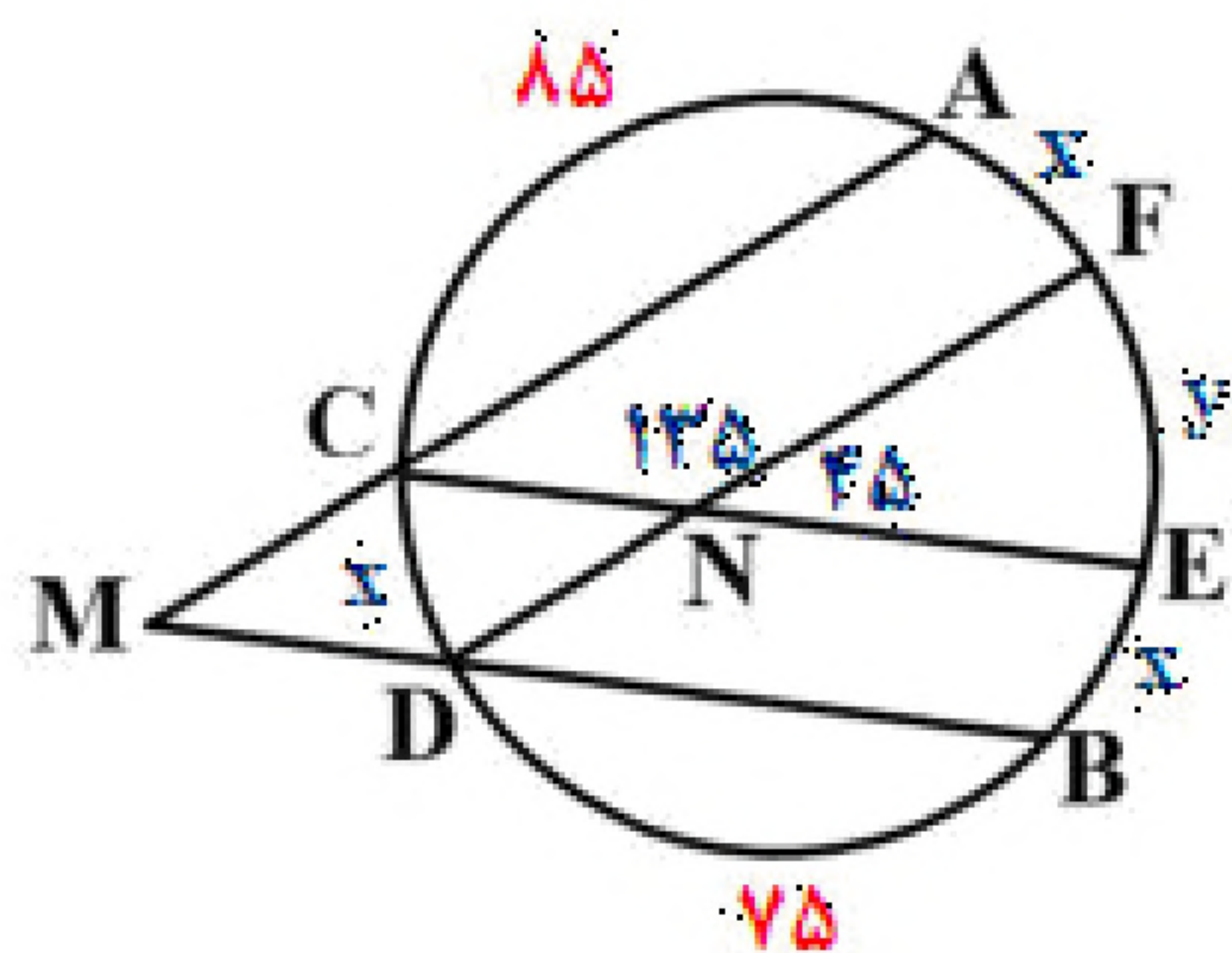


$$DH = CE = \frac{DC - AB}{2} = \frac{16}{2} \Rightarrow DH = 8$$

$$AD^2 = AH^2 + DH^2 \Rightarrow AD^2 = (4\sqrt{5})^2 + 8 = 144 \Rightarrow AD = 12$$



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی مساویند، پس $\widehat{AF} = \widehat{CD}$ و $\widehat{CD} = \widehat{BE}$ اکنون با توجه به شکل می‌نویسیم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{FNE} = 45^\circ &= \frac{x+y}{2} \Rightarrow x+y = 90^\circ \\ 85^\circ + 75^\circ + 3x + y &= 360^\circ \Rightarrow 3x + y = 200^\circ \end{aligned} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{کم می‌کنیم}} 2x = 110^\circ \Rightarrow \begin{cases} x = 55 \\ y = 35 \end{cases}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث BDC داریم:

$$\widehat{D}_1 + \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$$

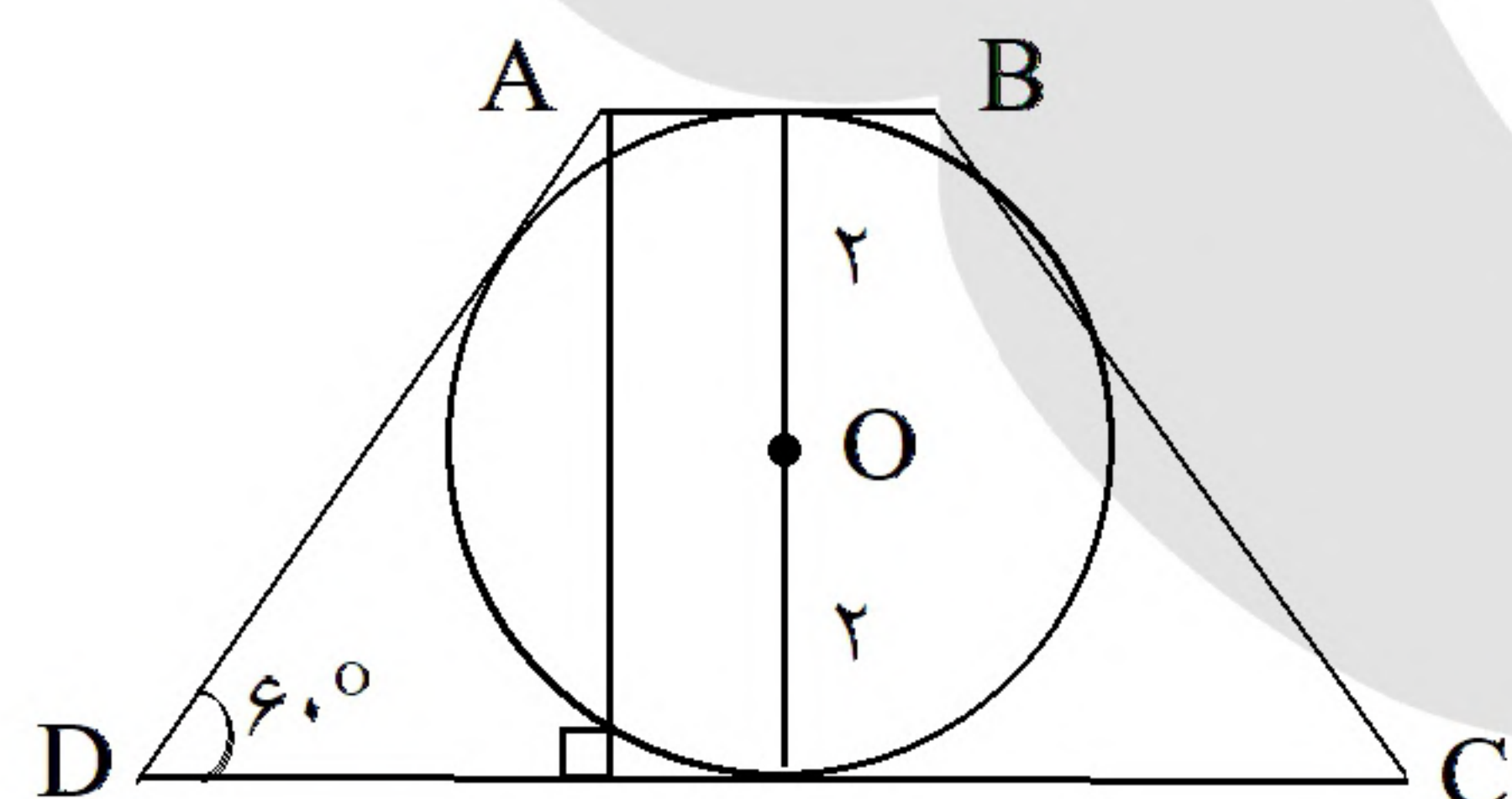
BD و CD نیمساز زوایای B و C هستند، پس داریم:

$$\widehat{D}_1 + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = 180^\circ \quad (1)$$

از طرفی چهارضلعی AEDF محاطی است، بنابراین:

$$\widehat{D}_1 = \widehat{D}_2 \quad \widehat{A} + \widehat{D}_1 = 180^\circ \xrightarrow{\quad} \widehat{A} + \widehat{D}_2 = 180^\circ \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{B} + \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{180^\circ - \widehat{A}}{2} \Rightarrow 2\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{A} \Rightarrow 3\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 60^\circ$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مطابق شکل طول ارتفاع دوزنقه برابر طول قطر دایره یعنی برابر ۴ است. از طرفی در مثلث ADH داریم:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{AD} \Rightarrow AD = \frac{8}{\sqrt{3}}$$

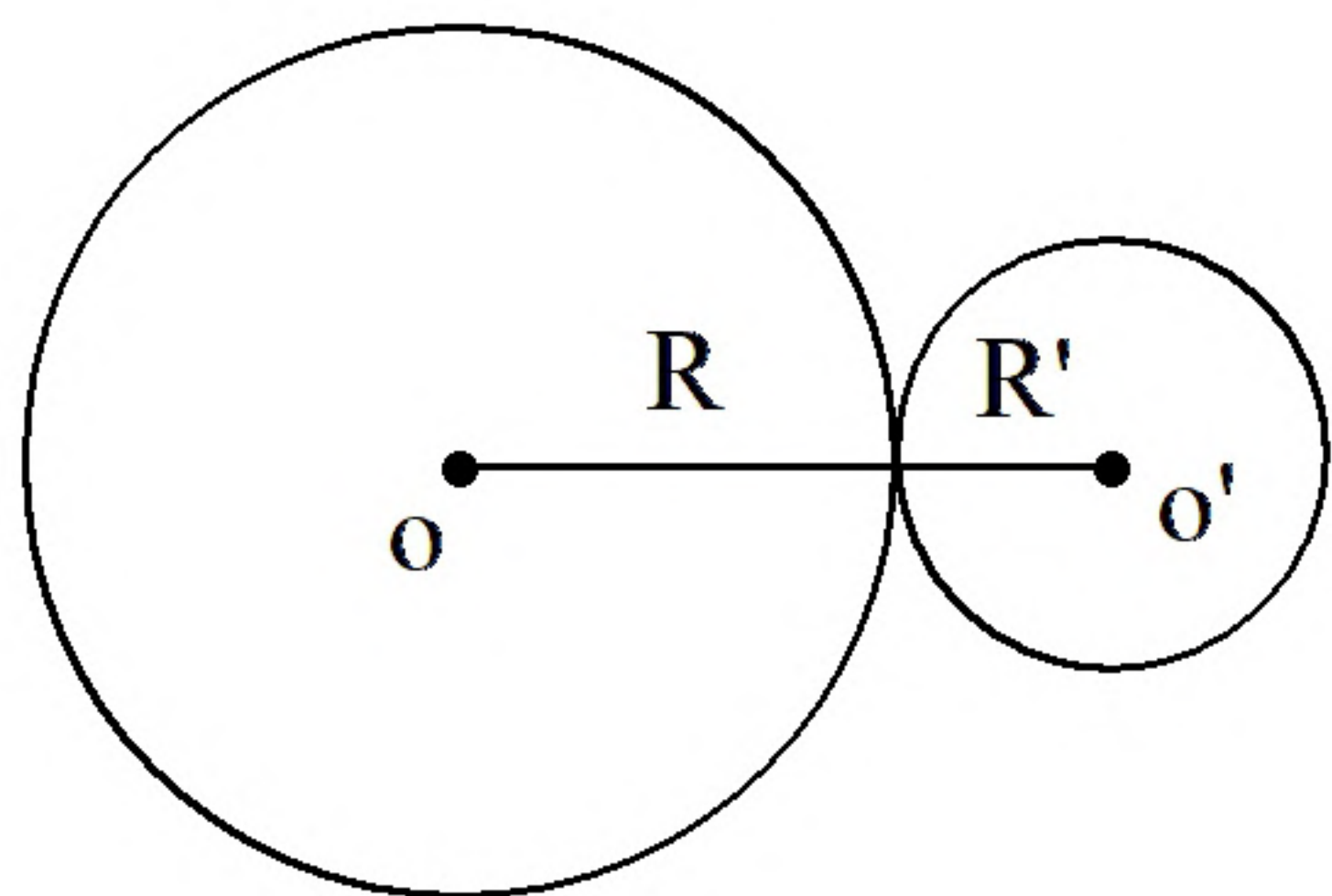
چهارضلعی ABCD، یک چهارضلعی محیطی است، پس داریم:

$$AB + CD = AD + BC = 2AD = \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AH(AB + CD) = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{32}{\sqrt{3}}$$

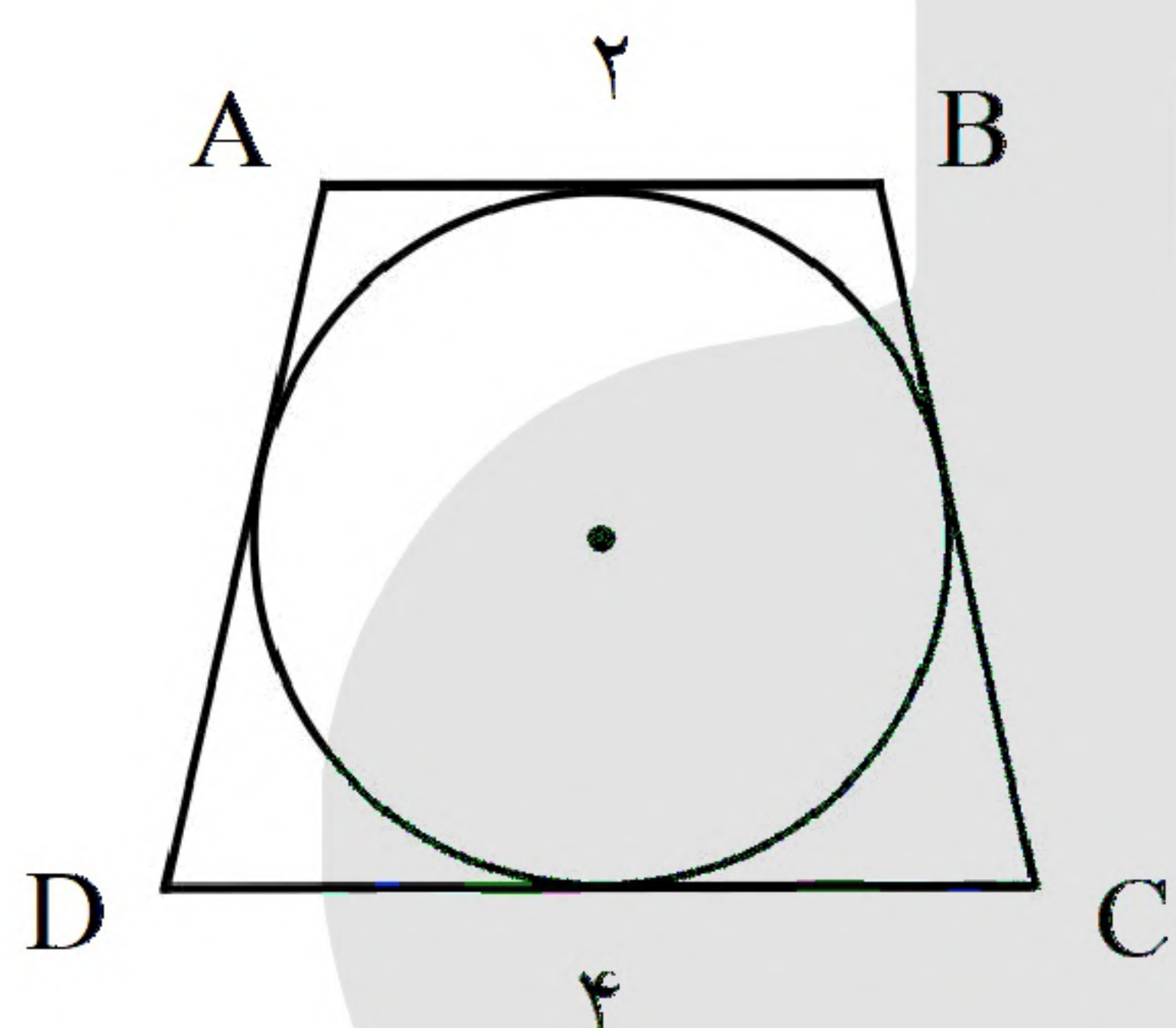


۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول خط‌المرکزین دو دایره مماس خارج مساوی $R + R'$ است. پس طول مماس مشترک خارجی این دو دایره $2\sqrt{RR'}$ است. بنابر فرض سؤال داریم.



$$\begin{aligned} \text{طول مماس مشترک خارجی} &= \frac{\sqrt{3}}{2} R \Rightarrow 2\sqrt{RR'} = \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ \Rightarrow 4RR' &= \frac{3}{4} R^2 \Rightarrow 4R' = \frac{3}{4} R \Rightarrow R = \frac{16}{3} R' \end{aligned}$$

بنابراین شعاع دایره بزرگتر $\frac{16}{3}$ برابر شعاع دایره کوچکتر است.

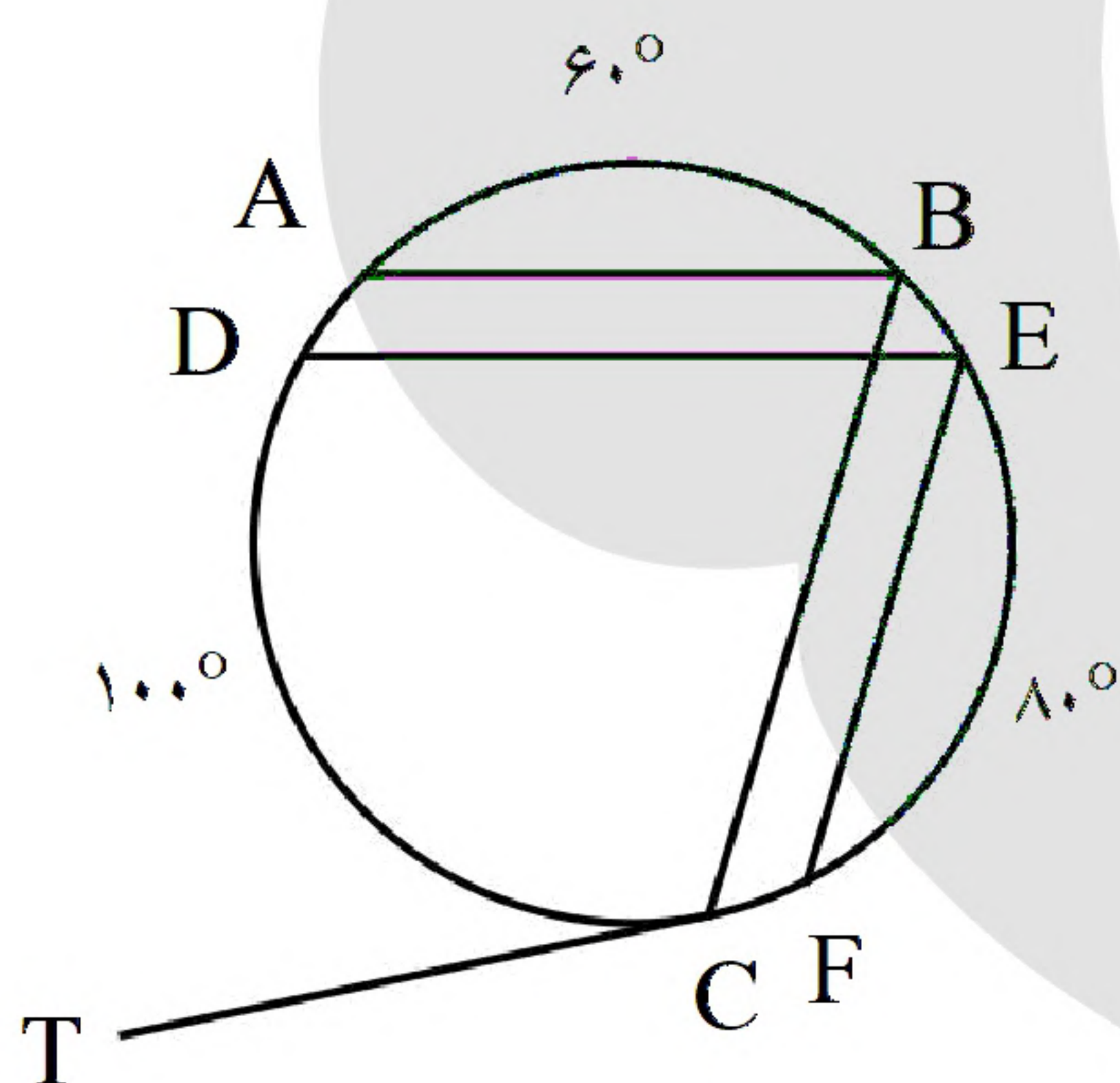


۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی قطر دایره محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده دوزنقه است. به عبارتی اگر R شعاع دایره محاطی دوزنقه متساوی‌الساقین محیطی ABCD باشد آنگاه پس:

$$4R^2 = AB \times DC \Rightarrow 4R^2 = 2 \times 4 \Rightarrow R^2 = 2$$

بنابراین: مساحت دایره $= \pi R^2 = 2\pi$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اندازه کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند.



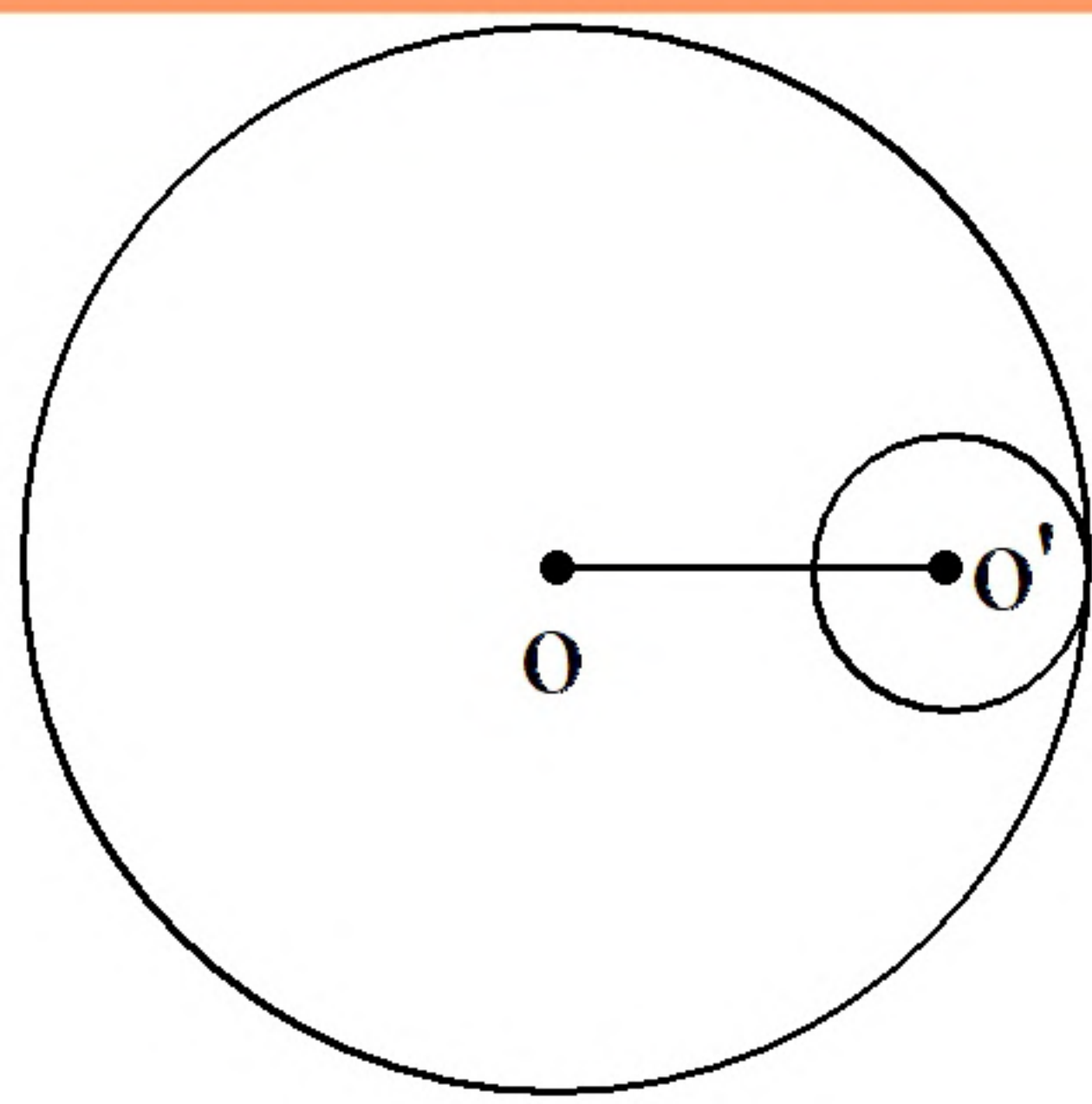
$$\left. \begin{aligned} AB \parallel DE &\Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BE} \\ BC \parallel EF &\Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} = \widehat{CF} = \widehat{BE} = x$$

در ضمن:

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BE} + \widehat{EF} + \widehat{CF} + \widehat{CD} + \widehat{AD} &= 360^\circ \Rightarrow 60^\circ + x + 80^\circ + x + 100^\circ + x = 360^\circ \\ \Rightarrow 3x &= 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ \end{aligned}$$

از طرف دیگر زاویه BCT زاویه ظلی است بنابراین:

$$\widehat{BCT} = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{DC} + \widehat{AB}}{2} = \frac{40^\circ + 100^\circ + 60^\circ}{2} = 100^\circ$$



۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم شعاع R دایره بزرگتر و R' شعاع دایره کوچکتر باشد. چون دو دایره مماس درونی‌اند پس $OO' = R - R'$ یعنی:

$$R - R' = 3/5$$

از طرف دیگر:

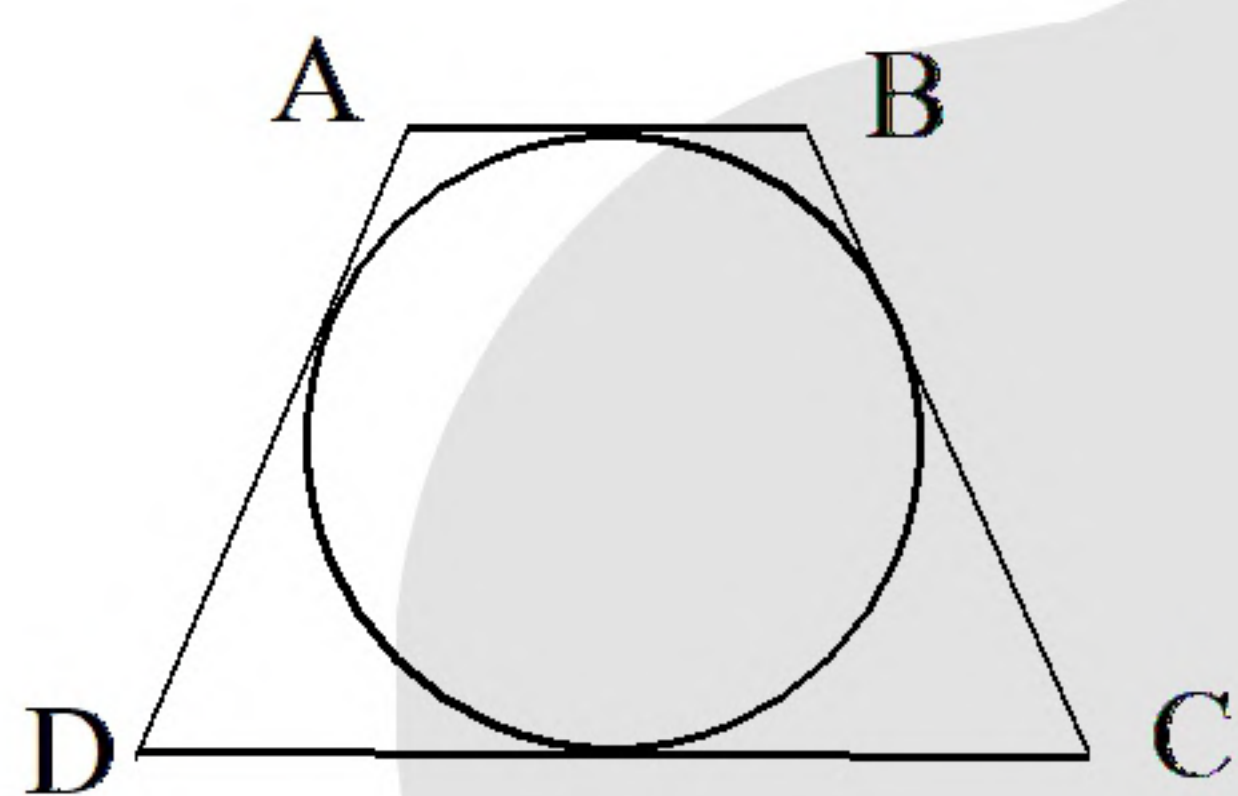
$$21\pi = \pi R^2 - \pi R'^2 \Rightarrow R^2 - R'^2 = 21$$

$$\Rightarrow (R - R')(R + R') = 21 \xrightarrow{R - R' = 3/5} 3/5(R + R') = 21$$

$$\Rightarrow R + R' = \frac{21}{3/5} = \frac{21}{\frac{3}{5}} = 7$$

بنابراین:

$$\begin{cases} R - R' = 3/5 \\ R + R' = 7 \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 2R' = 7 - 3/5 \Rightarrow 2R' = 12/5 \Rightarrow R' = \frac{6}{5} = 1.2$$



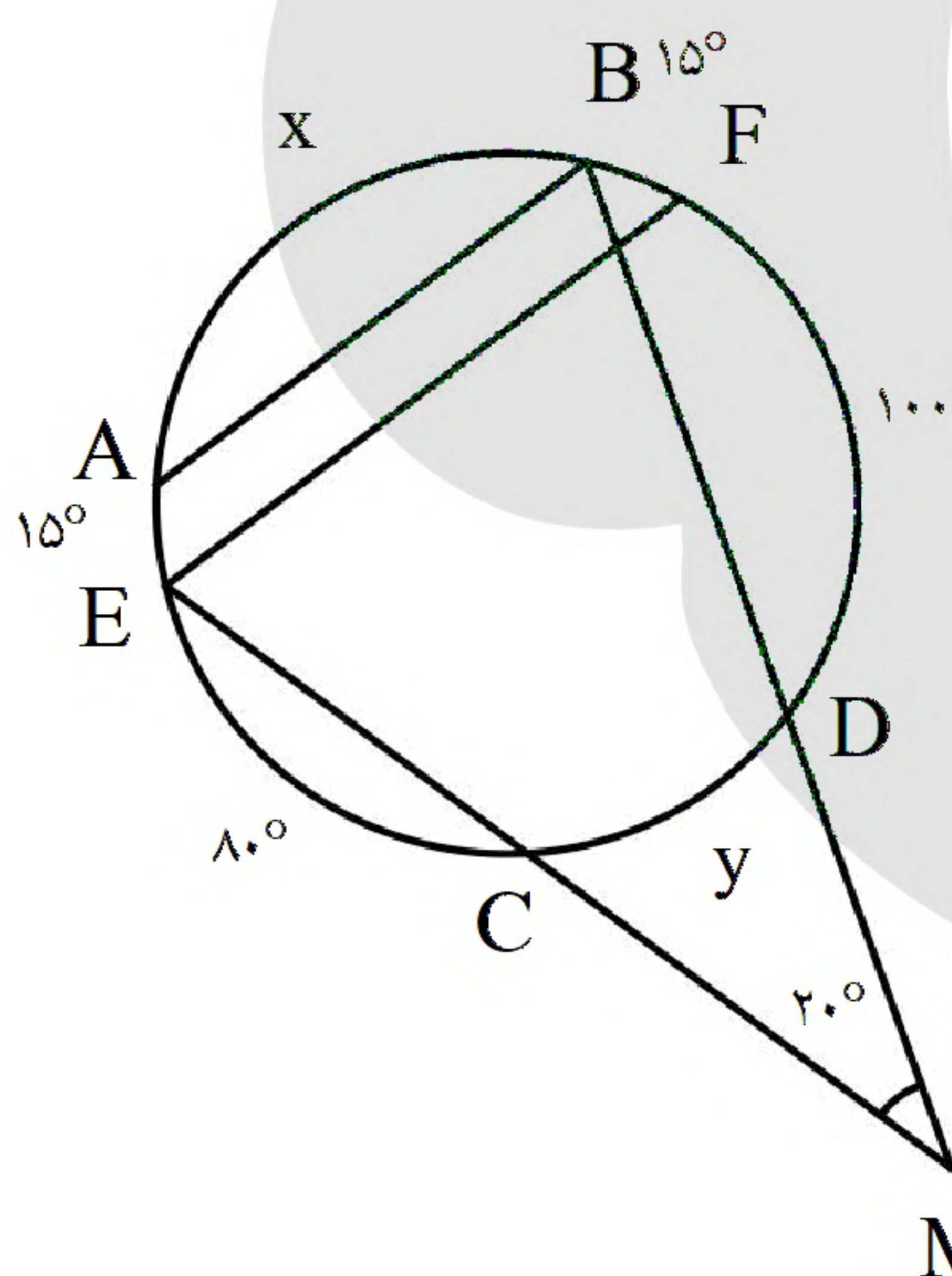
۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین بر دایره به شعاع R محیط باشد آنگاه قطر دایره‌ی محاطی واسطه هندسی بین دو قاعده است. پس:

$$4R^2 = AB \times DC \quad (1)$$

از طرف دیگر:

$$15\pi = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = 15 \quad (2)$$

$$\Rightarrow 4 \times 15 = a \times 6 \Rightarrow a = 10$$



۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. می‌دانیم کمانهای محصور بین دو وتر موازی مساویند پس:

$$AB \parallel EF \Rightarrow \widehat{BF} = \widehat{AE} \xrightarrow{\widehat{AE} = 15^\circ} \widehat{BF} = 15^\circ$$

با فرض $AB = x$ و $CD = y$ می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \widehat{AB} + \widehat{BF} + \widehat{FD} + \widehat{CD} + \widehat{EC} + \widehat{AE} &= 360^\circ \\ \Rightarrow x + 15^\circ + 100^\circ + y + 80^\circ + 15^\circ &= 360^\circ \\ \Rightarrow x + y &= 150^\circ \quad (1) \end{aligned}$$

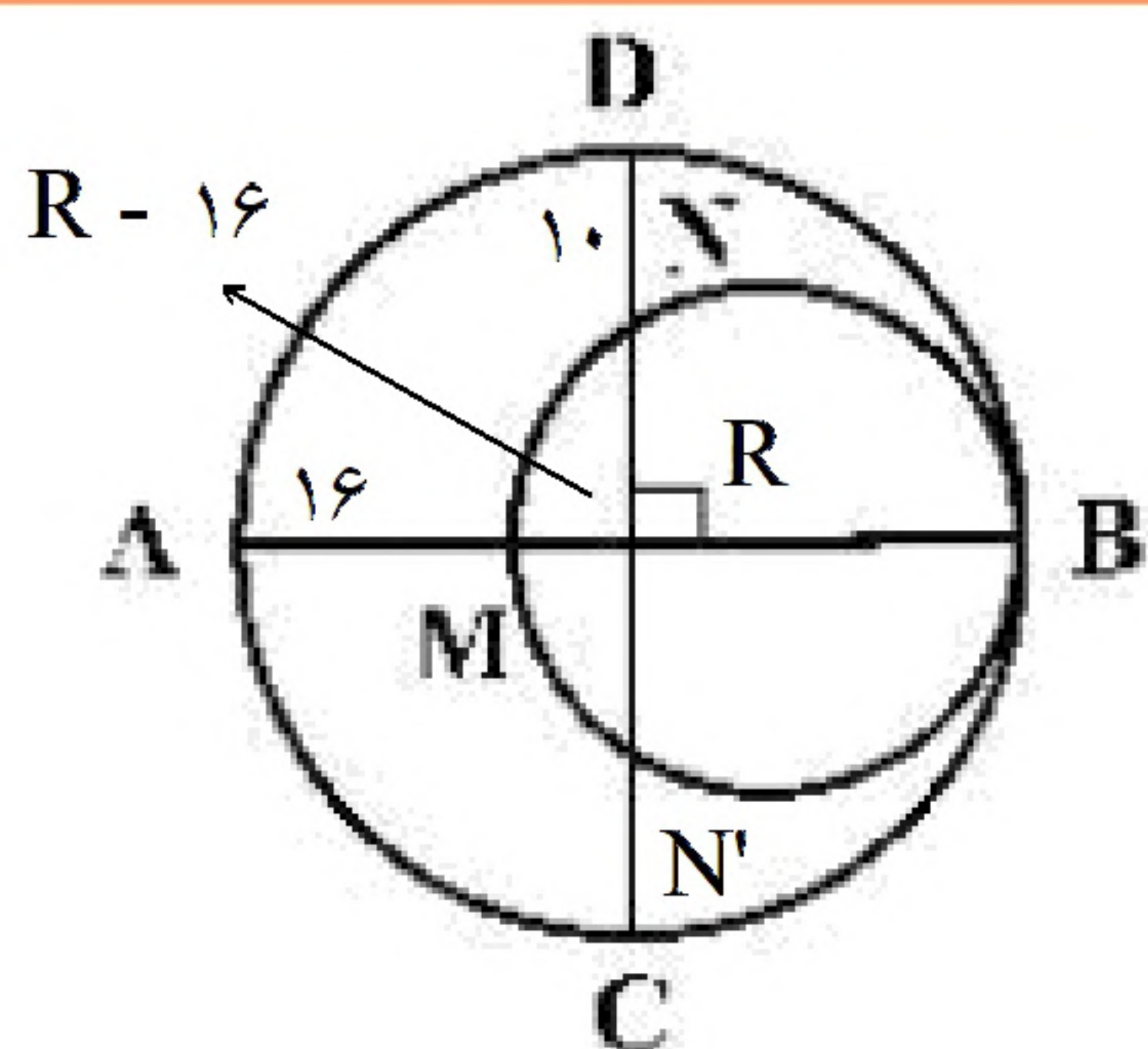
از طرف دیگر:

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{EAB} - \widehat{CD}}{2} \Rightarrow 20^\circ = \frac{15^\circ + x - y}{2} \Rightarrow x - y = 25^\circ \quad (2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 150^\circ \\ x - y = 25^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{کم می کنیم}} 2y = 125^\circ \Rightarrow y = 62.5^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{ABD} = \frac{\widehat{AD}}{2} \Rightarrow \widehat{ABD} = \frac{62.5^\circ + 80^\circ + 15^\circ}{2} = \frac{157.5^\circ}{2} = 78.75^\circ$$



۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم R شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر باشد. چون AB

محور تقارن این شکل است پس $DN = N'C = ۱۰$.

در ضمن قطر AB عمود منصف NN' است پس $ON = ON'$.

حال با استفاده از قضیه‌ی رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.

$$ON = ON' = R - 1.$$

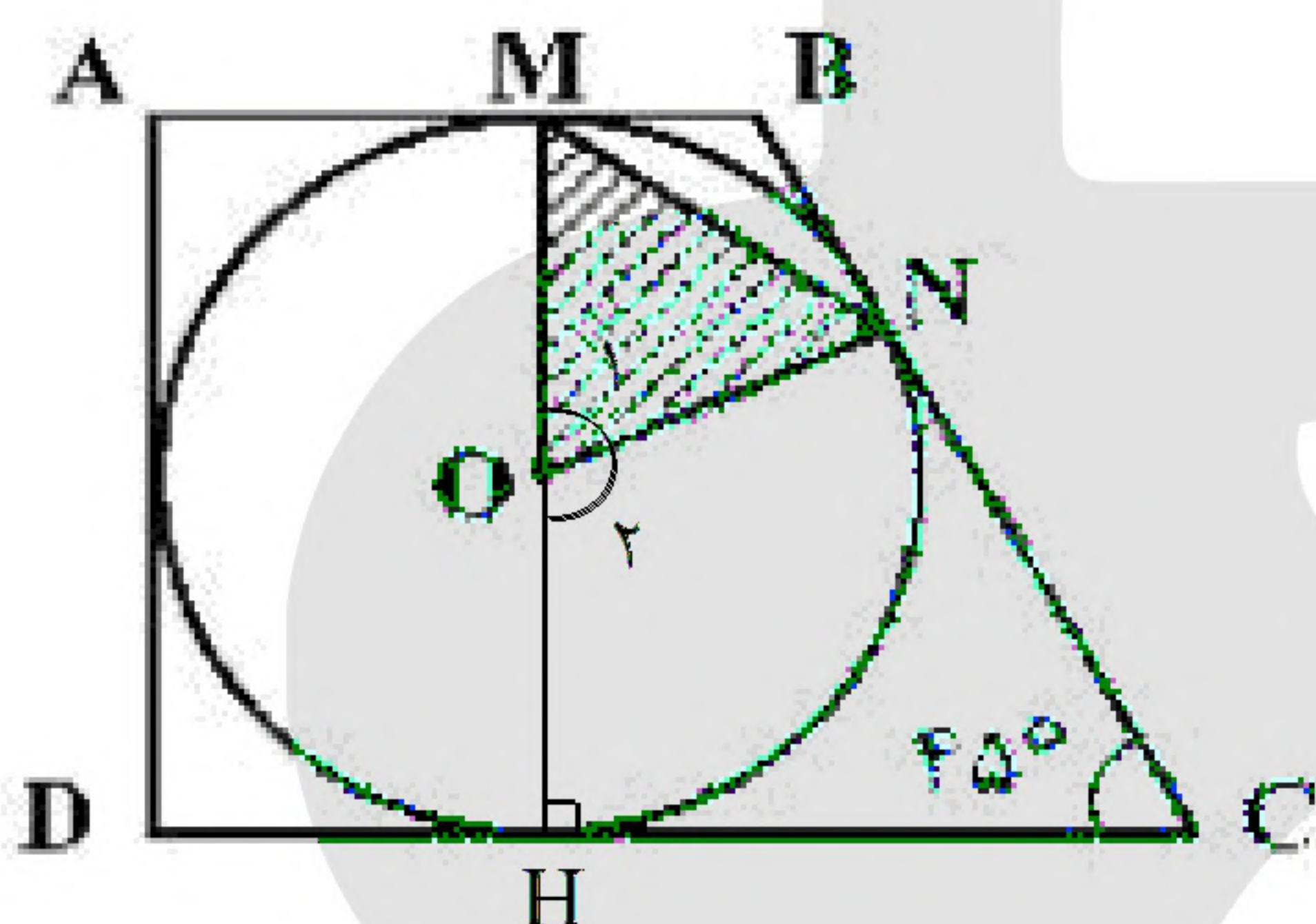
$$\text{ON} \times \text{ON}' = \text{OB} \times \text{OM} \xrightarrow{\text{ON} = \text{ON}' \quad \text{R} = 1}$$

$$(R - \gamma \cdot)^T = R(R - \gamma \epsilon) \Rightarrow R^T + \gamma \cdot \cdot - \gamma \cdot R = R^T - \gamma \epsilon R$$

$$\Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

در شکل MB قطر دایره‌ی کوچک‌تر است از طرف دیگر MB مساوی ۱۶ - R است. پس:

$$MB = 2R - 16 \Rightarrow \text{قطر دایره کوچک} = 50 - 16 = 34 \Rightarrow \text{شعاع دایره کوچک} = 17$$



۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. شعاع OM را امتداد می‌دهیم در این

صورت شعاع OH بر DC عمود است. چون $\hat{N} = \hat{H} = 90^\circ$ پس

چهار ضلعی ONCH محاطی است در نتیجه:

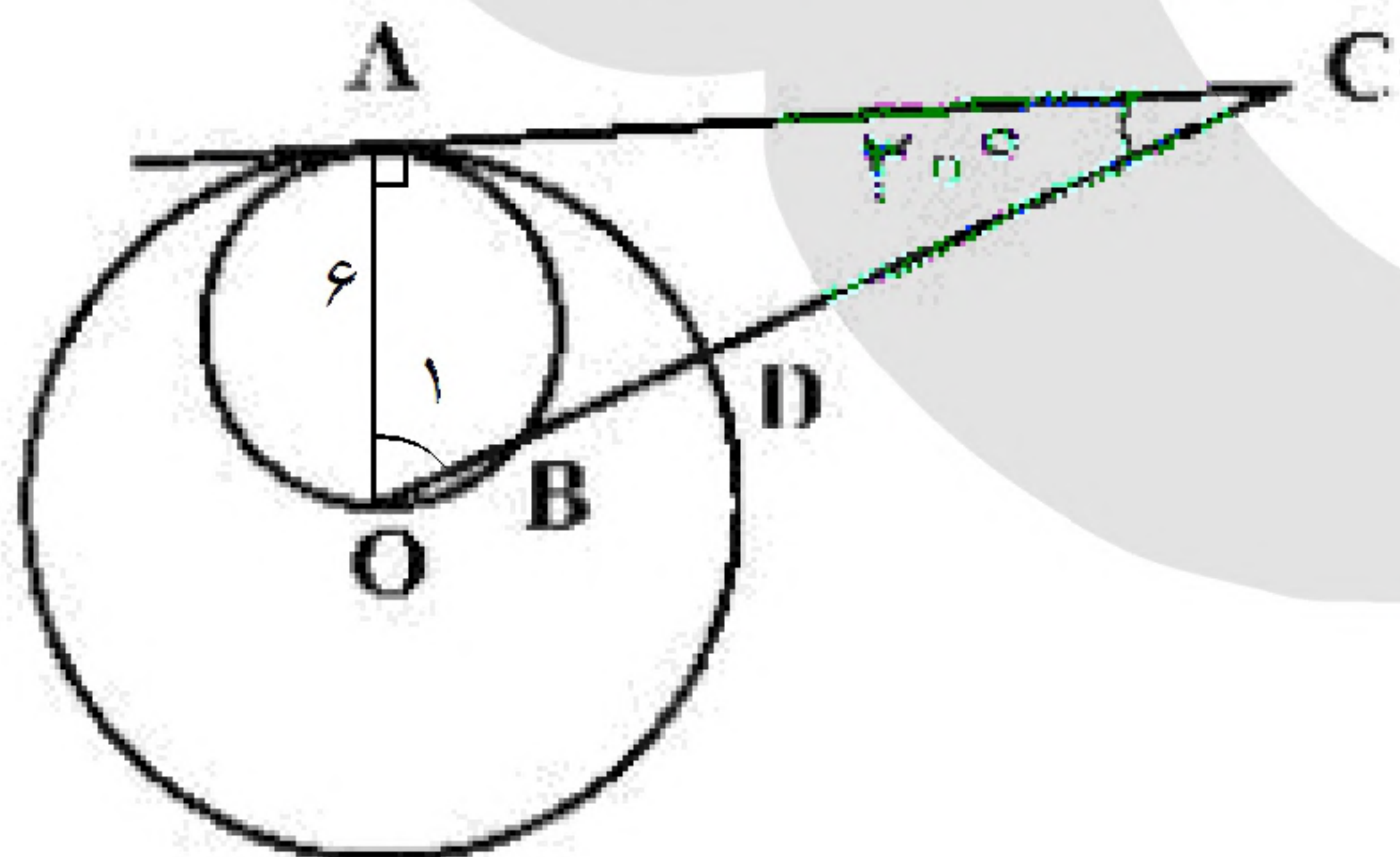
$$\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 1A_1^o$$

$$\hat{O}_Y = 1\lambda^{\circ} - 45^{\circ} \xrightarrow{O_1 + O_Y = 1\lambda^{\circ}} \hat{O}_1 = 45^{\circ}$$

بنابر این:

$$S_{OMN} = \frac{1}{r} OM \times ON \sin 45^\circ = \frac{1}{r}(r)(r) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقطه‌ی A وصل می‌کنیم در این صورت $\hat{A} = 90^\circ$ است.



$$\triangle OAC: \hat{C} = 30^\circ \Rightarrow OA = \frac{1}{2} OC \xrightarrow{OA = 6} OC = 12$$

$$\text{OAC} : \hat{\text{O}}_1 = 90^\circ \Rightarrow \text{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{OC} = \frac{\sqrt{3}}{2} (12) = 6\sqrt{3}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره‌ی کوچک‌تر می‌نویسیم:

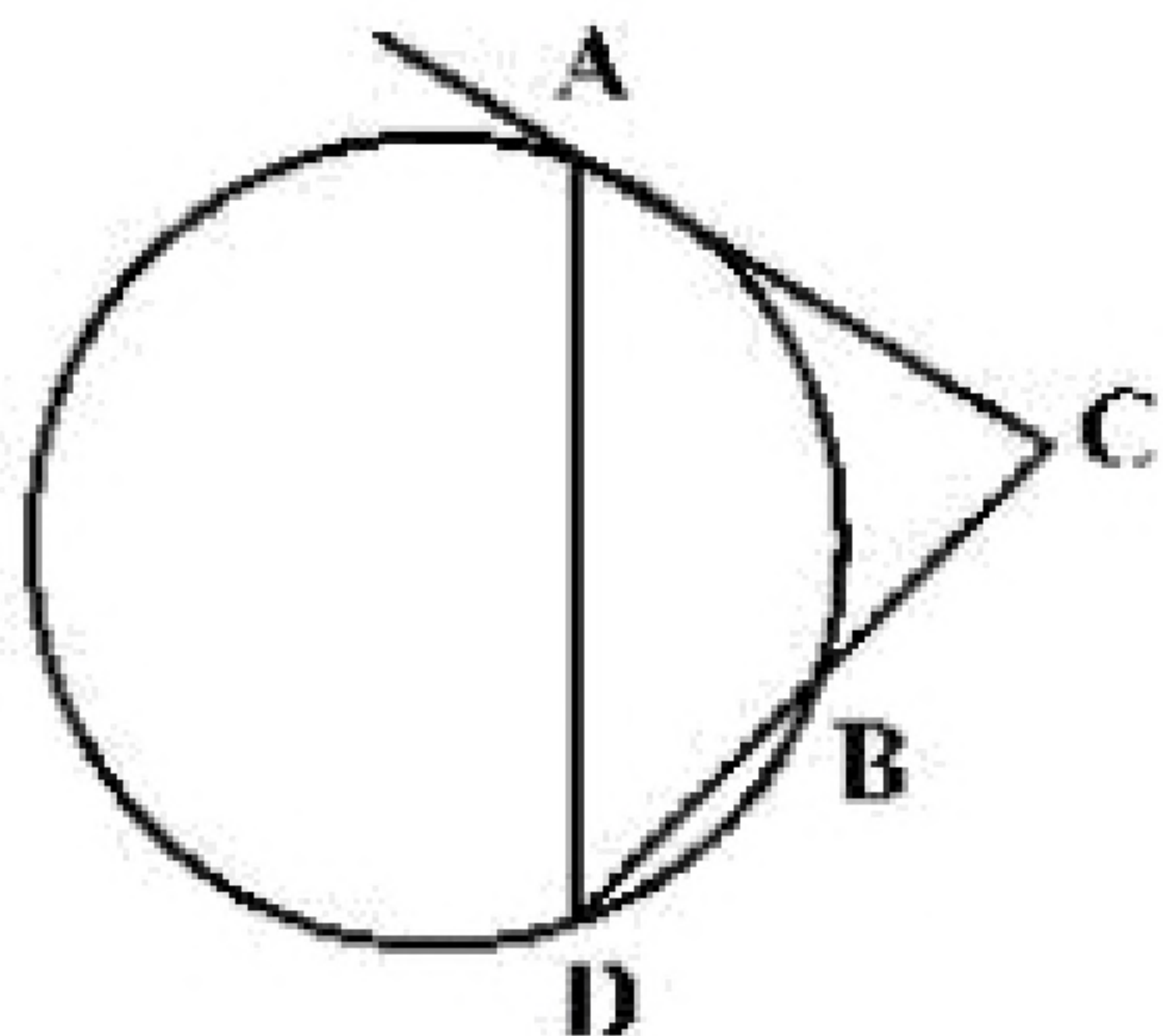
$$CA^2 = CB \times CO \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right)^2 = CB \times 12 \Rightarrow 1.8 = 12CB \Rightarrow CB = \frac{1}{20}$$

$$BD = BC - CD = 9 - 6 = 3$$

از طرف دیگر $CD = CO - OD = ۱۲ - ۶ = ۶$ بنابراین:

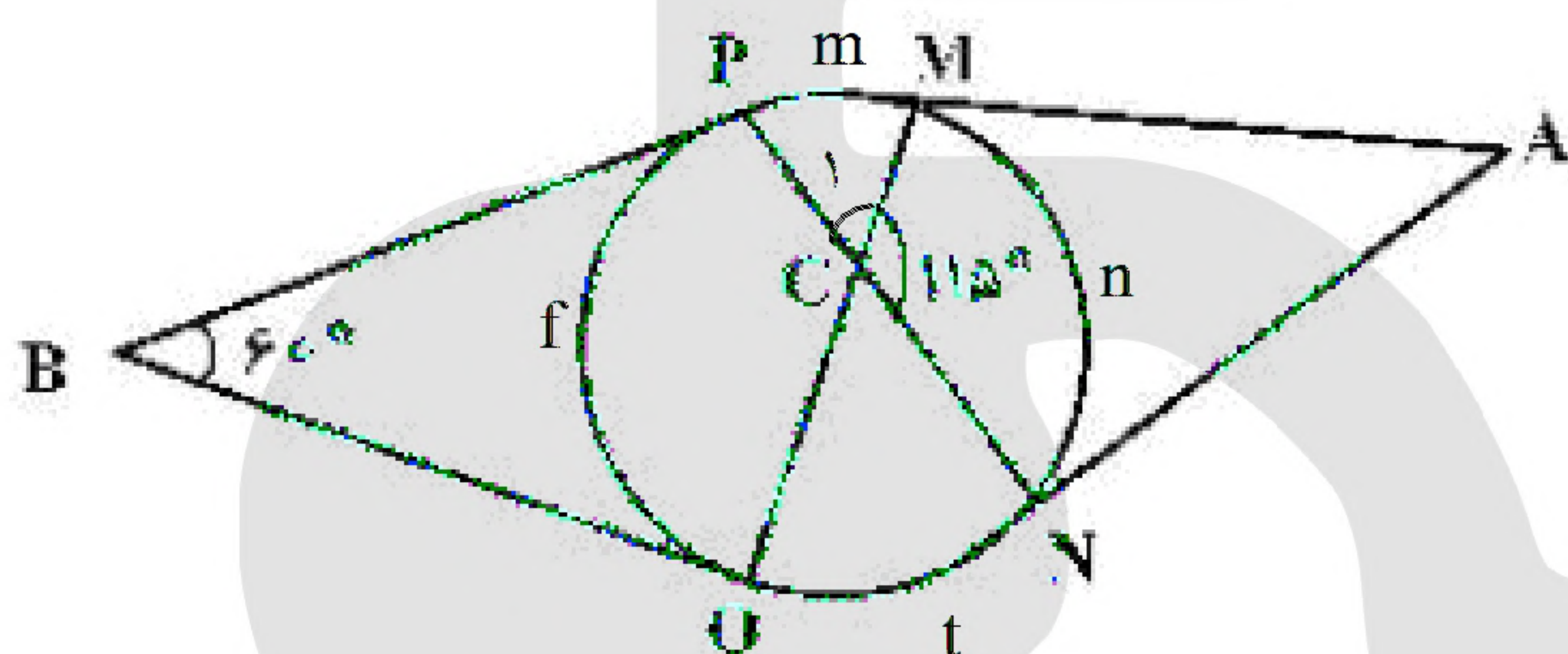


۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



$$\begin{aligned} CA^2 &= CB \times CD \Rightarrow CA^2 = CB(CB + BD) \xrightarrow{DB = BC} \\ CA^2 &= CB(CB + CB) \Rightarrow CA^2 = 2CB^2 \Rightarrow CA = \sqrt{2}CB \\ \Rightarrow \frac{AC}{BC} &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اندازه‌ی کمان‌های \widehat{PM} و \widehat{MN} و \widehat{NQ} و \widehat{PQ} به ترتیب برابر m و n و t و f باشند داریم:



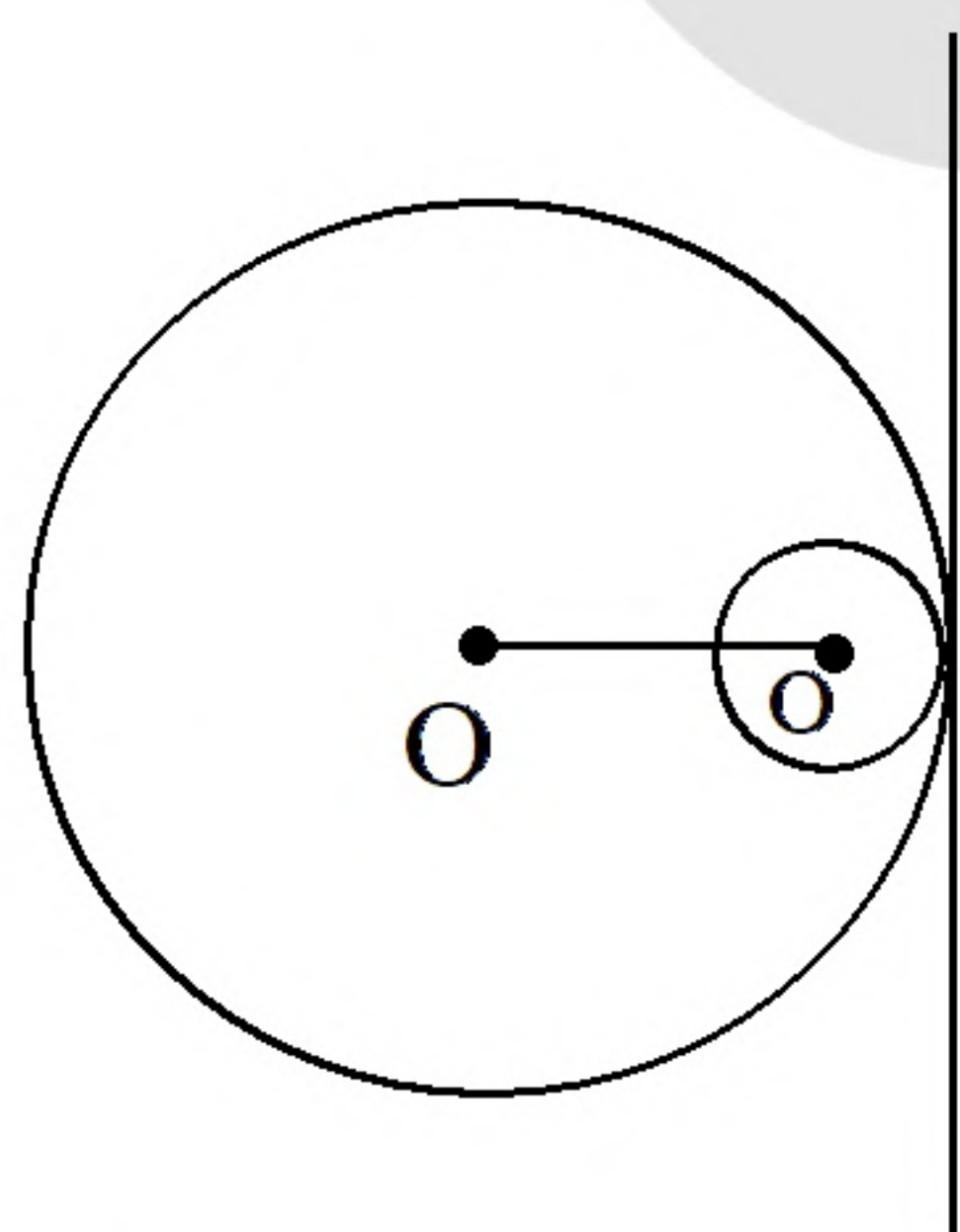
$$\begin{aligned} 60^\circ &= \frac{m + n + t - f}{2} \Rightarrow m + n + t - f \\ &= 120 \quad (1) \\ \hat{C} &= 115^\circ \Rightarrow \hat{C}_1 = 180 - 115 = 65^\circ \\ \Rightarrow \frac{m + t}{2} &= 65 \Rightarrow m + t = 130 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\text{از ۱، ۲} \Rightarrow n - f = -10$$

$$\hat{A} = \frac{m + f + t - n}{2} = \frac{(m + t) + (f - n)}{2} = \frac{130^\circ + 10^\circ}{2} = 70^\circ$$

بنابراین:

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند که مماس داخلی باشند. پس باید $OO' = |R - R'|$ باشد.



$$\begin{aligned} OO' &= |R - R'| \Rightarrow 6 = |a^2 - 2 - 6a + 1| \\ \Rightarrow 6 &= |a^2 - 6a - 1| \end{aligned}$$

$$a^2 - 6a - 1 = 6 \Rightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Rightarrow S_1 = 6$$

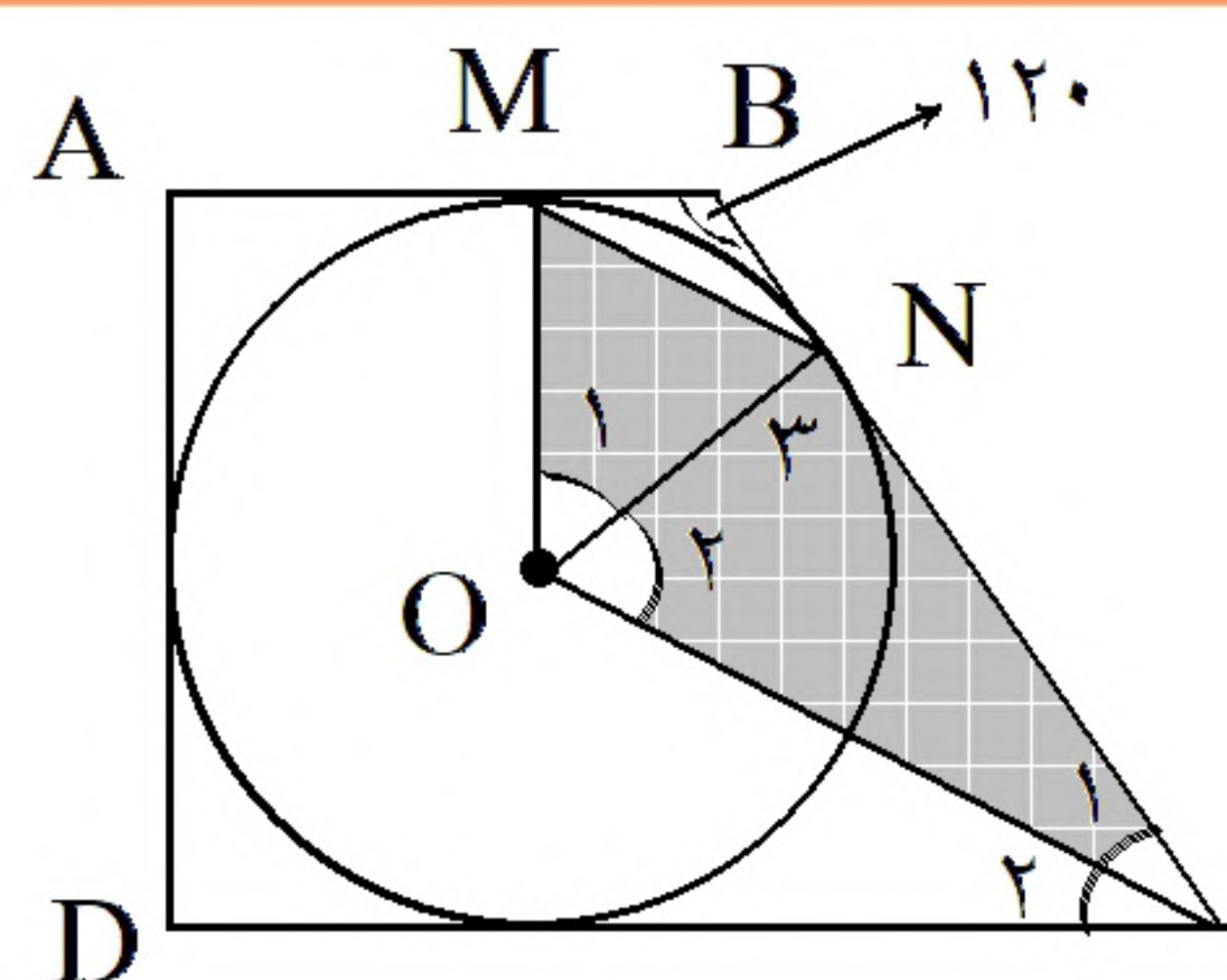
حالت اول:

$$a^2 - 6a - 1 = -6 \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Rightarrow S_2 = 6$$

حالت دوم:

$$\frac{S_1 + S_2}{2} = 6$$

پس میانگین مقادیر ممکن برای a برابر است با:



۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از O به N وصل می‌کنیم در این صورت ON برابر

شعاع دایره است. در ضمن در چهارضلعی OMBN دو زاویه‌ی \hat{M} و \hat{N} قائمه هستند پس این چهارضلعی محاطی است. بنابراین $\hat{O}_1 + \hat{B} = 180^\circ$ پس

$\hat{O}_1 = 60^\circ$ پس مثلث OMN متساوی‌الاضلاع است. از طرف دیگر دو زاویه‌ی B و

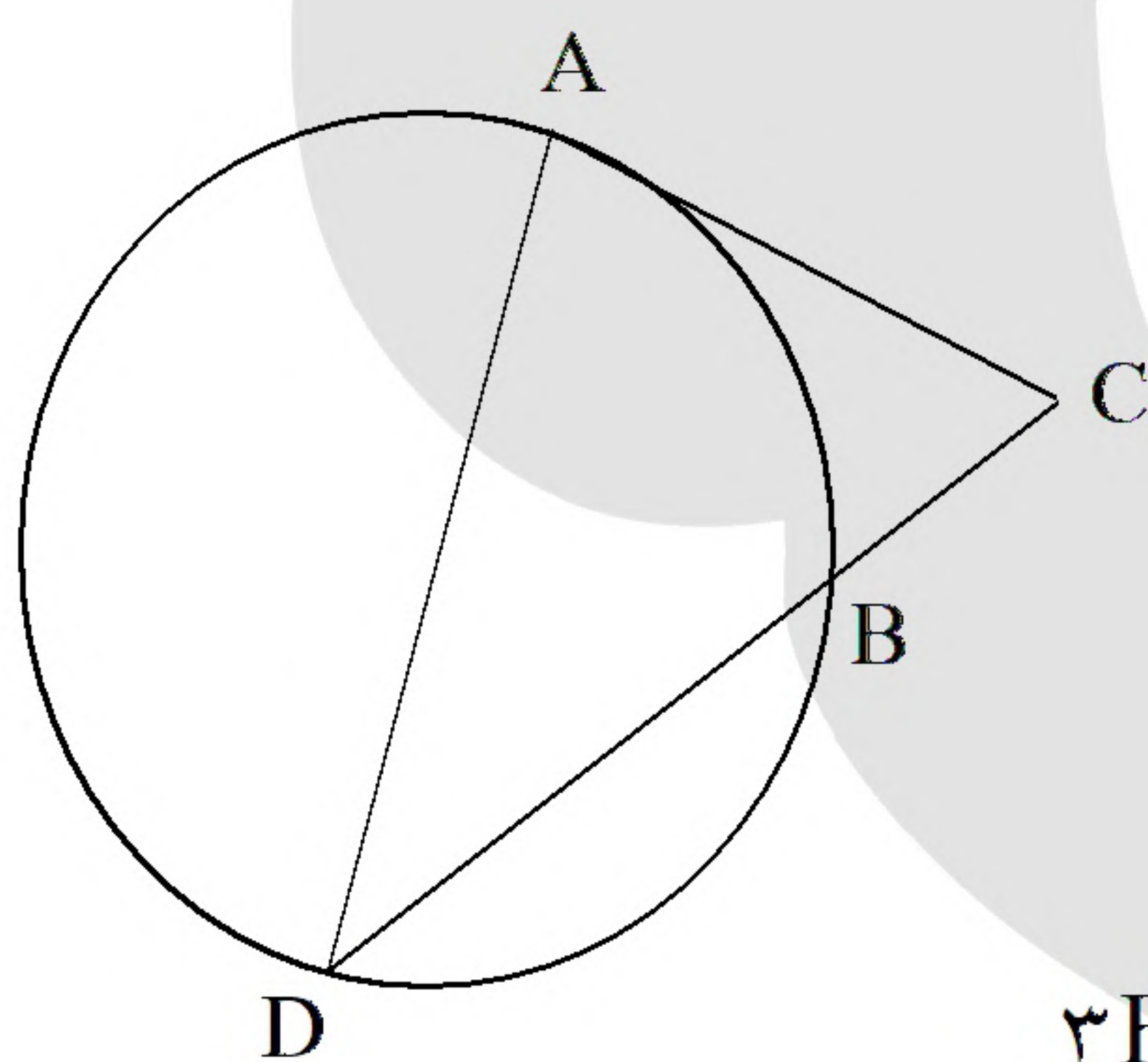
و C در این دوزنقه مکملند و OC نیمساز زاویه‌ی \hat{C} است پس $\hat{C}_1 = 30^\circ$ پس $\hat{O}_2 = 60^\circ$ داریم.

$$\triangle ONC : \hat{C}_1 = 30^\circ \Rightarrow ON = \frac{1}{2}OC \xrightarrow{ON=3} OC=6$$

بنابراین:

$$S_{OMNC} = S_{OMN} + S_{ONC} = \frac{\sqrt{3}}{4}(3)^2 + \frac{1}{2}ON + OC \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}(6) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$$



۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:

$$AC^2 = BC \times DC \quad (1)$$

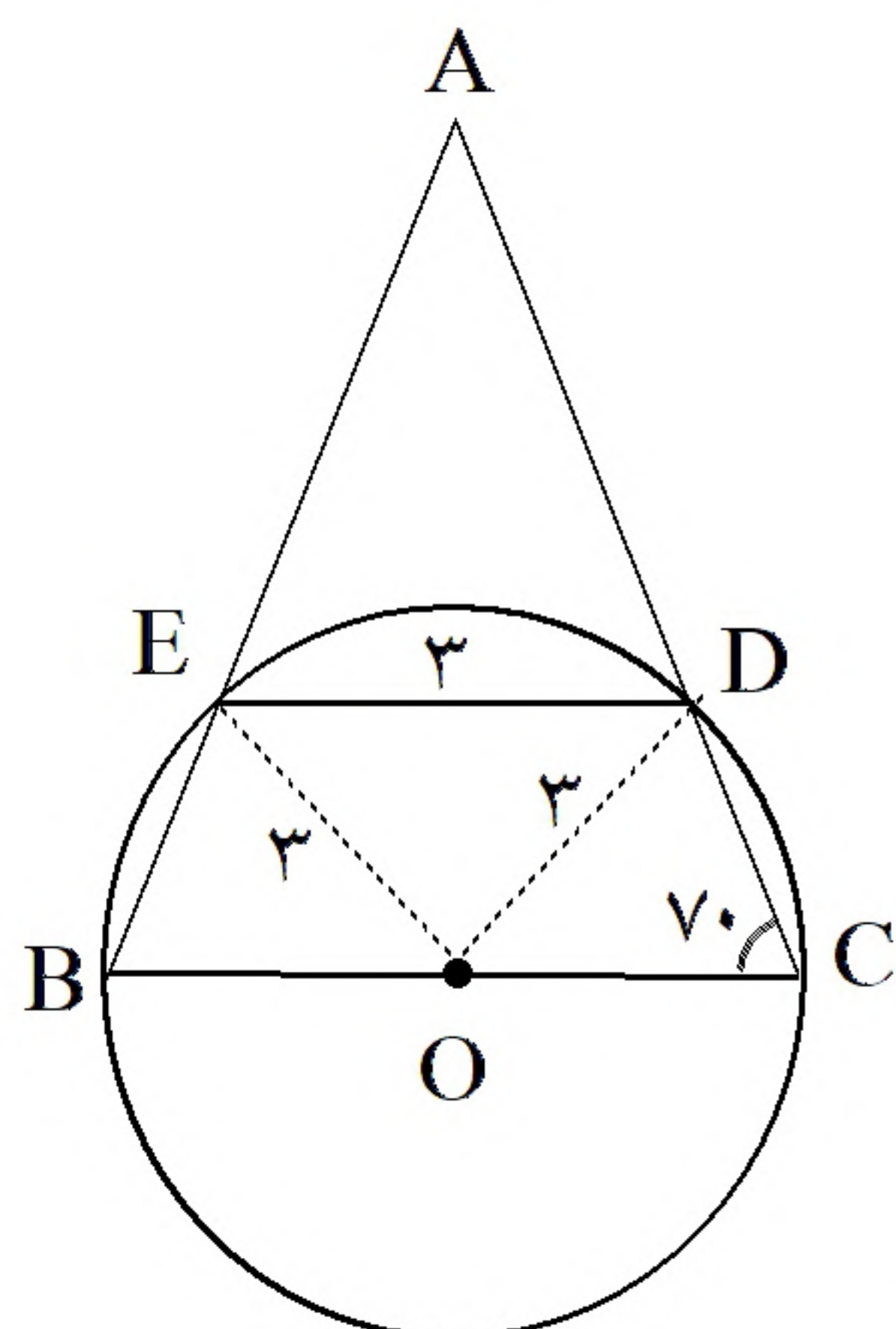
$$AC = \sqrt{3}BC \quad \text{پس:} \quad \frac{AC}{BC} = \sqrt{3}$$

از طرف دیگر بنابر فرض سؤال پس بنابر تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم:

$$3BC^2 = BC \times DC \Rightarrow 3BC = DC \Rightarrow \frac{DC}{BC} = 3 \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{تفضیل از}} \frac{DB}{BC} = 2$$



۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. از مرکز O به نقاط D و E وصل می‌کنیم. در این صورت مثلث OED مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ است. پس $\widehat{ED} = 60^\circ$ داریم:



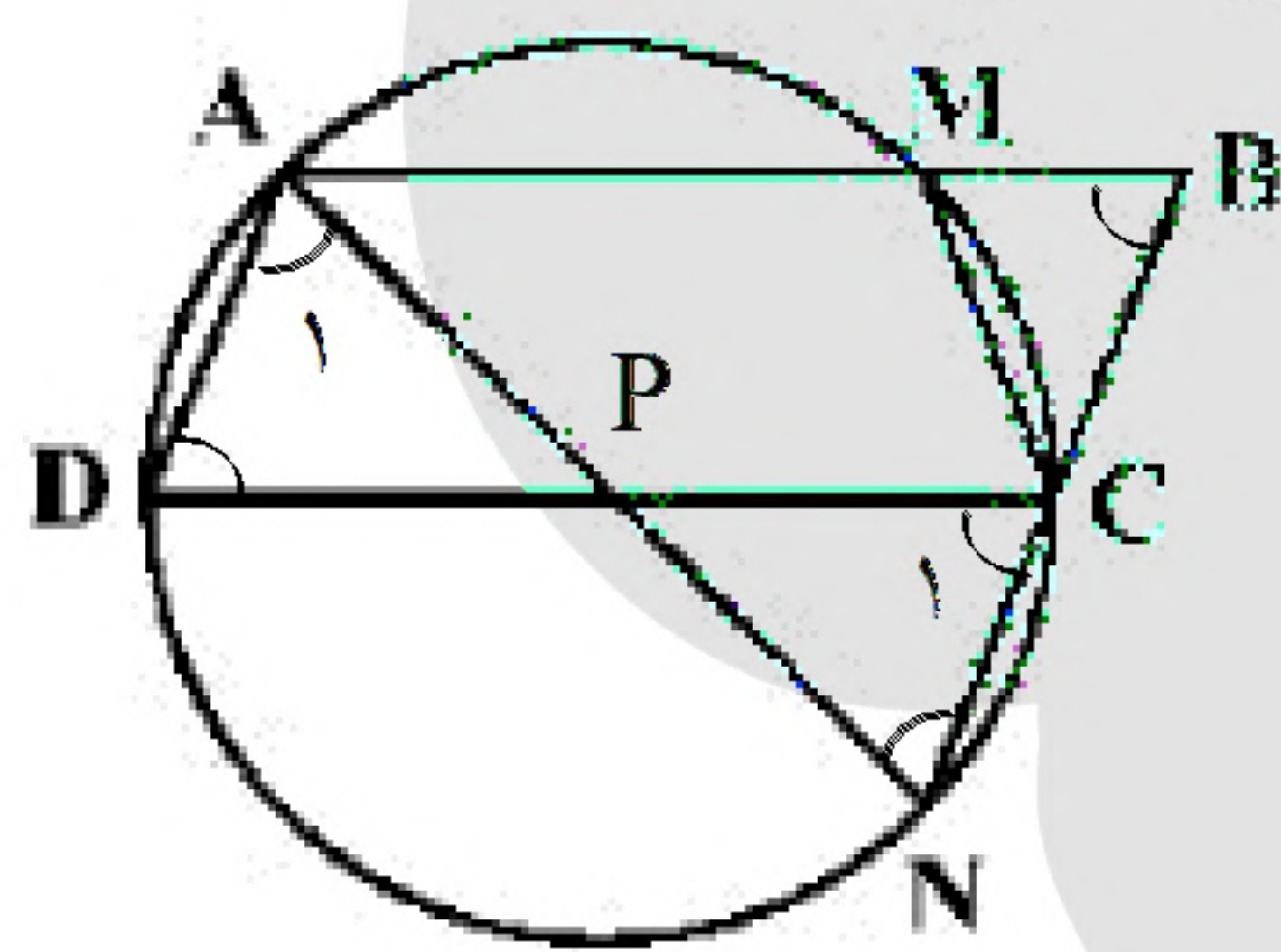
$$\widehat{C} = 70^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + \widehat{ED}}{2} = 70^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{BE} + 60^\circ}{2} = 70^\circ \Rightarrow \widehat{BE} = 80^\circ$$

بنابراین:

$$\widehat{BE} + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{BE} = 80^\circ} 80^\circ + \widehat{ED} + \widehat{DC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{ED} + \widehat{DC} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{EDC} = 100^\circ$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دو زاویه‌ی محاطی N و D روبه‌رو به یک کمان هستند پس مساویند.



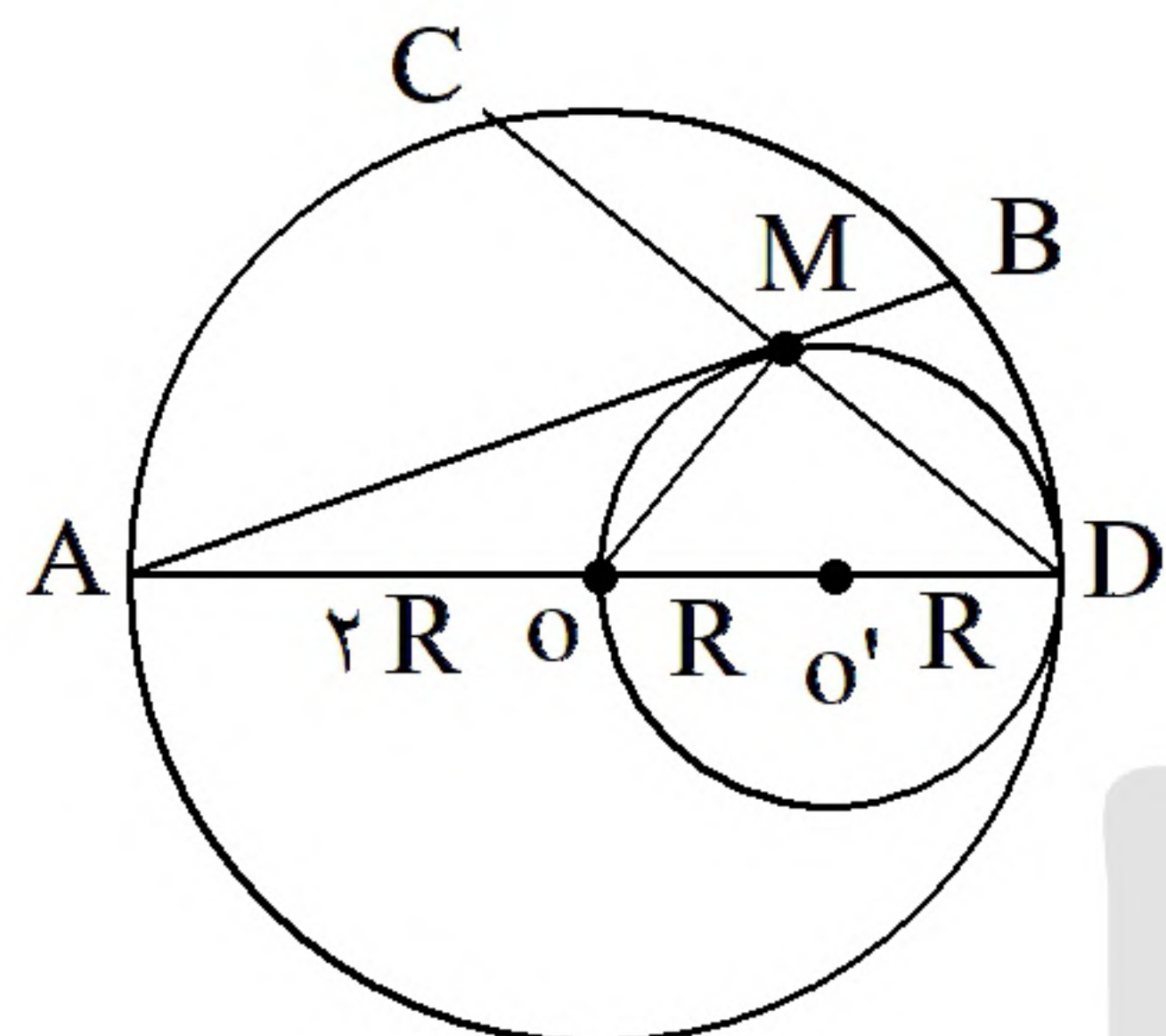
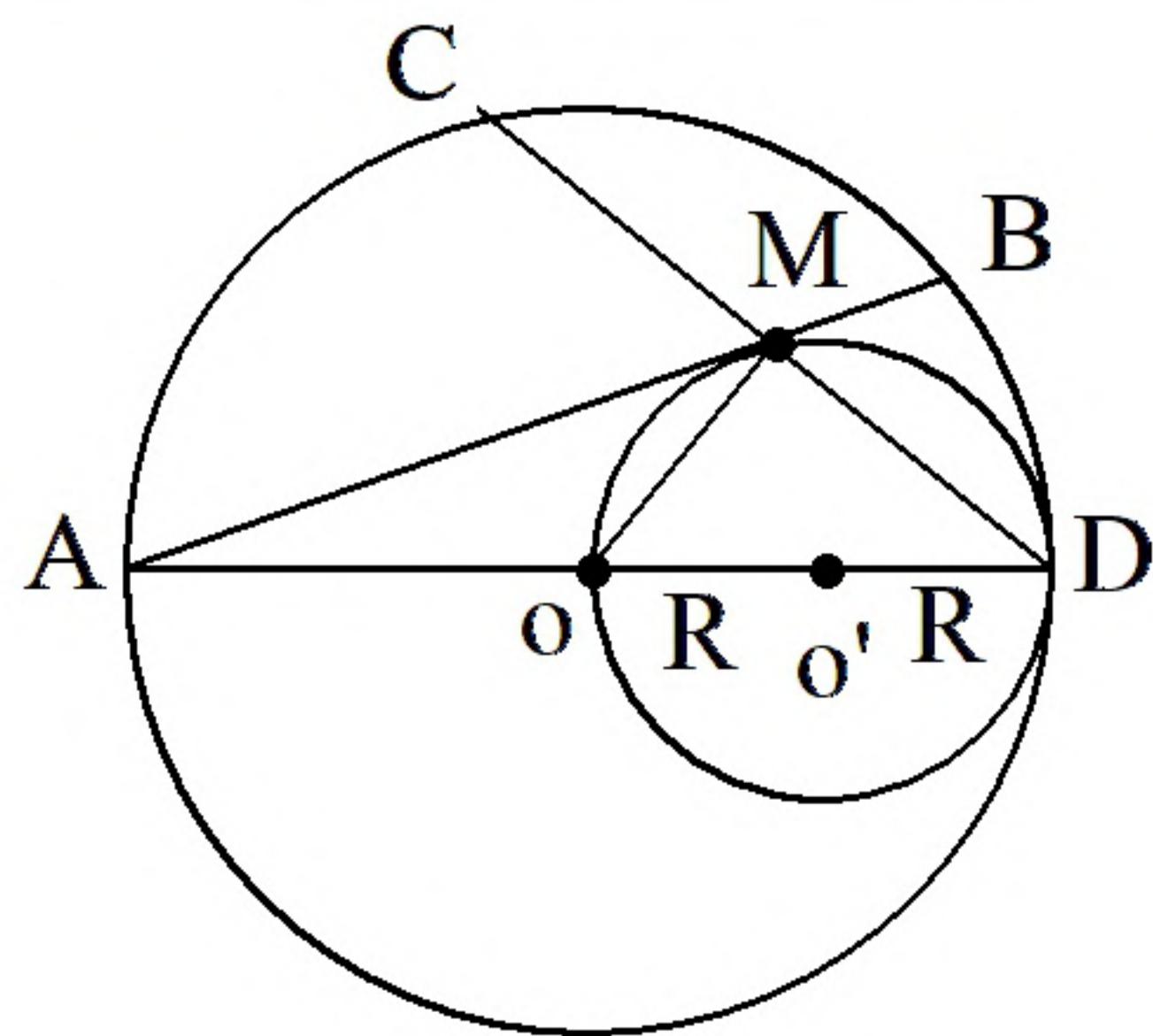
$$\widehat{D} = \widehat{N} \xrightarrow{\widehat{D} = \widehat{B}} \widehat{B} = \widehat{N} \Rightarrow \text{مثلث } ABN \text{ متساوی‌الساقین است}$$

از طرف دیگر دو وتر AM و DC موازیند پس دو کمان \widehat{MC} و \widehat{AD} که بین آنها هستند مساویند پس $AD = MC$. در ضمن $AD = BC$ پس $BC = MC$ یعنی مثلث BMC متساوی‌الساقین است. در ضمن چون $AD \parallel BN$ و AN مورب، پس $\widehat{A}_1 = \widehat{N}$ و $\widehat{N} = \widehat{D}$ پس $\widehat{A}_1 = \widehat{D}$ یعنی مثلث APD متساوی‌الساقین است و چون $AD \parallel BN$ و DC مورب، پس $\widehat{D} = \widehat{C}_1$ و $\widehat{D} = \widehat{N}$ پس $\widehat{C}_1 = \widehat{N}$ یعنی مثلث PNC نیز متساوی‌الساقین است. بنابراین چهار مثلث ABN و BMC و APD و PNC متساوی‌الساقین هستند.

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از مرکز O به نقطه‌ی M وصل می‌کنیم در این صورت زاویه‌ی M زاویه‌ی
محاطی روبه‌رو به قطر OD است پس $\widehat{M} = 90^\circ$.
بنابراین OM بر وتر CD عمود است پس OM وتر CD نصف می‌کند یعنی
 $CM = MD$.

حال با استفاده از رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم.



$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن با وصل کردن نقطه‌ی B به D نتیجه می‌گیریم زاویه‌ی محاطی B که روبه‌رو به قطر دایره‌ی بزرگ‌تر است قائمه است و شعاع O'M بر وتر AB عمود است پس:

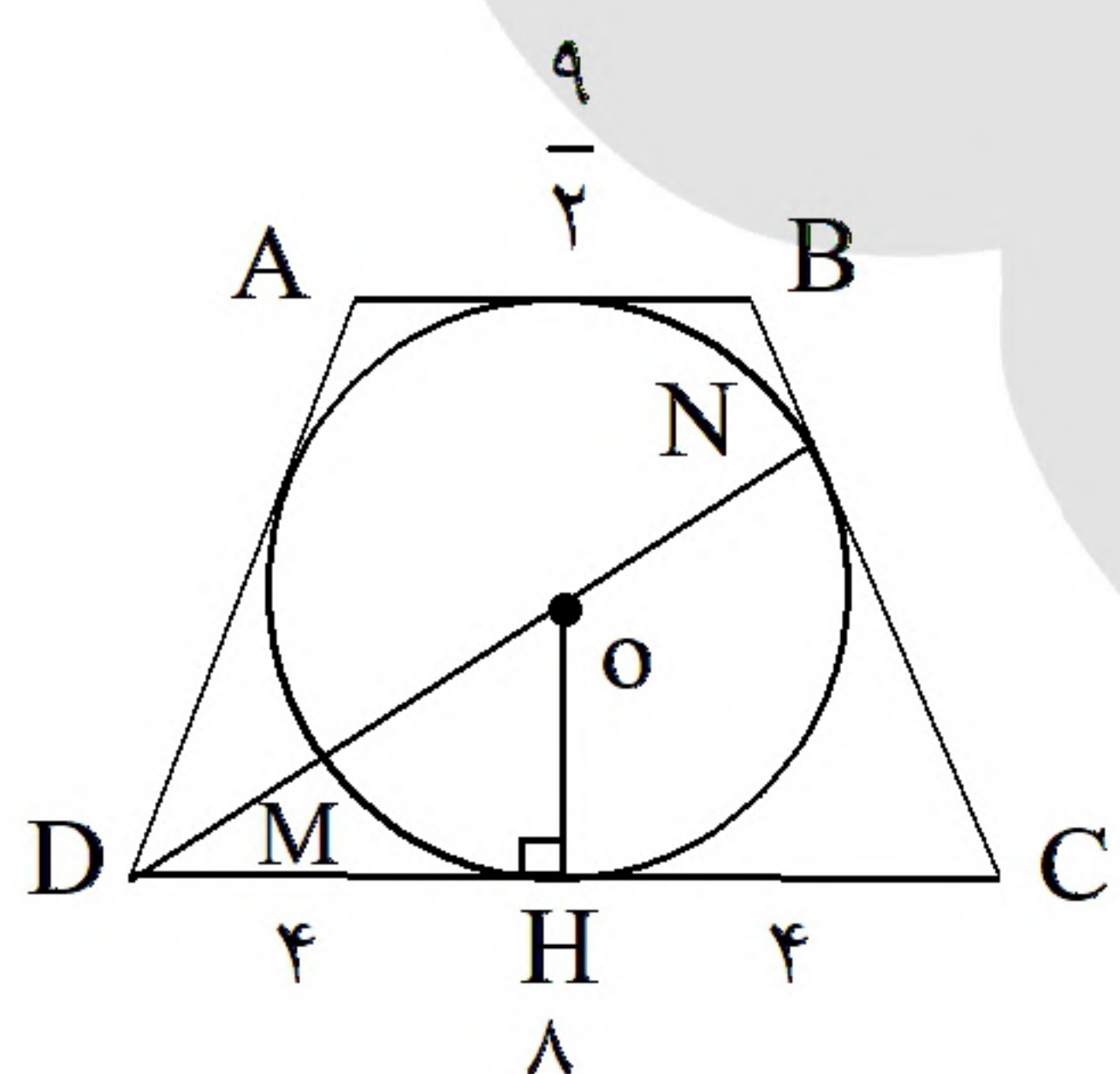
$$O'M \parallel BD \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{O'A}{O'D} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{rR}{R} = r \Rightarrow MA = rMB \quad (2)$$

$$۲, ۱ \text{ از } \Rightarrow ۳ \text{ MB} \times \text{MB} = \text{MD}^۲ \Rightarrow \sqrt{۳} \text{ MB} = \text{MD}$$

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MD}{MB} = \frac{\sqrt{r} MB}{MB} = \sqrt{r}$$

بنابر این:

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین محیطی حاصل ضرب دو قاعده مساوی مربع قطر دایره‌ی محاطی است. اگر R شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه داریم:



$$AB \times DC = rR^r \Rightarrow \frac{q}{r} \times \wedge = rR^r$$

$$\Rightarrow R^r = q \Rightarrow R = r$$

حال از مرکز O به رأس D وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های M و N قطع کند. در این صورت طول پاره‌خط DM نزدیک‌ترین و طول پاره‌خط DN دورترین فاصله‌ی نقاط دایره تا رأس D هستند. مسلماً $DN = DO + R$. برای به دست آوردن DO در مثلث قائم‌الزاویه ODH می‌نویسیم:

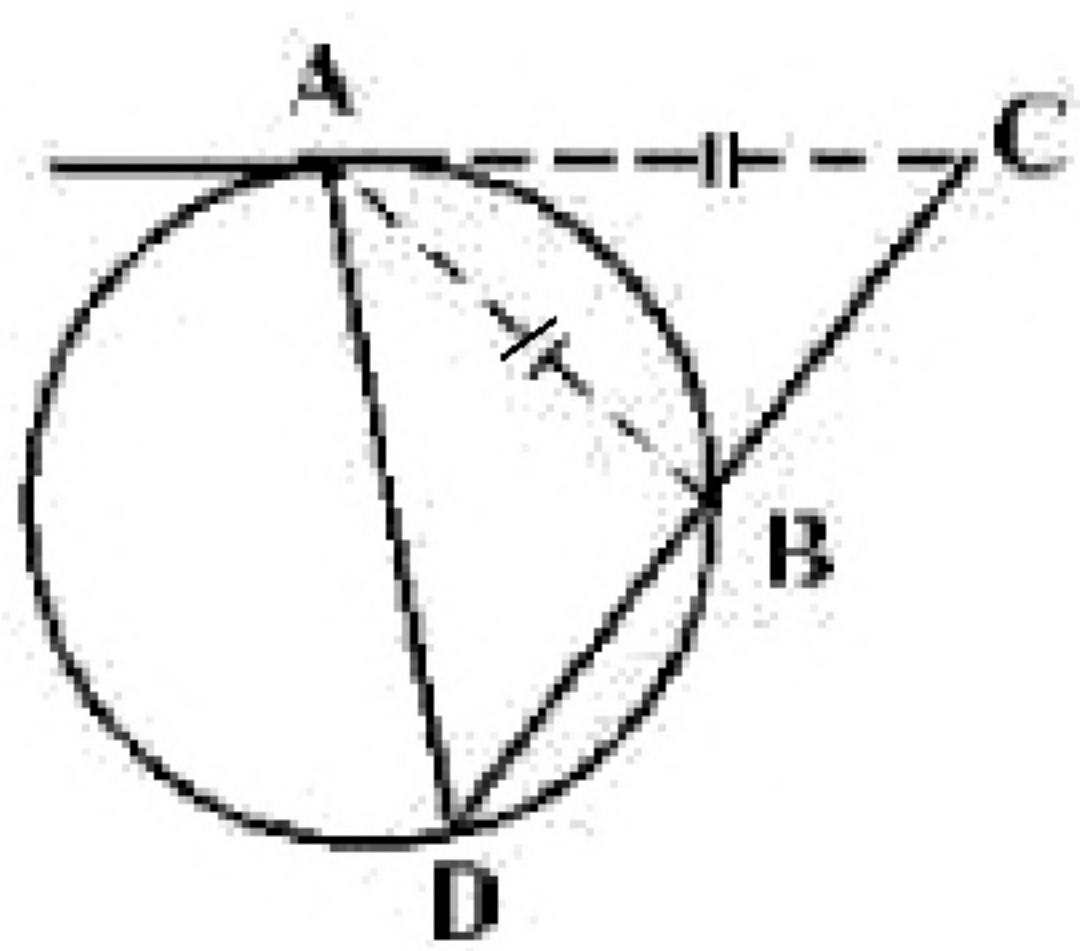
$$OD^{\gamma} = OH^{\gamma} + DH^{\gamma} = 3^{\gamma} + 4^{\gamma} = 25 \Rightarrow OD = 5$$

$$D = OD + R = 5 + 3 = 8$$

بنابر این:



۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر رابطه‌ی طولی تساوی $CA^2 = CB \times CD$ برقرار است و بنابر قضیه‌ی استوارت در مثلث ADC می‌نویسیم:



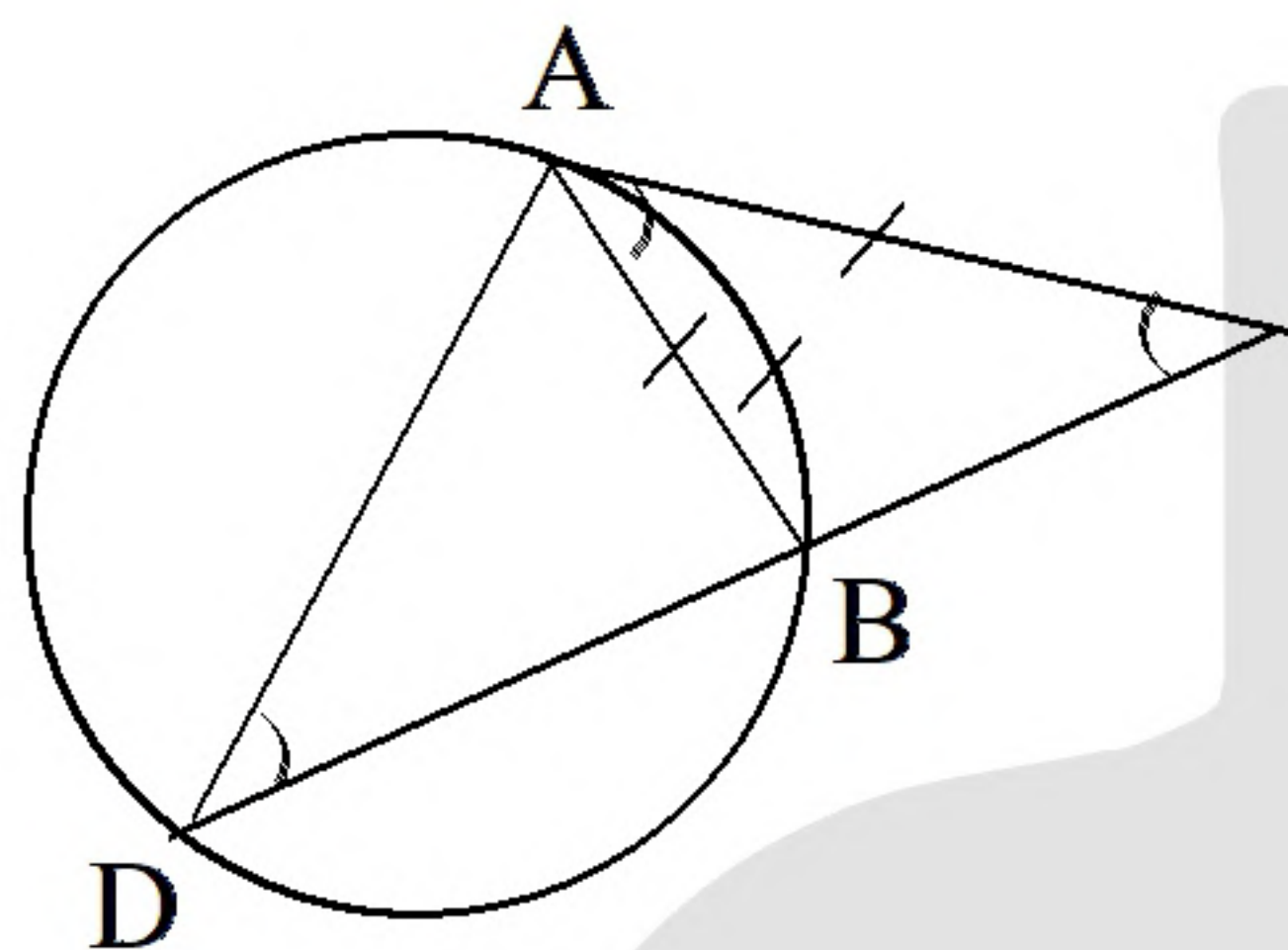
$$AC^2 \times BD + AD^2 \times BC = AB^2 \times DC + BD \times BC \times DC$$

$$\frac{AC^2 = CB \times CD}{AB = AC} \rightarrow CB \times \cancel{CD} \times BD + AD^2 \times BC$$

$$= CB \times CD \times DC + BD \times \cancel{BC} \times DC \Rightarrow AD^2 \times BC$$

$$= CB \times CD \times CD \Rightarrow AD^2 = CD^2 \Rightarrow AD = CD$$

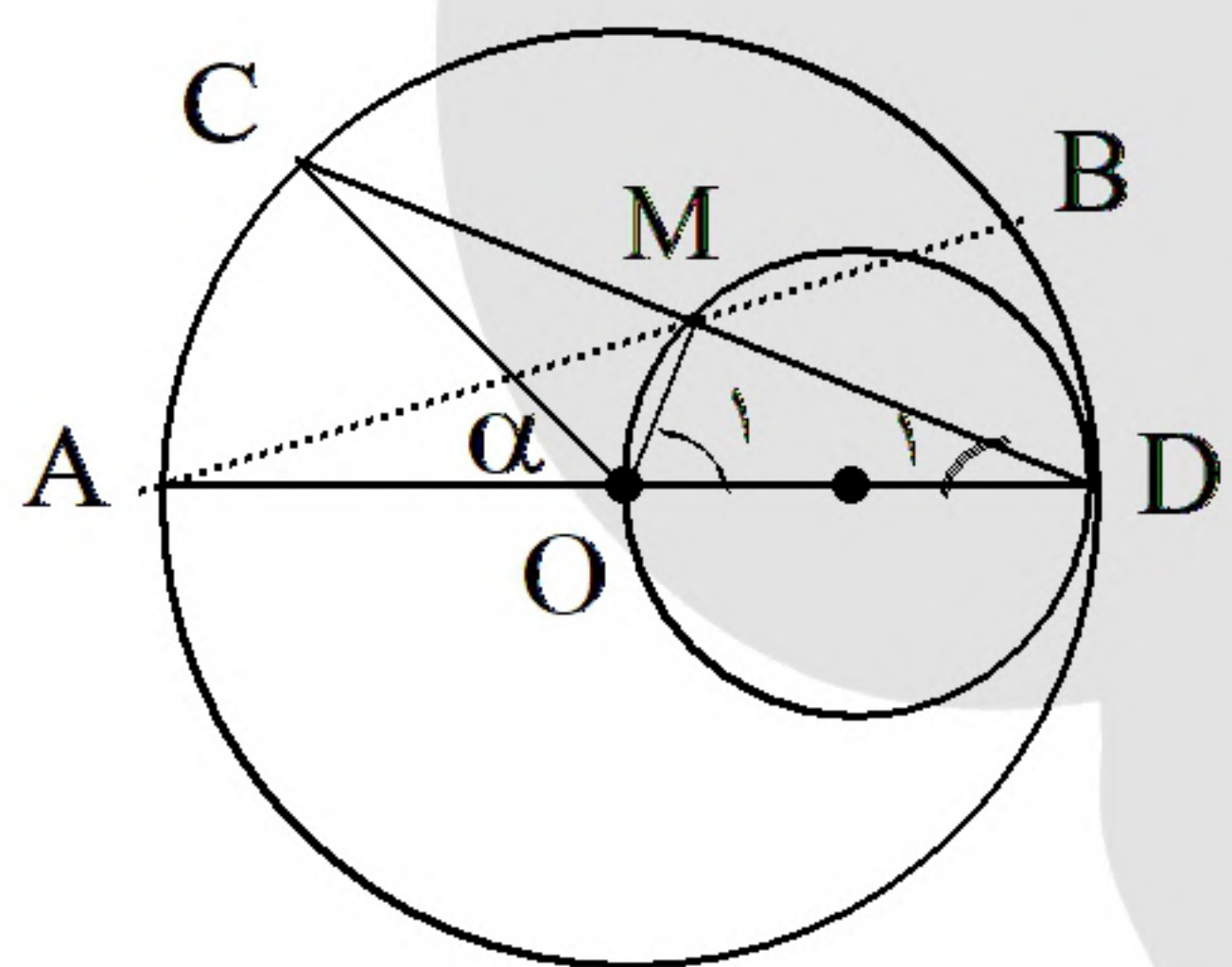
راه حل دوم: دو زاویه‌ی ظلّی A_1 و زاویه‌ی محاطی D برابرند زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{AB} \text{ ظلّی} \\ \widehat{D} = \widehat{AB} \text{ محاطی} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \widehat{A_1} = \widehat{D} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(ز ز)} \triangle ABC \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC} \xrightarrow{AB = AC} AD = DC$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. توجه کنید که شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر قطر دایره‌ی کوچک‌تر است پس اگر OM را رسم کنیم آن‌گاه زاویه‌ی M قائمه است. پس عمود OM وتر CD را نصف می‌کند یعنی $CM = MD$. حال بنابر رابطه‌ی طولی در دایره می‌نویسیم:



$$MA \times MB = MC \times MD \xrightarrow{MC = MD} MA \times MB = MD^2 \quad (1)$$

در ضمن طول کمان AC از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\text{طول کمان AC} = \frac{\alpha}{360} (2\pi R) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} = \frac{\alpha}{360} 2\pi \times 4 \Rightarrow \alpha = 60 \Rightarrow \widehat{AC} = 60^\circ$$

بنابراین $\widehat{D_1} = 30^\circ$ پس $\widehat{O_1} = 60^\circ$.

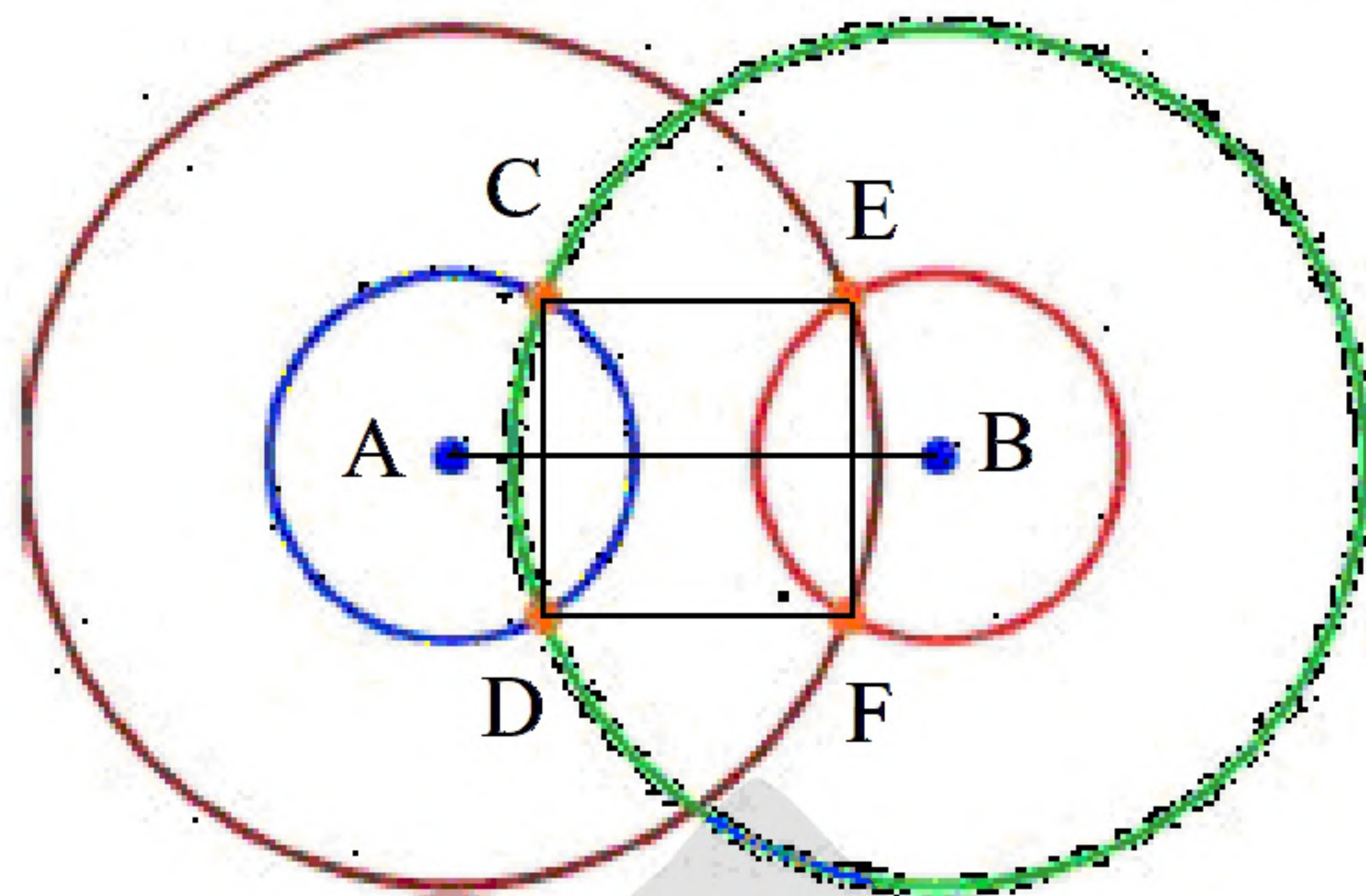
$$\triangle OMD : \widehat{O_1} = 60^\circ \Rightarrow MD = \frac{\sqrt{3}}{2} OD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow MA \times MB = MD^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$$

در نتیجه:

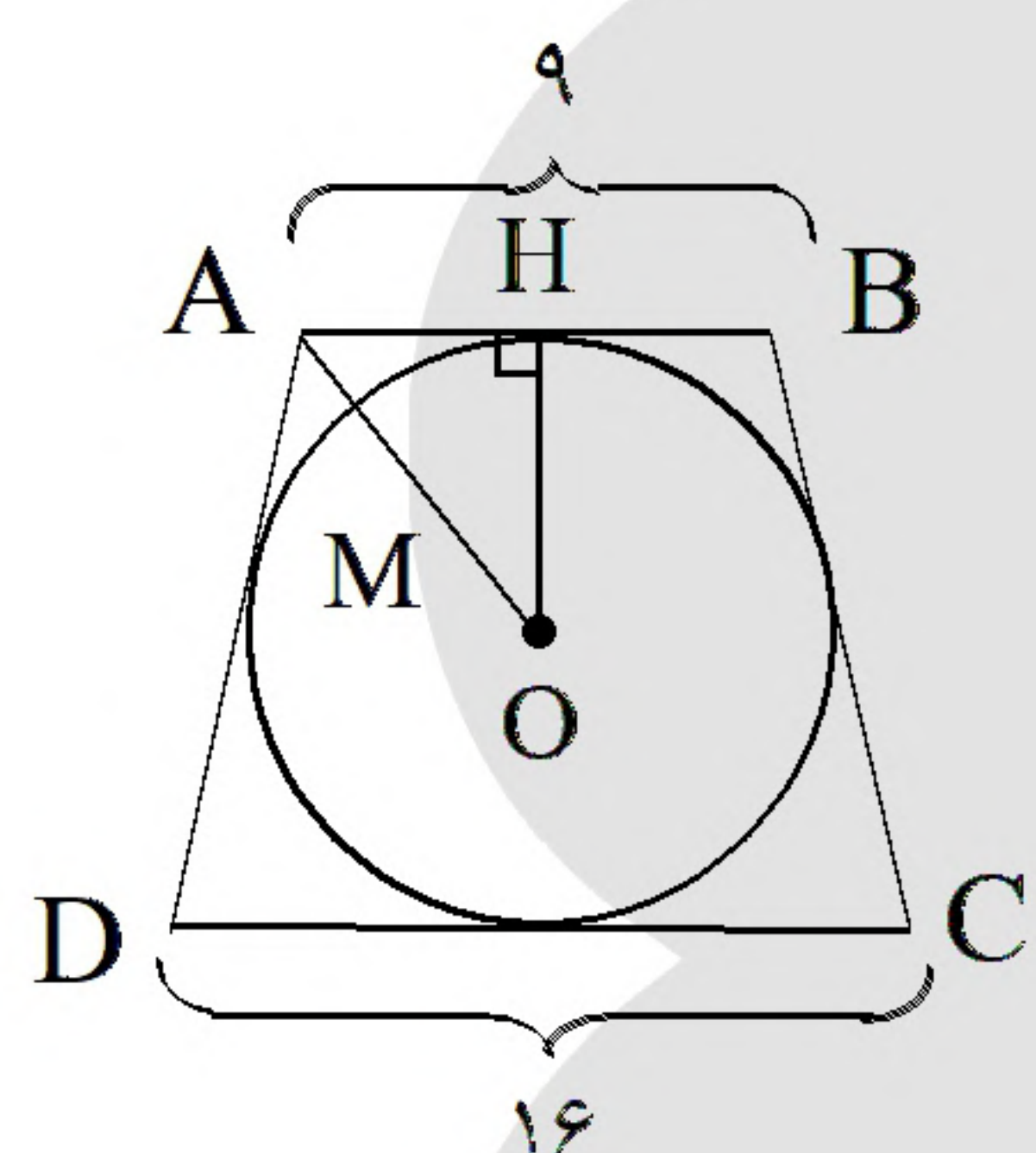


۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل رسم شده، وتر مشترک‌های EF و CD بر خط‌المرکزین AB عمود هستند و $CD = EF$ بنابراین چهارضلعی CEFD مستطیل است.



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از مرکز O دایره‌ی محاطی به رأس A وصل می‌کنیم تا دایره را در M قطع کند. آن‌گاه طول پاره‌خط AM نزدیک‌ترین نقاط دایره تا رأس قاعده‌ی کوچک دوزنقه است.

اگر شعاع دایره محاطی باشد آن‌گاه $4R^2 = AB \times DC$ پس $4R^2 = 9 \times 16$ در نتیجه $R^2 = 36$ پس $R = 6$. حال در مثل قائم‌الزاویه OAH می‌توان نوشت:



$$\left. \begin{aligned} AH &= \frac{AB}{2} = \frac{9}{2} \\ OH &= R = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow OA^2 = OH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow OA^2 = 36 + \frac{81}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow OA = \frac{15}{2}$$

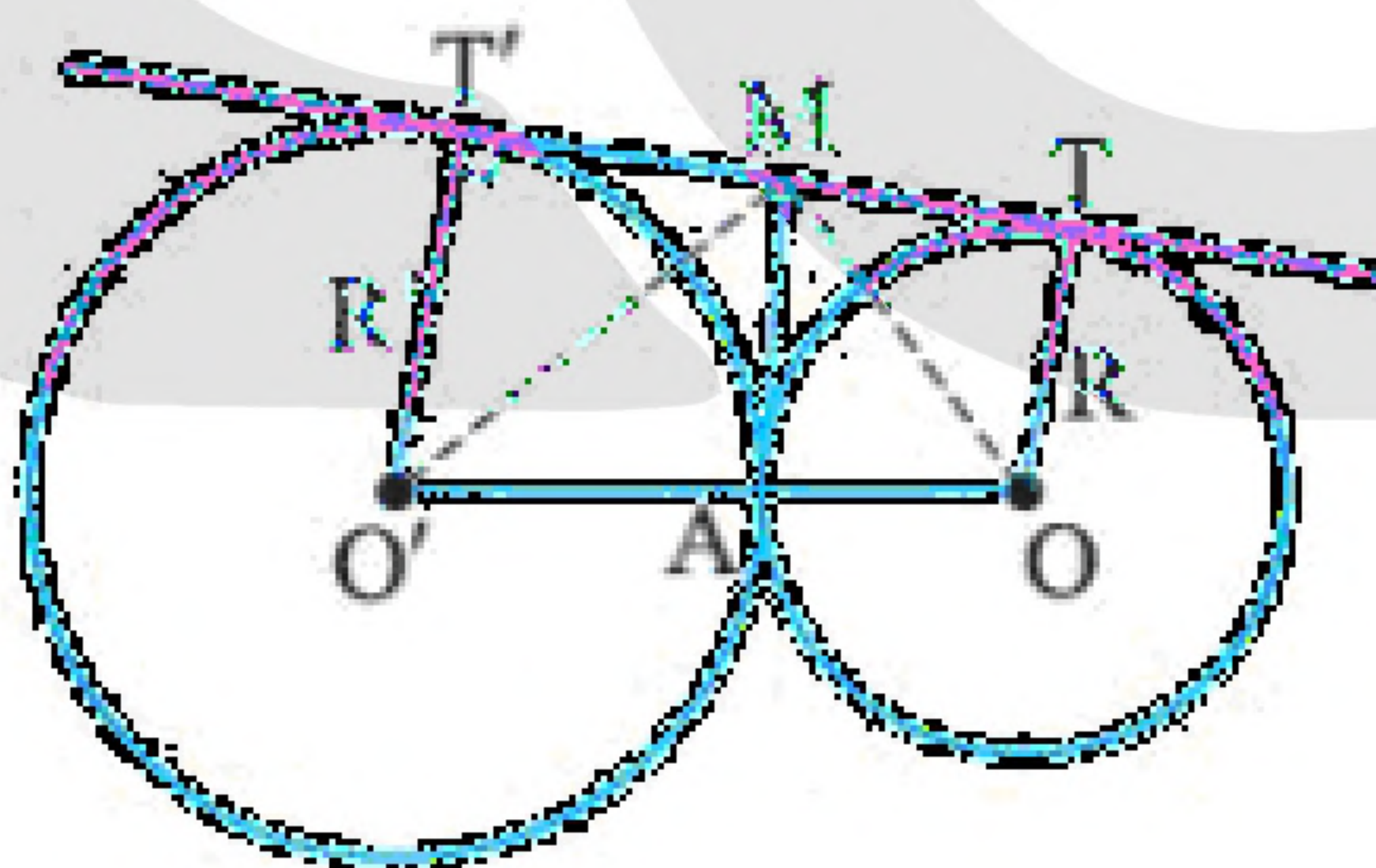
$$AM = OA - OM = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$$

بنابراین:

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{13^2 - (9 - 4)^2} = 12$$

مماس مشترک خارجی TT'



اگر مماس مشترک داخلی دو دایره، مماس مشترک خارجی را در M قطع کند، آن‌گاه O'M نیمساز $\widehat{T'MA}$ و OM نیز نیمساز \widehat{TMA} است، پس $\widehat{O'MO} = 90^\circ$ است. اگر دایره‌ای به قطر OO' رسم شود از M همان نقطه مطلوب است. از طرفی:

$$MA = MT' = MT = \frac{TT'}{2} = 6$$

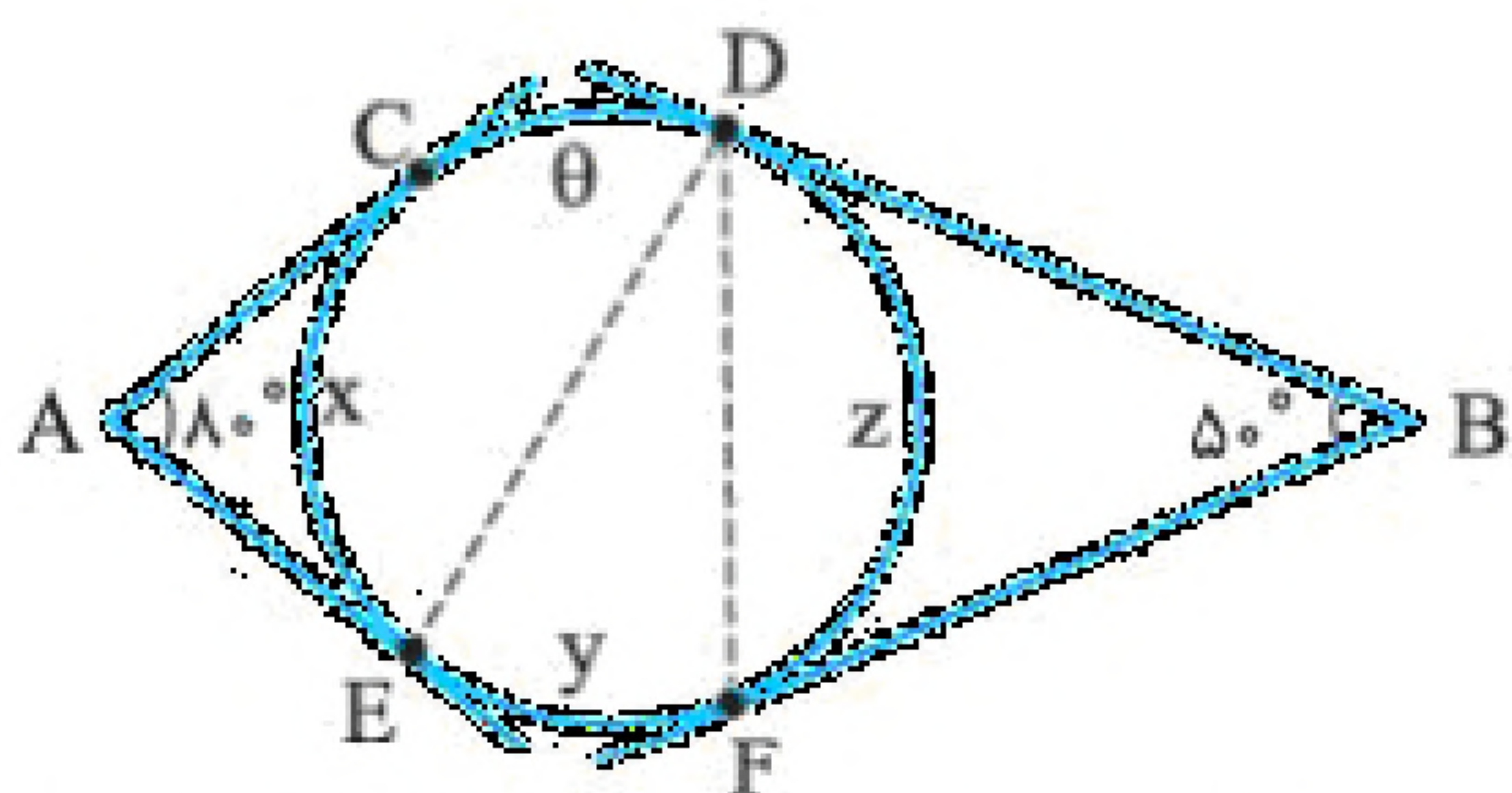


۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر کمان \widehat{CD} برابر θ باشد، آن گاه:

$$CD = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow R = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 30^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$



$$\hat{A} = \frac{(\theta + z + y) - x}{2} \Rightarrow 180^\circ = \frac{60^\circ + z + y - x}{2} \Rightarrow z + y - x = 100^\circ \quad (1)$$

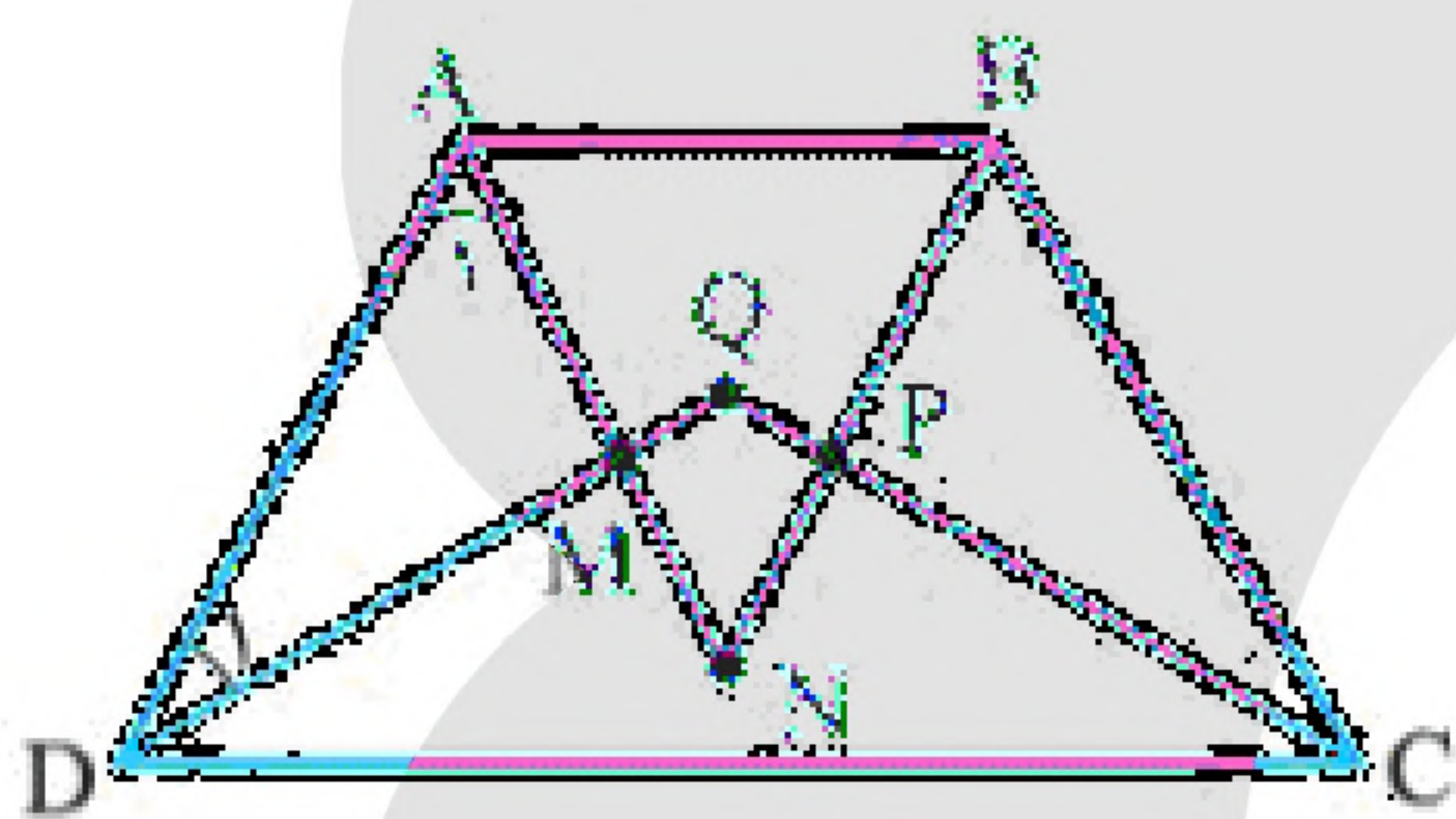
$$\hat{B} = \frac{(\theta + x + y) - z}{2} \Rightarrow 50^\circ = \frac{60^\circ + x + y - z}{2} \Rightarrow x + y - z = 40^\circ \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2y = 140^\circ \Rightarrow y = 70^\circ$$

$$\widehat{EDF} = \frac{y}{2} = 35^\circ$$

زاویه EDF محاطی است و برابر با نصف کمان مقابلش است. پس:

۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\hat{A} + \hat{D} = 180^\circ$$

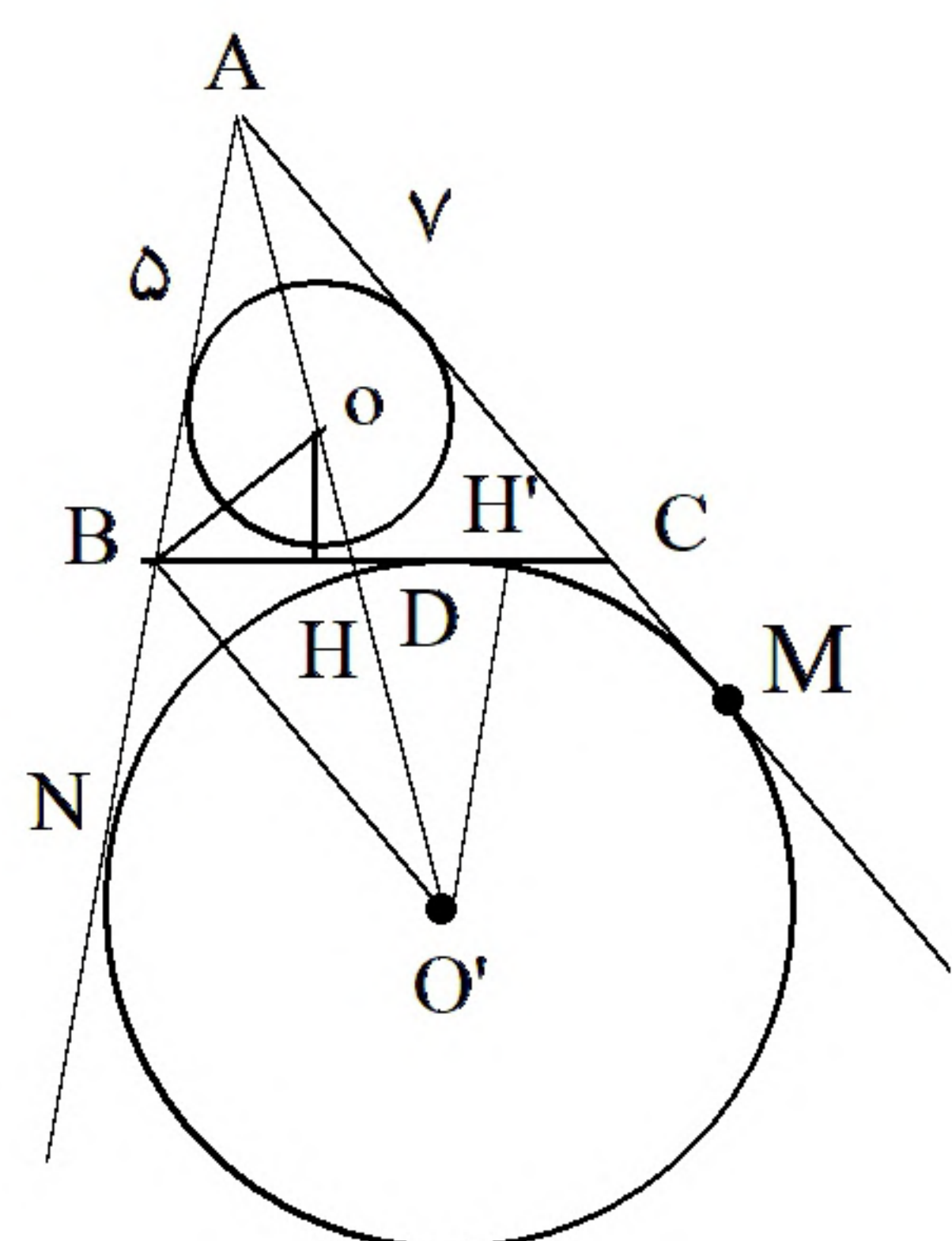
$$\Rightarrow \hat{A}_1 + \hat{D}_1 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{M} = 90^\circ$$

به صورت مشابه $\hat{P} = 90^\circ$ و چون مجموع دو زاویه مقابل در چهارضلعی MNPQ برابر 180° است، پس این چهارضلعی محاطی است.

از طرفی مثلث‌های ABN و DQC متساوی الساقین و دو مثلث AMD و BPC هم‌نهشت هستند، پس:
 $MN = NP$ و $MQ = QP$

در نتیجه $MQ + NP = QP + MN$ ، یعنی در چهارضلعی MNPQ مجموع دو ضلع مقابل، برابر با مجموع دو ضلع دیگر است، پس این چهارضلعی محیطی است. در نتیجه چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی است.



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که O مرکز دایره محاطی داخلی و O' مرکز دایره محاطی خارجی نظیر ضلع BC است. طول HH' که تصویر قائم OO' روی ضلع BC است را باید به دست آوریم. می‌دانیم که P نصف محیط مثلث ABC برابر ۱۰ است. پس:

$$BH = P - AC = 10 - 7 = 3$$

$$AM = P = 10 \Rightarrow CM = P - AC = 3$$

در ضمن $CM = CH'$ پس $CH' = 3$ بنابراین:

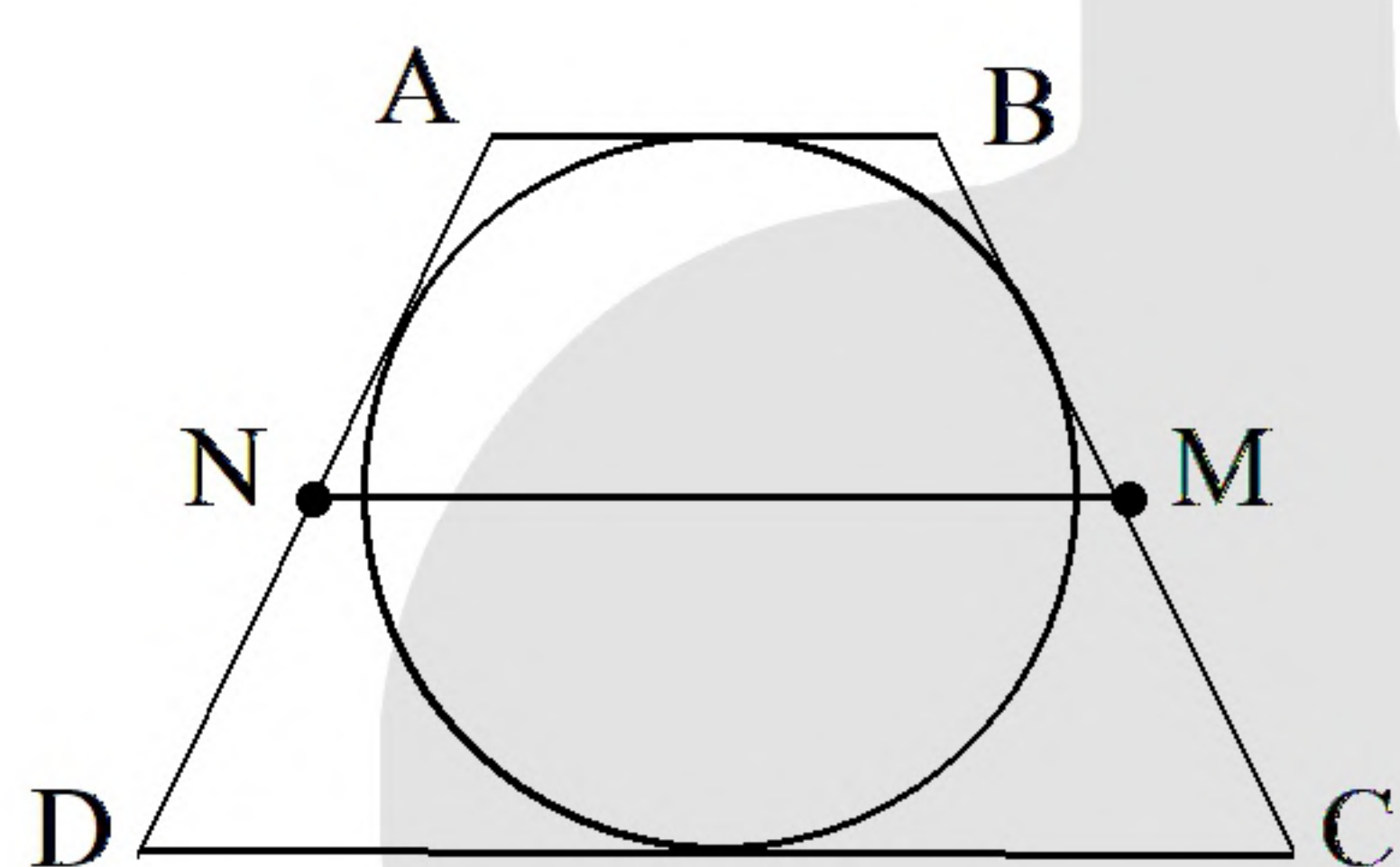
$$HH' = BC - BH - CH' \Rightarrow HH' = 8 - 3 - 3 = 2$$



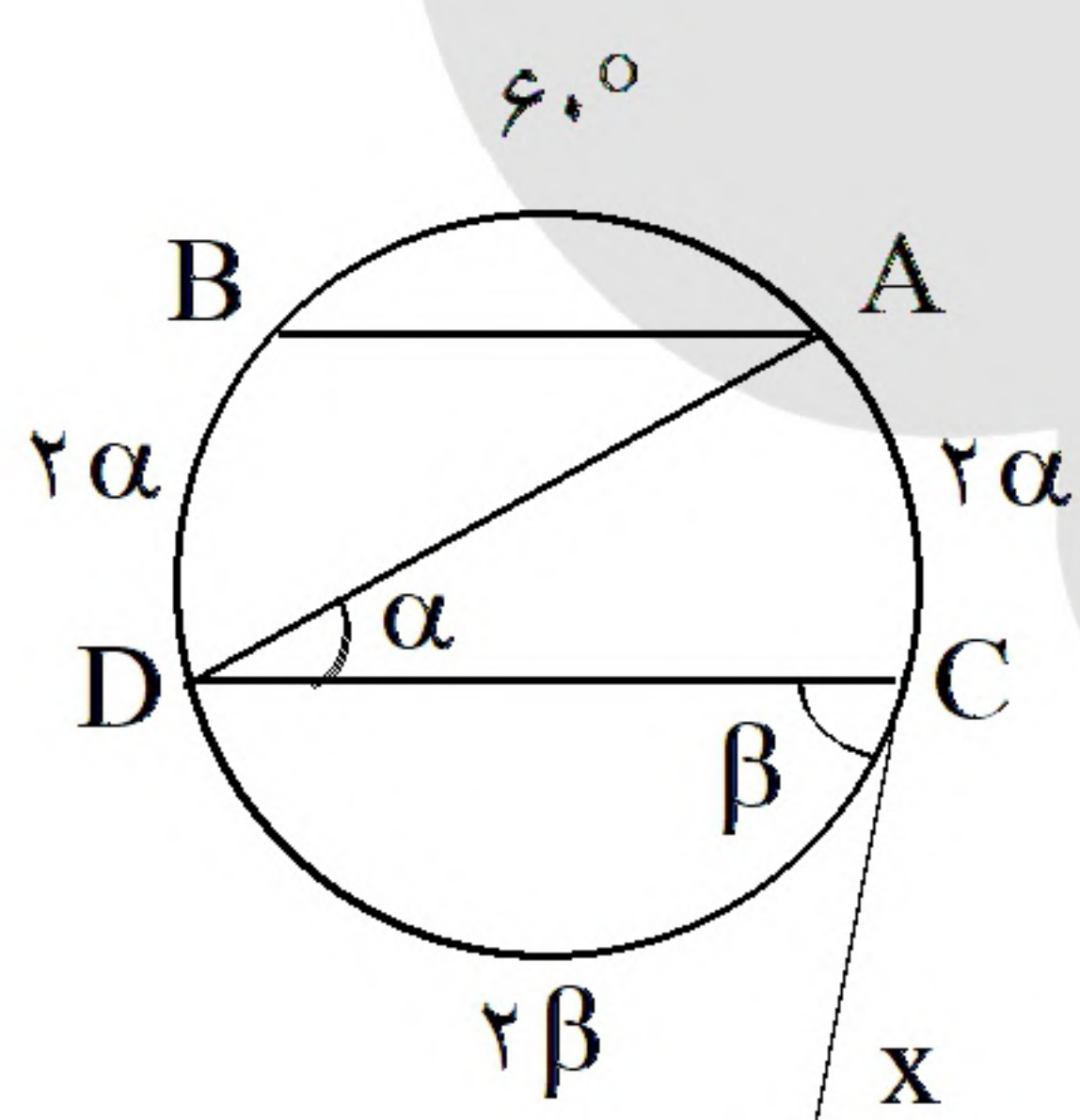
۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو n ضلعی منتظم محاط و محیط بر دایره به شعاع R متشابه‌اند و نسبت تشابه آنها مساوی $\cos \frac{2180}{n}$ است پس:

$$\frac{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محاطی}}{\text{مساحت شش ضلعی منتظم محیطی}} = \cos \frac{2180}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{S} = \frac{3}{4} \Rightarrow S = 8\sqrt{3}$$

پس مساحت شش ضلعی منتظم محیطی ۸ برابر $\sqrt{3}$ است.



۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین ABCD محیطی است پس $AB + DC = AD + BC$ چون $AD = BC$ در نتیجه $AB + DC = 2BC$. در ضمن اگر نقاط M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه باشد آنگاه بنابر قضیه‌ی میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB + DC}{2}$. پس نتیجه می‌گیریم $MN = BC$.



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر از مرکز دایره به نقاط A و B وصل کنیم آنگاه مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است پس اندازه‌ی کمان AB برابر 60° است. از طرف دیگر می‌دانیم کمان‌های بین دو وتر موازی مساویند پس $\widehat{AC} = \widehat{BD}$. در ضمن زاویه‌ی DCx ظلی است پس $\widehat{DC} = 2\beta$ در نتیجه:

$$\widehat{AC} + \widehat{BD} + \widehat{DC} + \widehat{AB} = 360^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\alpha + 2\beta + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\xrightarrow{\beta = 2\alpha} 8\alpha = 300^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{300^\circ}{8}$$

$$\widehat{BD} = 2\alpha = 2\left(\frac{300^\circ}{8}\right) = \frac{300^\circ}{4} = 75^\circ$$

پس: