

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

از دوران نیم‌دایره حول d یک کره و از دوران مستطیل حول d یک استوانه ایجاد می‌شود. اگر O مرکز کره باشد، آنگاه طول OH برابر با نصف طول ارتفاع استوانه یعنی $\frac{16}{2} = 8$ خواهد بود.

پس داریم:

$$\triangle OAH : OA^2 = AH^2 + OH^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow OA = 10$$

بنابراین شعاع کره برابر ۱۰ است، در نتیجه:

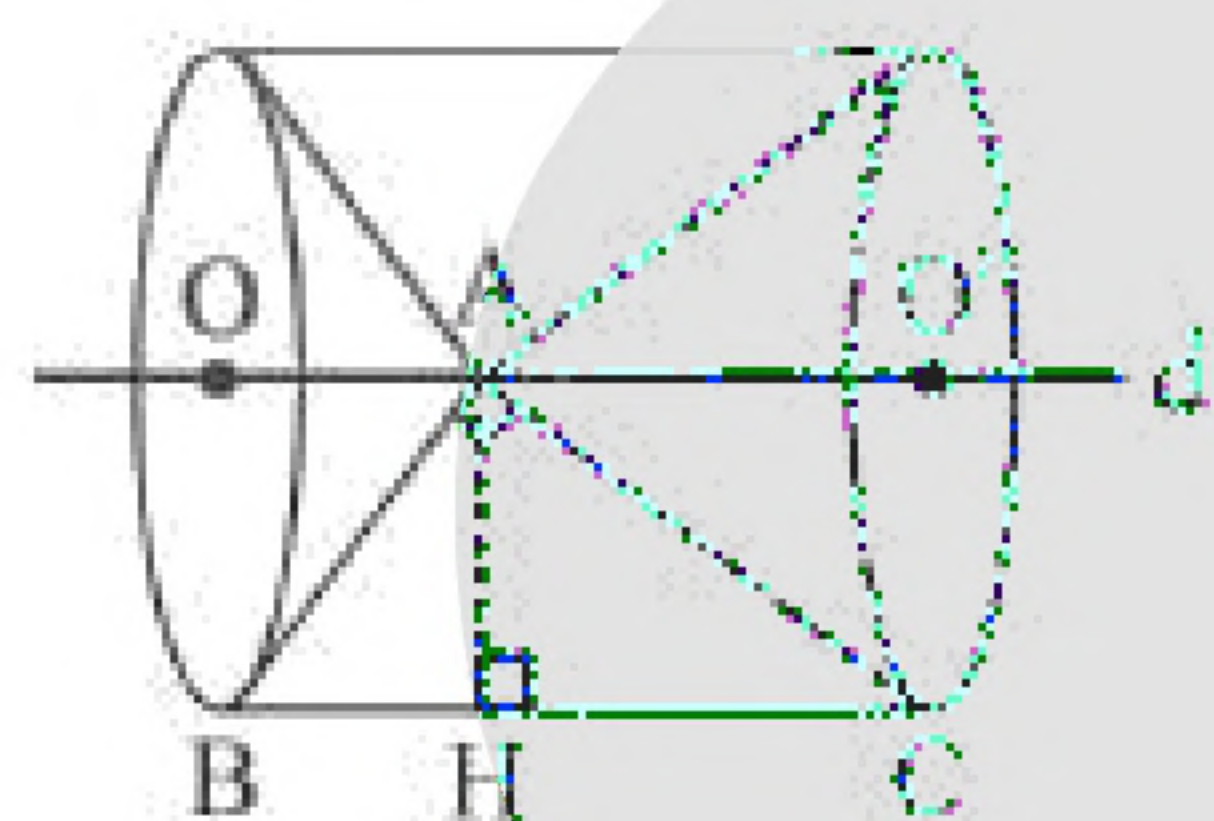
$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (10)^3 = 4000$$

$$\text{حجم استوانه} = \pi r^2 h = (\pi)(6)^2(16) = 1728$$

$$\text{حجم شکل خواسته شده} = 4000 - 1728 = 2272$$

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است زیرا $5^2 = 4^2 + 3^2$ و فیثاغورس برقرار است. مطابق شکل از دوران مثلث ABC حول خط d ، یک استوانه که دو مخروط از آن جدا شده ایجاد می‌شود. طول ارتفاع AH برابر با طول شعاع قاعده دو مخروط و استوانه است، بنابراین:



(حجم مخروط دوم + حجم مخروط اول) - حجم استوانه = حجم خواسته شده

$$\text{حجم خواسته شده} = \pi(AH)^2(OO') - \left(\frac{1}{3}\pi(AH)^2(AO) + \frac{1}{3}\pi(AH)^2(AO') \right)$$

$$= \pi(AH)^2(OO') - \left(\frac{1}{3}\pi(AH)^2(OO') \right) = \frac{2}{3}\pi(AH)^2(OO')$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

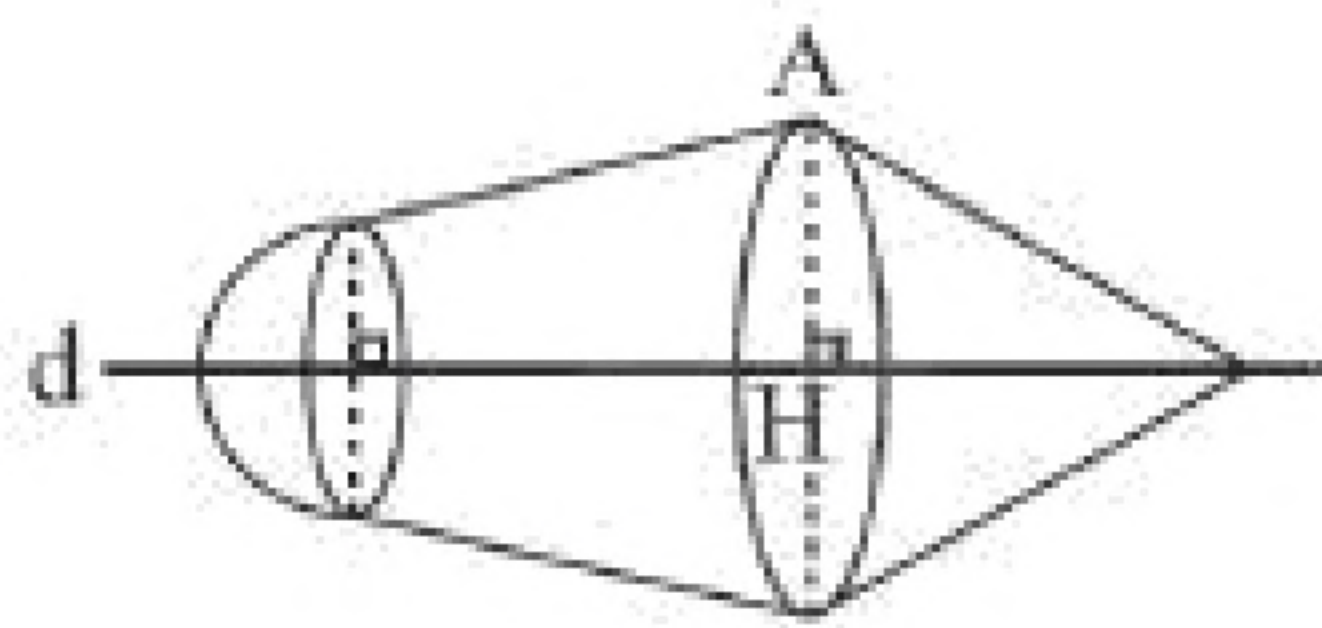
$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

پس:

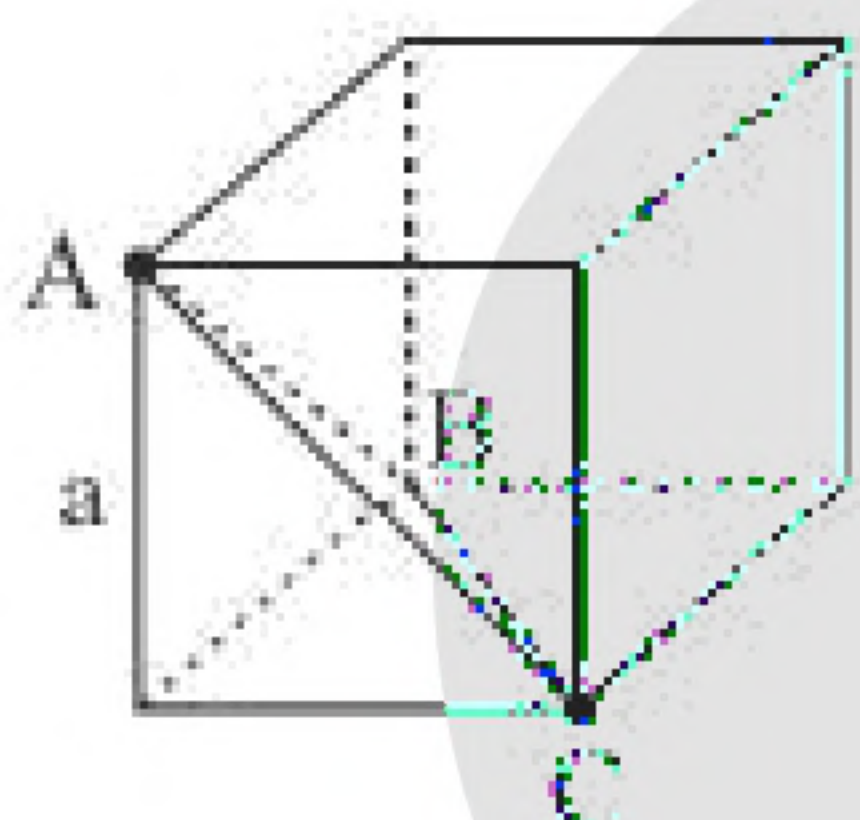
$$\text{حجم خواسته شده} = \frac{2}{3}\pi \left(\frac{12}{5} \right)^2 \times 5 = \frac{2}{3}\pi \times \left(\frac{12 \times 12}{5 \times 5} \right) (5) = \frac{96}{5}\pi$$



- ۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
AH را عمود بر d رسم می‌کنیم. همان‌طور که دیده می‌شود شکل حاصل از دوران، یک مخروط ناقص و یک نیم‌کره است.



- ۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
مقطع حاصل از صفحه‌گذاری از رأس‌های A، B و C مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است زیرا اگر ضلع مکعب a باشد، آن‌گاه $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع AB برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2$ است بنابراین:



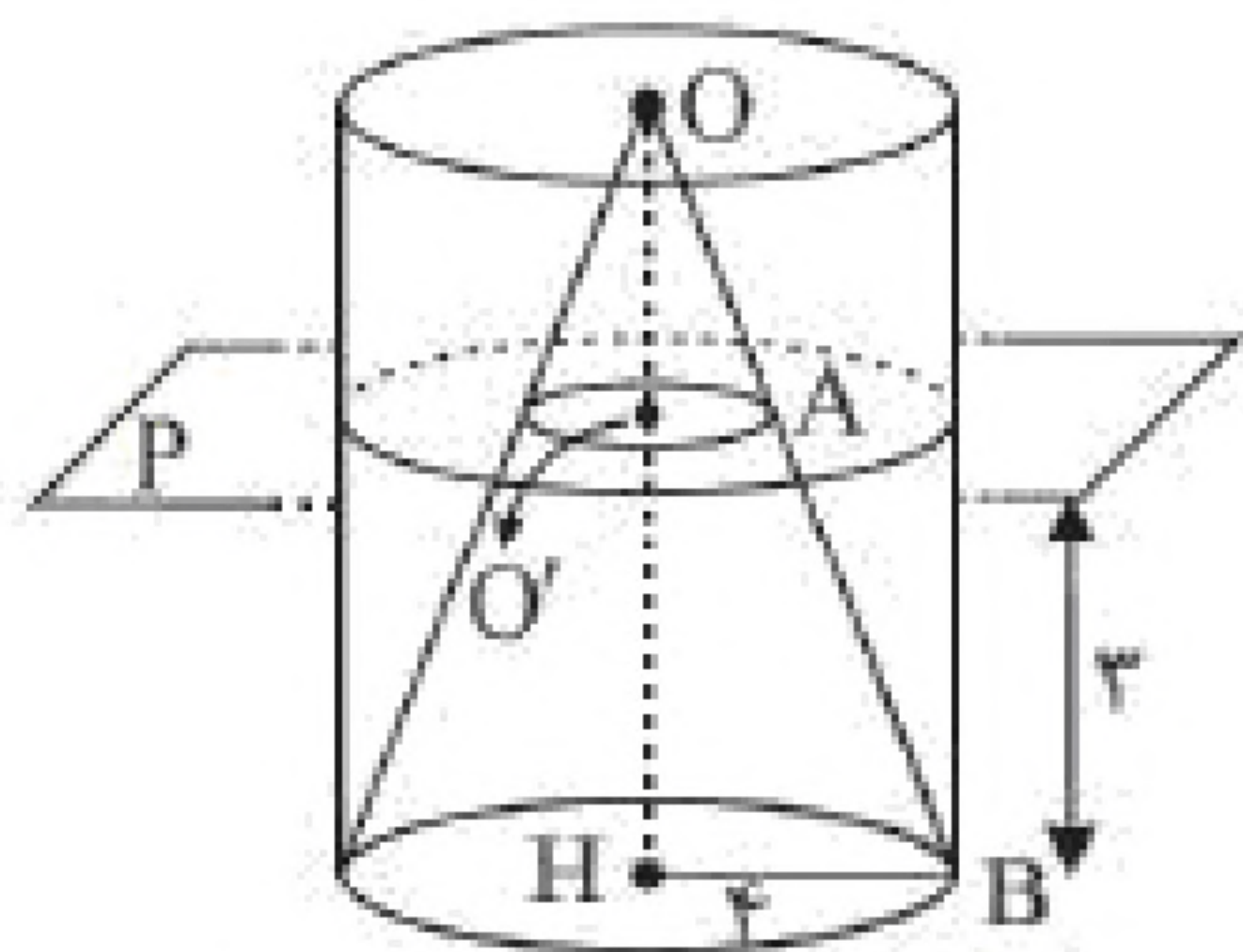
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{12} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 2\sqrt{3}$$

$$AB = a\sqrt{2} \xrightarrow{\quad} \frac{\sqrt{3}}{4}(a\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$$

پس حجم مکعب برابر با $a^3 = 2^3 = 8$ است.



- ۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
مطابق شکل، صفحه P به فاصله ۳ از قاعده مخروط حجم حاصل از حذف مخروط درون استوانه را در دو دایره به شعاع ۴ و OA قطع می‌کند.



برای به دست آوردن مساحت مقطع حاصل باید مساحت‌های این دو دایره را از هم کم کنیم. ابتدا باید شعاع O'A را به دست آوریم:

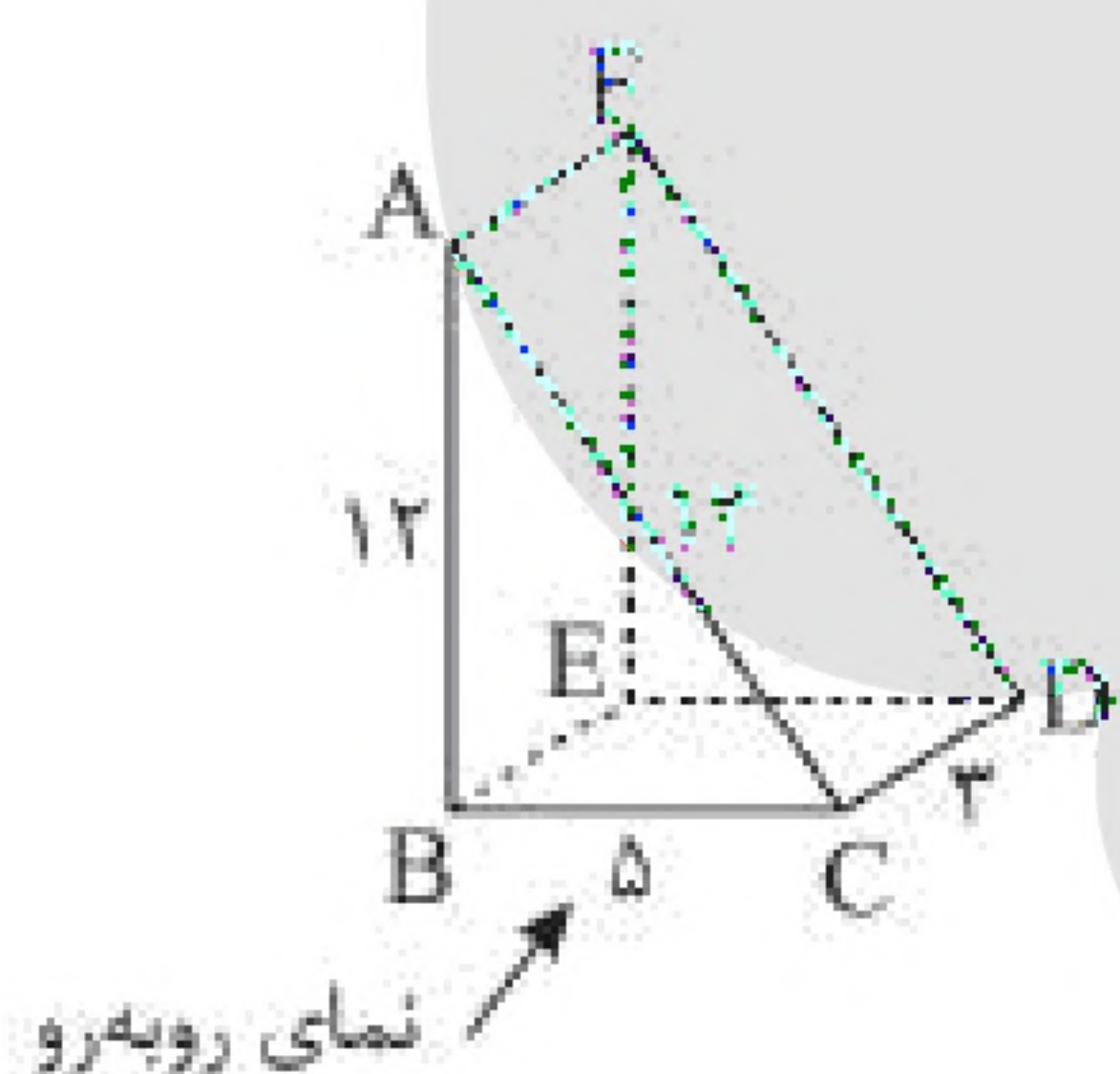
$$\triangle OBH: O'A \parallel HB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OO'}{OH} = \frac{O'A}{HB} \xrightarrow{OO' = 5 - 3 = 2} \frac{2}{5} = \frac{O'A}{4} \Rightarrow O'A = \frac{8}{5}$$

بنابراین:

مساحت دایره به شعاع $\frac{8}{5}$ - (مساحت دایره به شعاع ۴) = مساحت مقطع حاصل

$$= \pi(4)^2 - \pi\left(\frac{8}{5}\right)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{16}{25}\pi$$

- ۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



مثلث ABC قائم‌الزاویه است زیرا $13^2 = 12^2 + 5^2$ و فیثاغورس برقرار است. در ضمن نمای روبه‌روی این منشور مثلث ABC است و نمای بالای آن مستطیل BEDC است، بنابراین:

$$\text{مساحت نمای روبه‌رو} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(5)(12) = 30$$

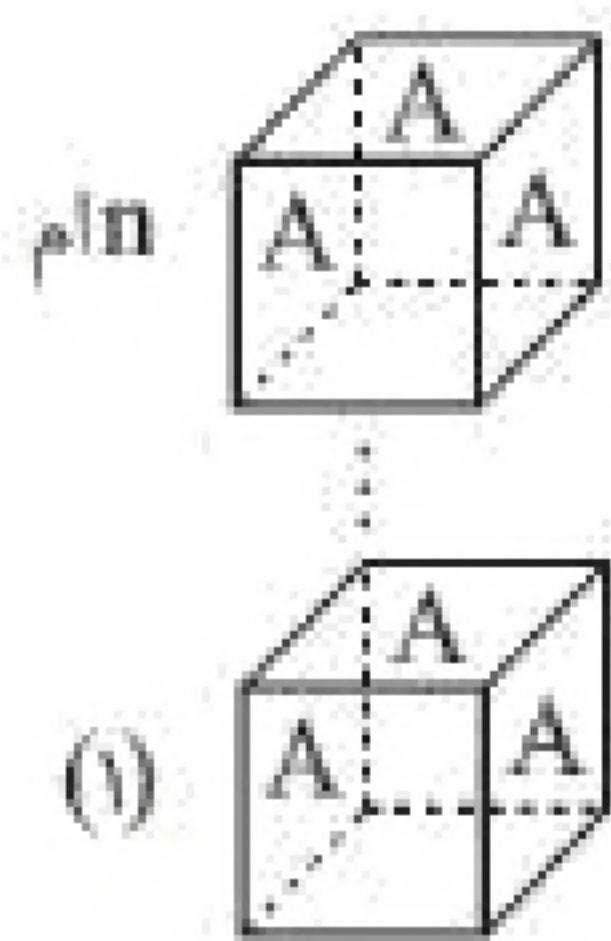
$$\text{مساحت نمای بالا} = S_{BEDC} = 3 \times 5 = 15$$

پس مجموع مساحت‌های نمای بالا و نمای روبه‌رو برابر $45 = 30 + 15$ است.



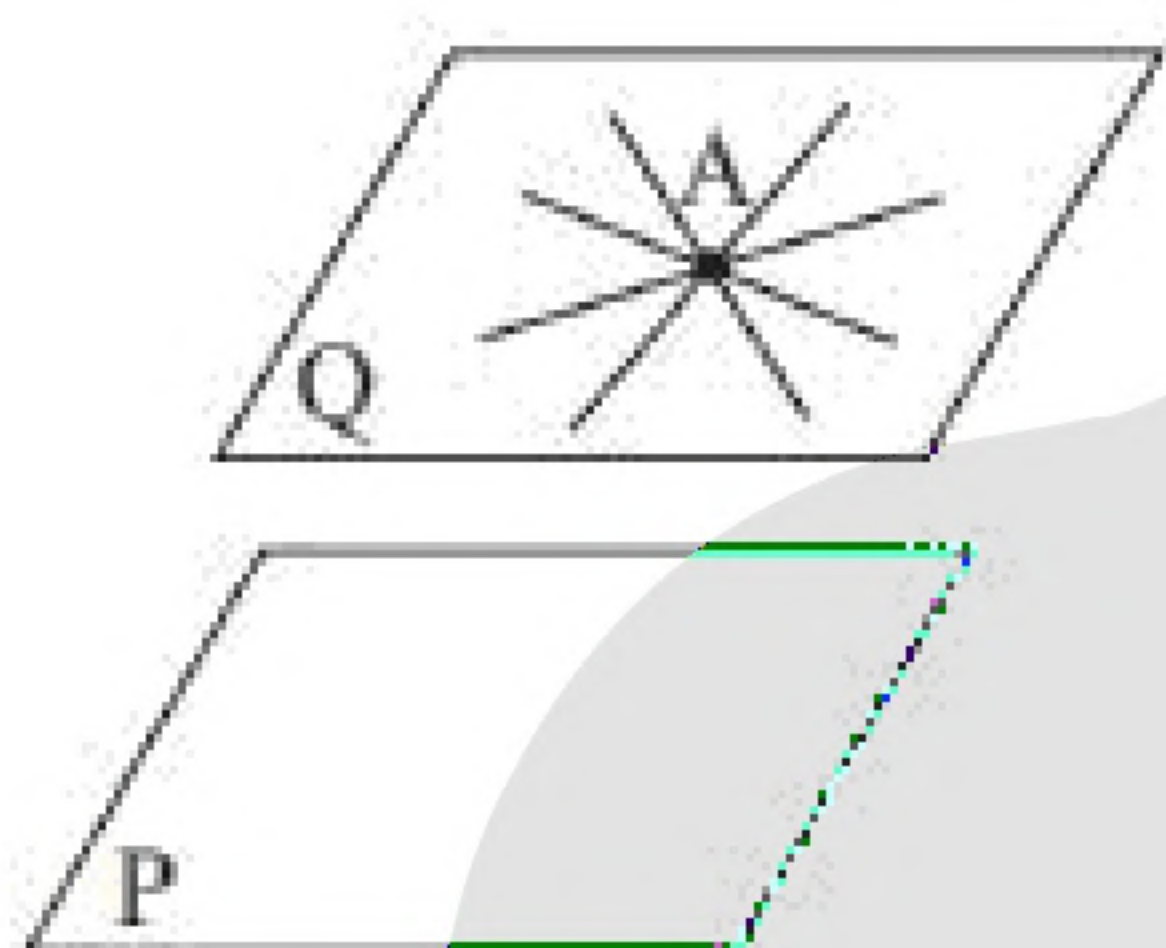
۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون مکعب‌ها به صورت ستونی روی هم چیده شده است و مکعب اولی روی زمین است، پس روی ۴ وجه هر مکعب حرف A دیده می‌شود. تا این‌جا روی $4n$ وجه حرف A دیده می‌شود، اما روی وجه بالایی مکعب n ام هم A دیده می‌شود، پس در کل $4n + 1$ حرف A دیده می‌شود.



۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

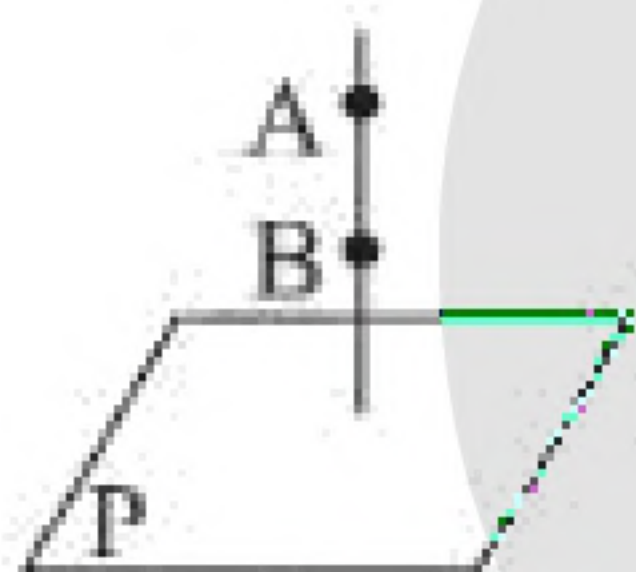
از نقطه A بیرون صفحه P بی‌شمار خط موازی صفحه P و تنها یک صفحه موازی P عبور می‌کند.



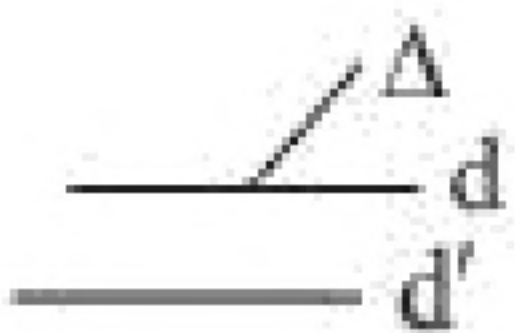
۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): نادرست، زیرا اگر خط گذرنده از دو نقطه A و B بر صفحه P عمود باشد، آن‌گاه از دو نقطه A و B بی‌شمار صفحه عمود بر P می‌گذرد.

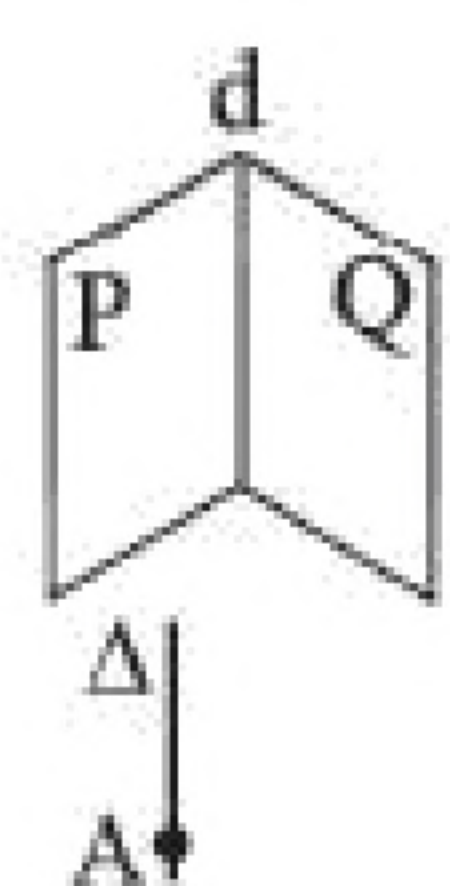


گزینه (۲): نادرست، در فضا نادرست است. در شکل زیر $d \parallel d'$ و Δ خط d را قطع کرده است ولی Δ خط d' را قطع نمی‌کند.



گزینه (۳): نادرست، زیرا اگر صفحه‌ای عمود بر دو خط متنافر وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌دانیم دو خط عمود بر یک صفحه موازی هستند و این خلاف متنافر بودن دو خط است.

گزینه (۴): درست، زیرا از نقطه A بیرون دو صفحه متقاطع P و Q تنها یک خط مثل Δ موازی فصل مشترک دو صفحه P و Q یعنی خط d می‌توان رسم کرد و از Δ بی‌شمار صفحه عبور می‌کند که صفحات P و Q را قطع می‌کنند.



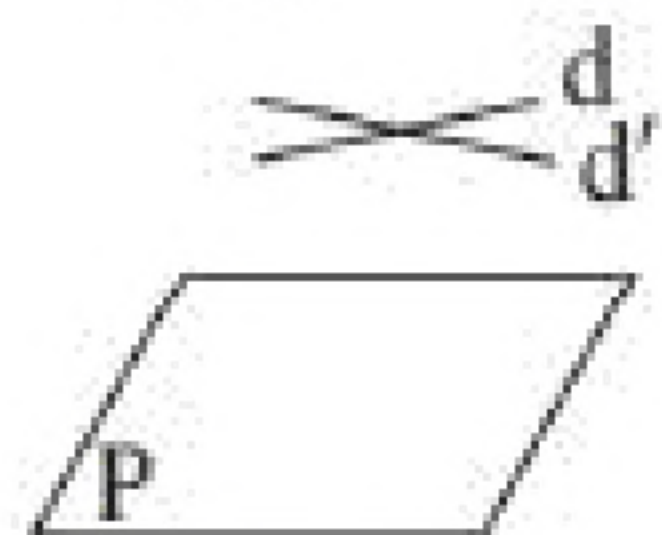


۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

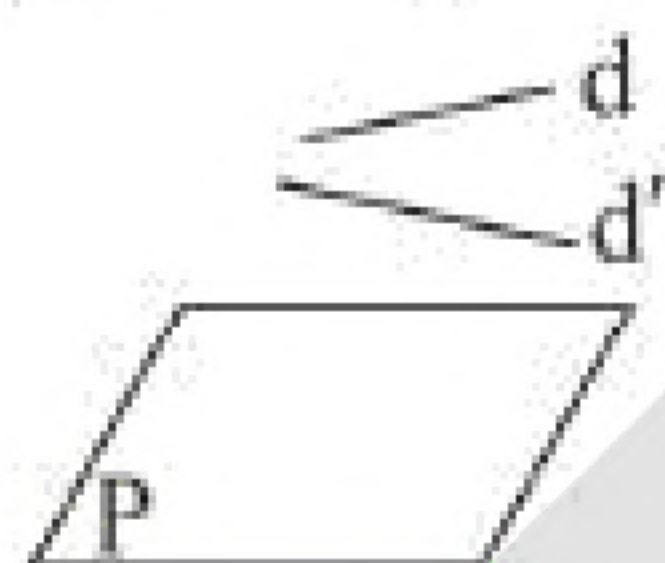
گزاره‌های «ب» و «ج» درست هستند.

بررسی گزاره‌های نادرست:

الف) نادرست زیرا دو خط موازی با یک صفحه، علاوه بر موازی بودن می‌توانند متقاطع یا متنافر باشند.

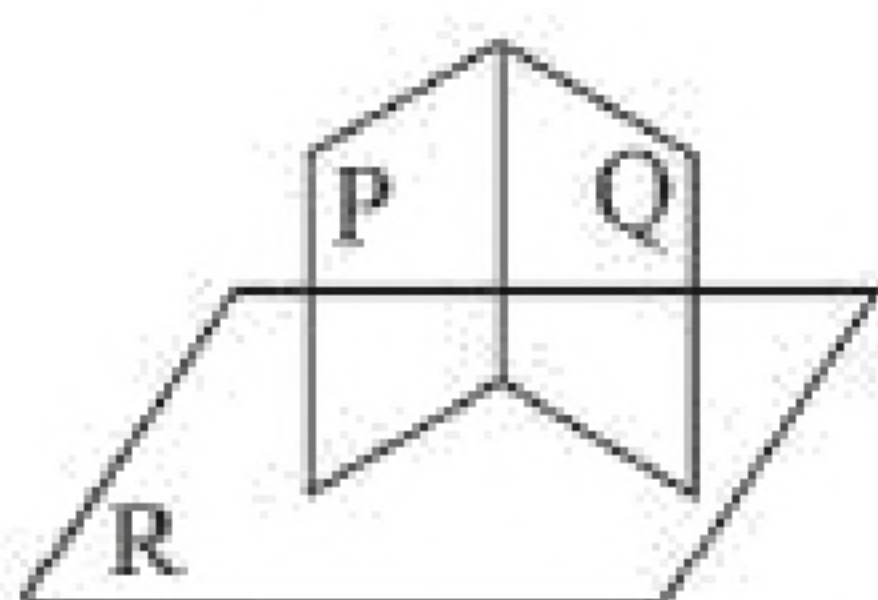


در این شکل دو خط متقاطع d و d' با صفحه P موازی هستند.



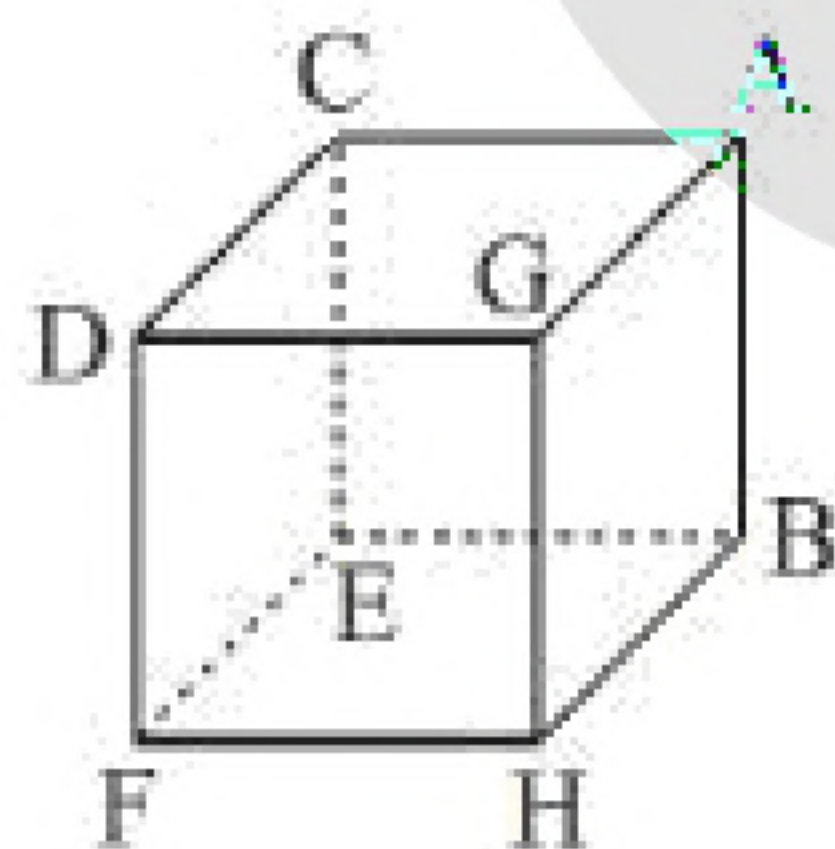
در این شکل دو خط متنافر d و d' با صفحه P موازی هستند.

د) نادرست، در شکل زیر دو صفحه P و Q بر صفحه R عمود هستند ولی موازی نیستند.



۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

یال AB (یک یال مشخص) با وجه‌های بالا و پایین مکعب متقاطع است، پس با دو وجه متقاطع است.

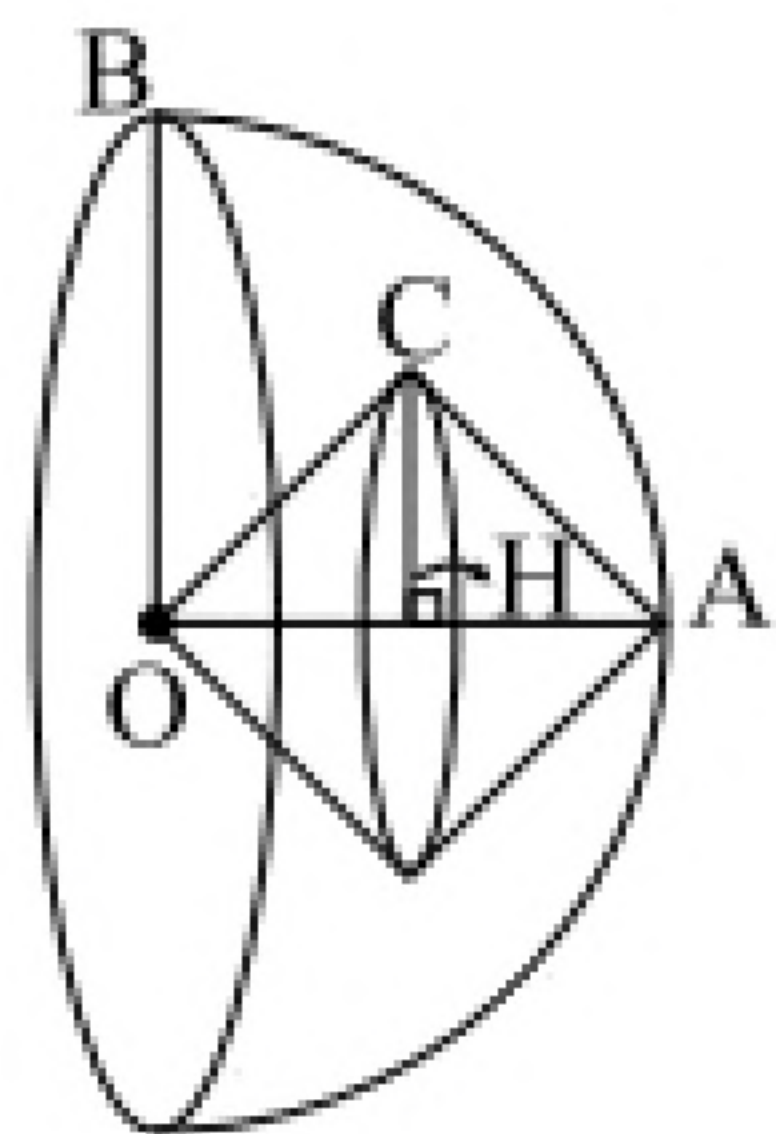


یال AB با یال‌های CD ، EF ، FH و DG متنافر است زیرا یال AB با ۴ یال متنافر است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حجم دوران ایجاد شده یک نیم کره است که از داخل آن دو مخروط به هم چسبیده با حجم برابر جدا می شود.
می دانیم:



$$\text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{حجم نیم کره} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi (6)^3 \quad (1)$$

حجم یک مخروط را حساب می کنیم، بعد ضرب در ۲ می کنیم:

$$\triangle OCH (H = 90^\circ) \xrightarrow[\text{OC} = 6]{\text{OH} = 3} CH = 4$$

$$\text{حجم یک مخروط} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (CH)^2 \times OH = \frac{1}{3}\pi (4)^2 \times 3$$

$$\text{حجم دو مخروط} = \frac{2}{3}\pi (4)^2 (3) \quad (2)$$

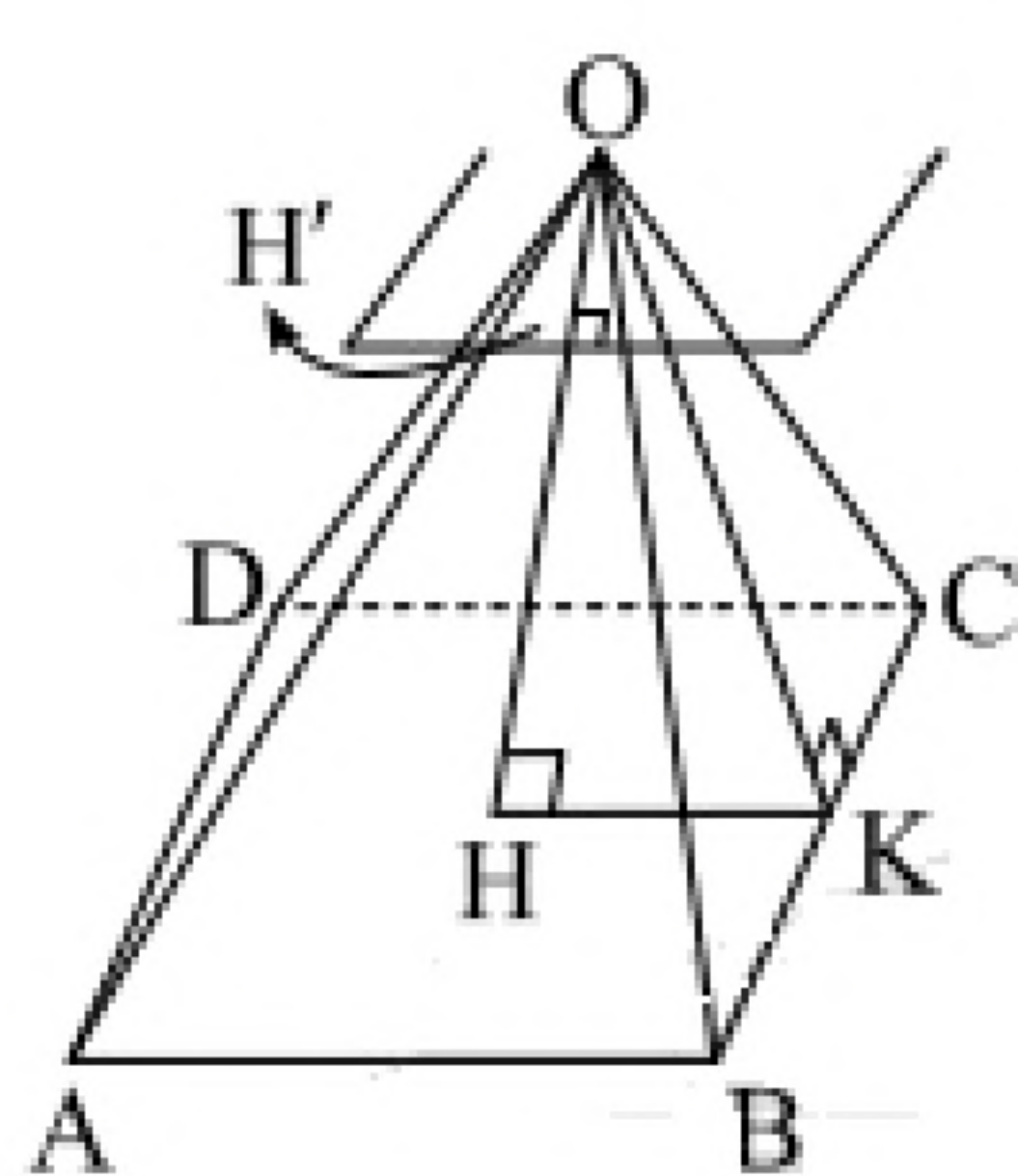
بنابراین حجم شکل ایجاد شده برابر است با:

$$\xrightarrow{(1) - (2)} \frac{2}{3}\pi (6)^3 - \frac{2}{3}\pi (4)^2 \times 3 = \frac{2}{3}\pi (216 - 48)$$

$$\frac{2}{3}\pi (216 - 48) = \frac{2}{3}\pi \times 168 = 112\pi$$



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. پای ارتفاع هرم در مرکز قاعده یعنی محل برخورد قطرهای مربع قرار دارد. پس $HK = 3$ است. در مثلث متساوی الساقین OBC ، OK ارتفاع مرسوم از رأس O می باشد. پس: $BK = 3$.



$$\triangle OBK (k = 90^\circ): OK = \sqrt{OB^2 - BK^2}$$

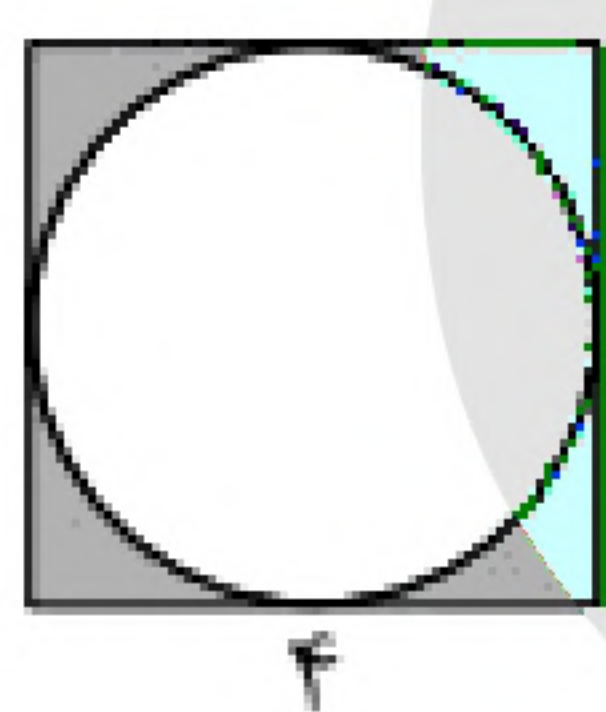
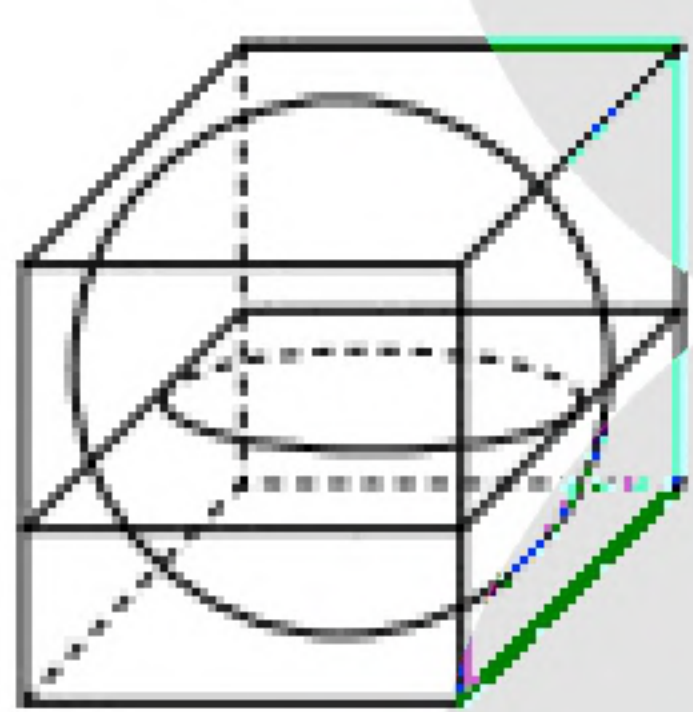
$$OK = \sqrt{34 - 9} = 5$$

حال در مثلث قائم الزاویه OHK ($H = 90^\circ$) داریم:

$$OH = \sqrt{OK^2 - HK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

بنابراین:

$$\frac{S_{\text{قاعده سطح مقطع}}}{S_{\text{قاعده هرم}}} = \left(\frac{OH'}{OH}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\text{قاعده سطح مقطع}}}{36} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow S_{\text{قاعده سطح مقطع}} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} = 2.25$$



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. صفحه‌ی موردنظر مکعب را در مربعی به ضلع ۴ و کره را در دایره‌ای به قطر ۴ قطع می کند. بنابراین مقطع حاصل سطح بین مربع و دایره است. در شکل مقابل مساحت قسمت رنگی باید تعیین شود.

$$4\pi - 16 = \pi(2)^2 - 4^2 = \text{مساحت دایره} - \text{مساحت مربع} = \text{مساحت مقطع}$$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر از هر وجه این مکعب مستطیل یک لایه حذف کنیم آن گاه مکعب‌های باقی مانده دارای وجه رنگ شده نخواهند بود.

$$m = \text{تعداد مکعب‌های کوچک رنگ نشده} = (3-2)(5-2)(4-2) = 6$$

و مکعب‌های کوچکی که دارای دو وجه رنگ شده هستند روی یال‌های مکعب مستطیل داده شده هستند البته مکعب‌های دو سر هر یال را نباید حساب کنیم چرا که آن‌ها دارای سه وجه رنگ شده می باشند.

$$n = \text{تعداد مکعب‌های کوچک دارای دو وجه رنگ شده} = 4(4-2) + 4(5-2) + 4(3-2) = 24$$

بنابراین:

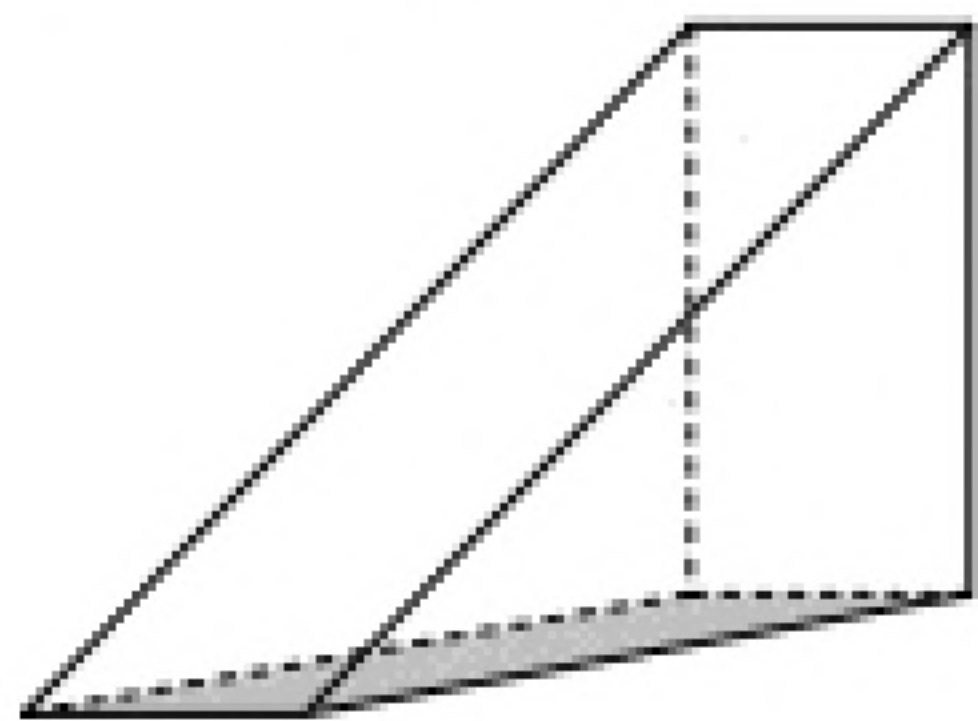
$$2n - m = 2(24) - 6 = 42$$



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمای روبه‌روی این منشور، مثلث قائم‌الزاویه به اضلاع ۳، ۴ و ۵ است.

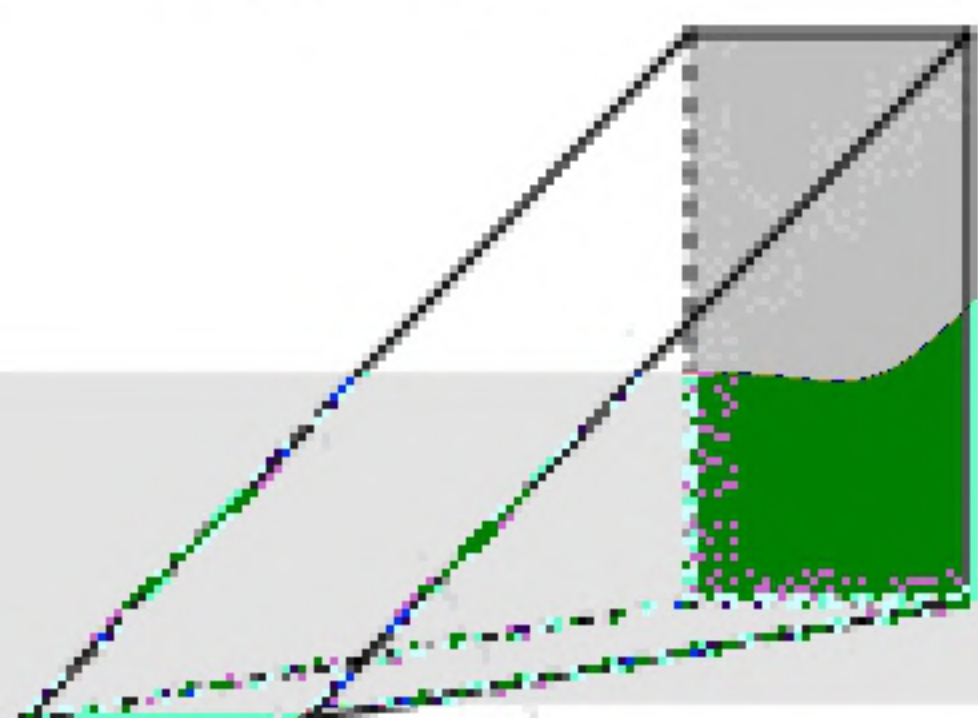
$$\frac{1}{2}(3 \times 4) = 6 = \text{مساحت نمای روبه‌رو}$$

نمای بالای این منشور مستطیل به اضلاع ۲ و ۴ است. در شکل قسمت هاشورخورده نمای بالای این شکل است.



$$8 = 2 \times 4 = \text{مساحت نمای بالا}$$

و نمای چپ این منشور، مستطیل به اضلاع ۲ و ۳ است. در شکل، قسمت هاشورخورده نمای چپ این شکل است.

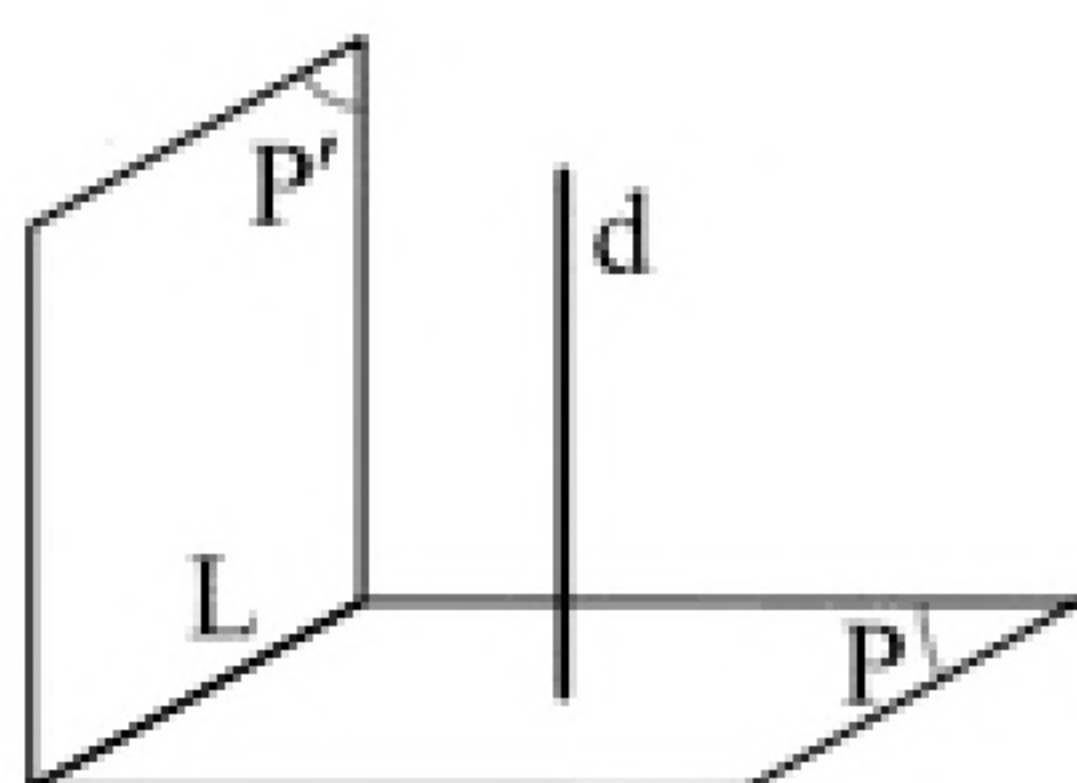


$$6 = 3 \times 2 = \text{مساحت نمای چپ}$$

بنابراین مجموع مساحت‌های سه نما برابر $6 + 8 + 6 = 20$ است.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از یک نقطه خارج خط d ، بی‌شمار عمود متنافر و یک خط عمود متقاطع می‌توان بر d رسم کرد و همگی این خطوط در صفحه‌ای عمود بر d قرار دارند. بنابراین فقط یک صفحه‌ی عمود بر d و گذرا از نقطه‌ی A (خارج از d) وجود دارد. گزاره‌ی «الف» نادرست است. گزاره‌ی «ب» درست است. صفحه‌ای عمود بر دو خط متنافر نمی‌توان رسم کرد. بنابراین گزاره‌ی «ج» نادرست است. اگر خطی یکی از دو خط موازی در فضا را قطع کند، الزاماً دیگری را قطع نمی‌کند، می‌تواند با خط دیگر متنافر باشد. بنابراین گزاره‌ی «د» نادرست است، پس سه گزاره‌ی «الف»، «ج» و «د» نادرست هستند.

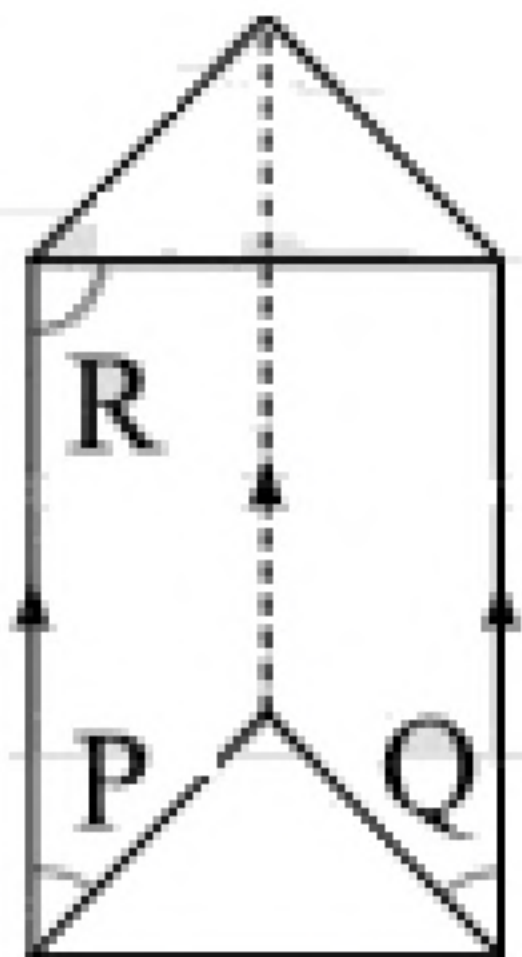
۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجا که d در صفحه‌ی P' واقع نیست، همان‌طور که در شکل مشخص است d و L فقط متنافرند. دقت کنید! خط d با صفحه‌ی P' موازی است.



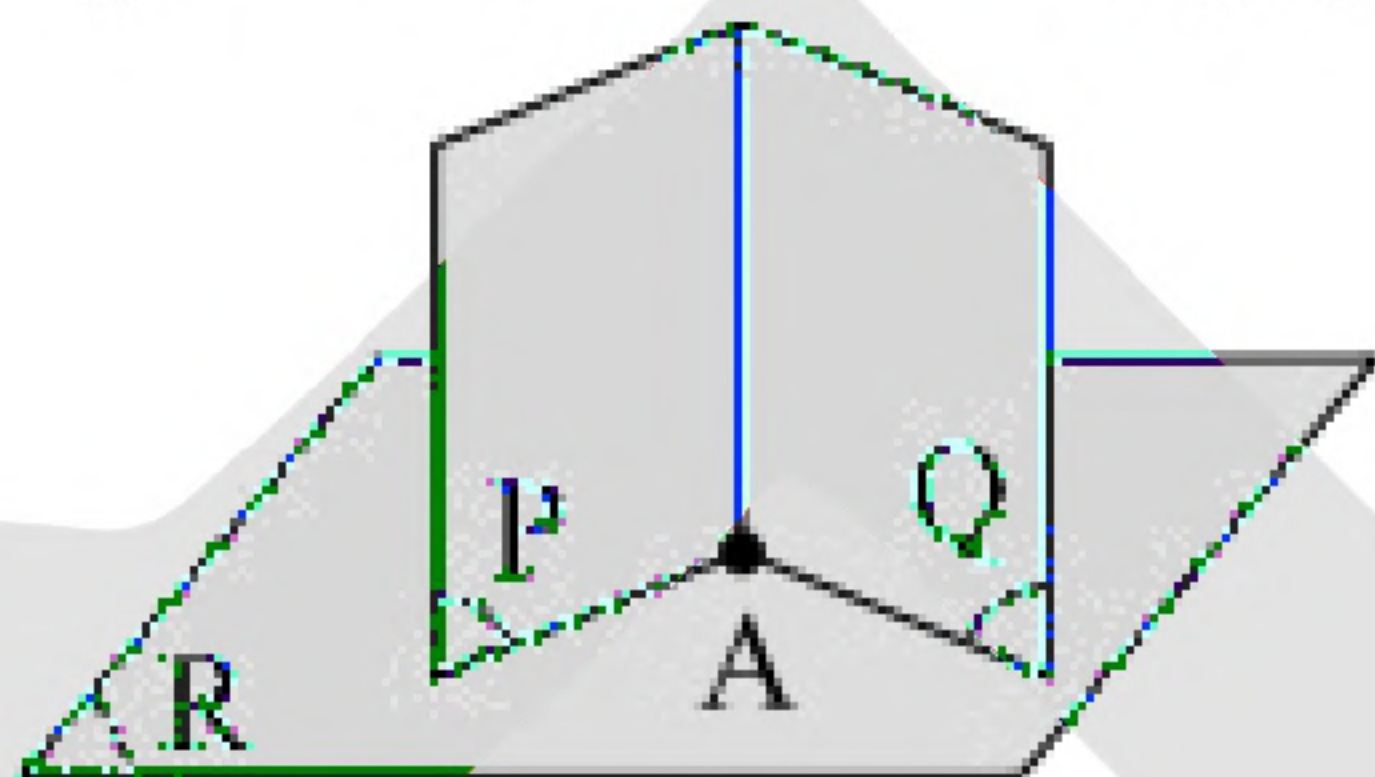
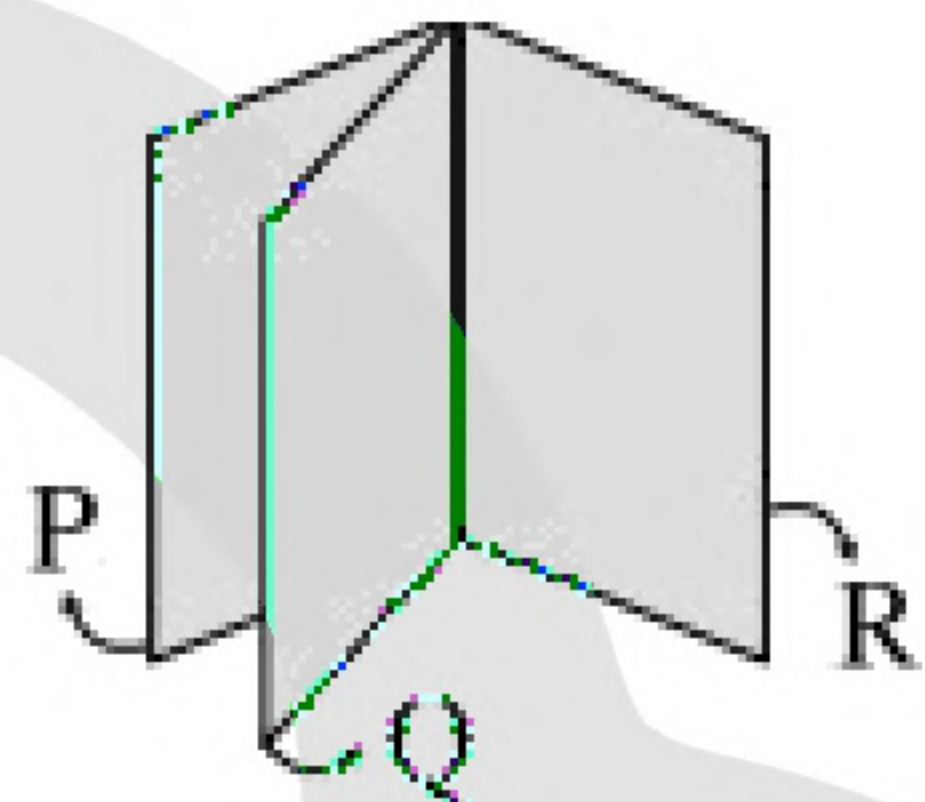


۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

حالت اول: فصل مشترکها دوبه دو موازی باشند.

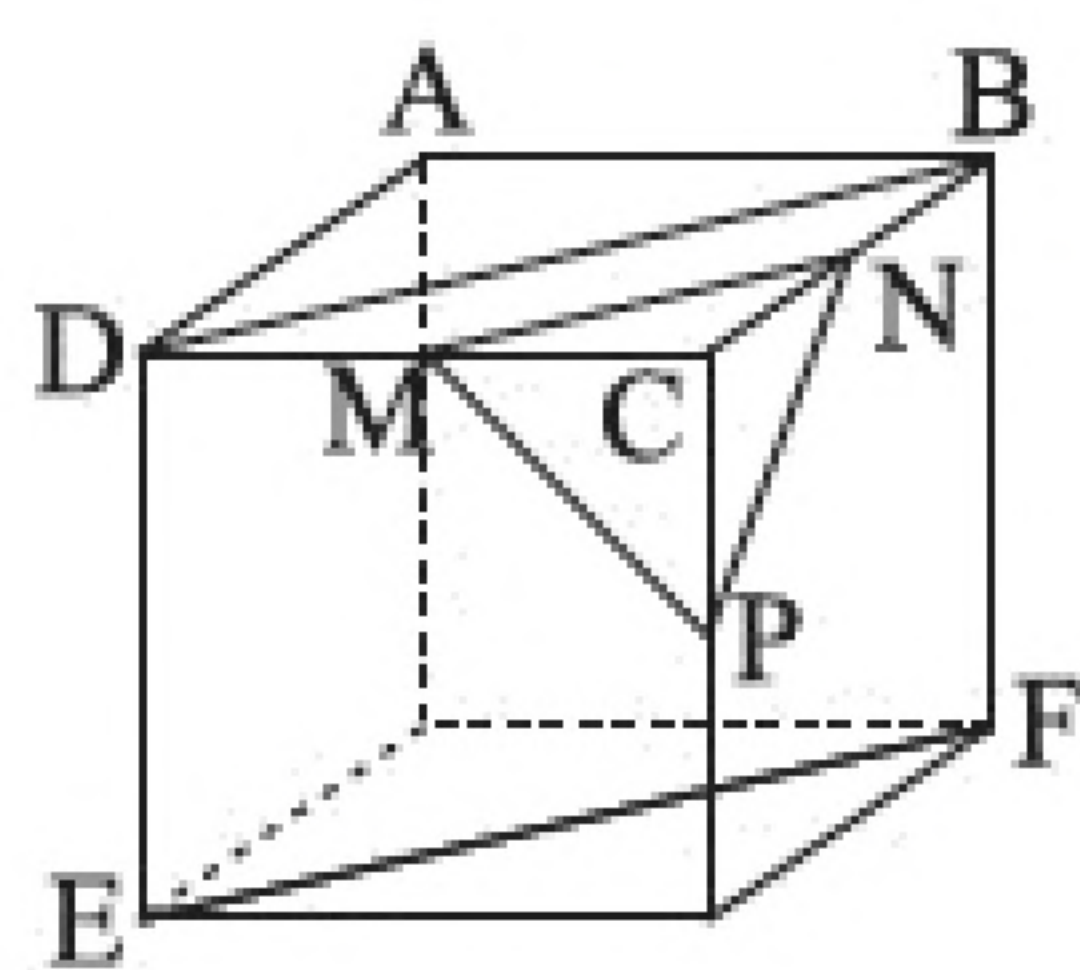


حالت دوم: فصل مشترکها در یک نقطه هم‌رس باشند. (نقطه‌ی A محل هم‌رسی.)

حالت سوم: فصل مشترکها بر هم منطبق باشند (مانند شیرازه کتاب)
ولی گزینه‌ی (۱) رخ نمی‌دهد.۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هرگاه خط d با صفحه‌ی P موازی باشد، با بی‌شمار خط از صفحه‌ی P (نه همه‌ی آنها) موازی است و با بی‌شمار خط از صفحه‌ی P (نه همه‌ی آنها) متنافر است.۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. FC با یال‌های AB و MN و AD و NE و AM و BN متنافر است پس $m = 6$ است.
 FC با یال‌های CE و CD و FE و FD و FM و BC متقاطع است. پس $n = 6$ است. در ضمن FC با هیچ‌یک از یال‌های این مکعب موازی نیست پس $k = 0$ است. بنابراین $m - n + k = 6 - 6 + 0 = 0$ مساوی ۰ است.



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



سطح S ، مساحت مثلث متساوی الاضلاع MNP است. اگر ضلع مربع a باشد، پس:

$$BD = a\sqrt{2}$$

$$\triangle BCD : (MN \parallel BD) \Rightarrow MN = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$

سطح S' ، مساحت مستطیل $DBEF$ به طول $a\sqrt{2}$ و عرض a می باشد، پس:

$$S' = (a\sqrt{2})a = a^2\sqrt{2}$$

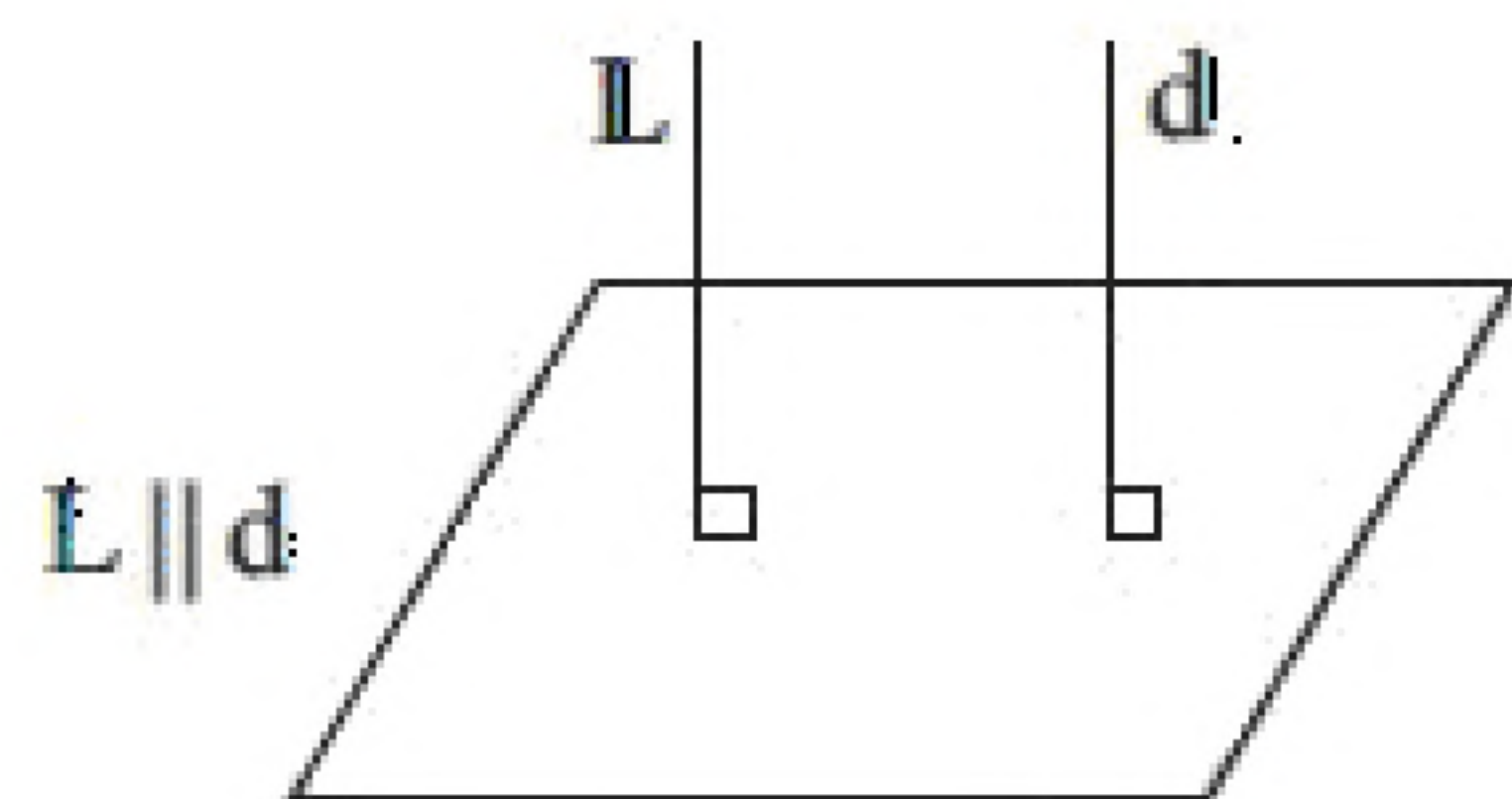
بنابراین:

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{8} a^2}{a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{16}$$

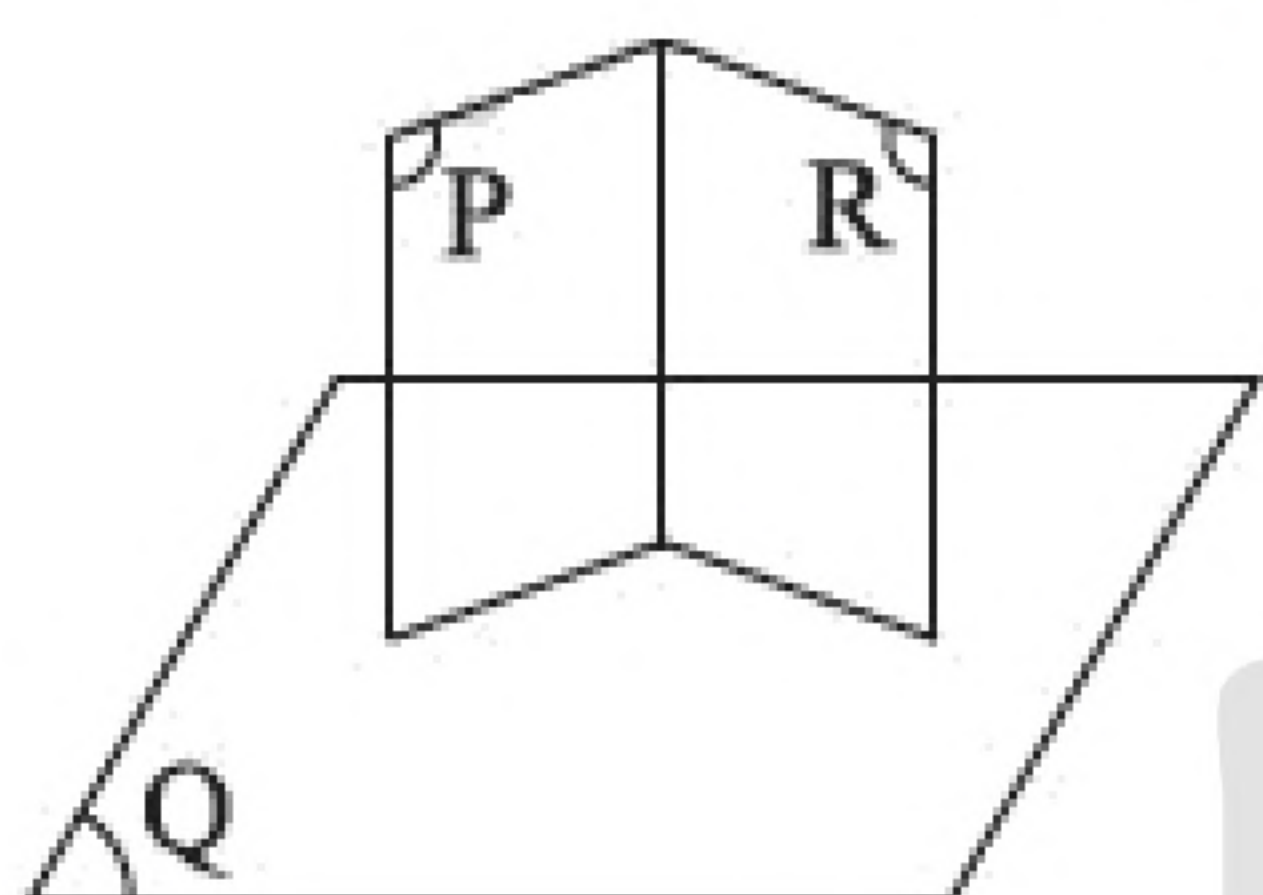
۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر چهار گزاره با توجه به کتاب درسی، درست هستند.



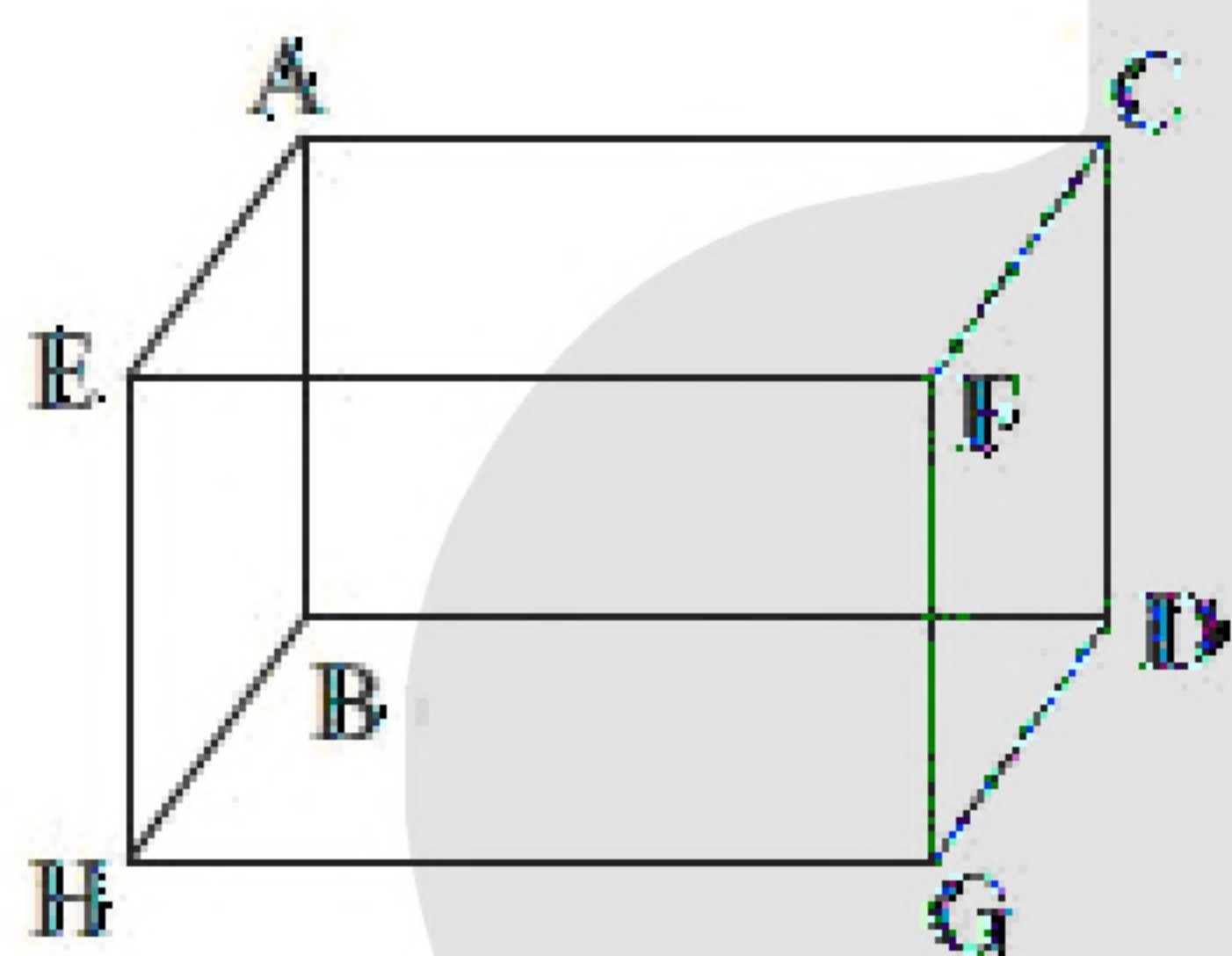
۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
گزینه‌ی «۱» همواره درست است.



گزینه‌ی «۲» الزاماً درست نیست. ممکن است صفحات P و R متقاطع و عمود بر صفحه Q باشند.



گزینه‌ی «۳» درست است. یال‌های EF، HG، CF و DG با یال مشخص AB متناظر هستند.



گزینه‌ی «۴» تعریف دو صفحه عمود بر هم می‌باشد.

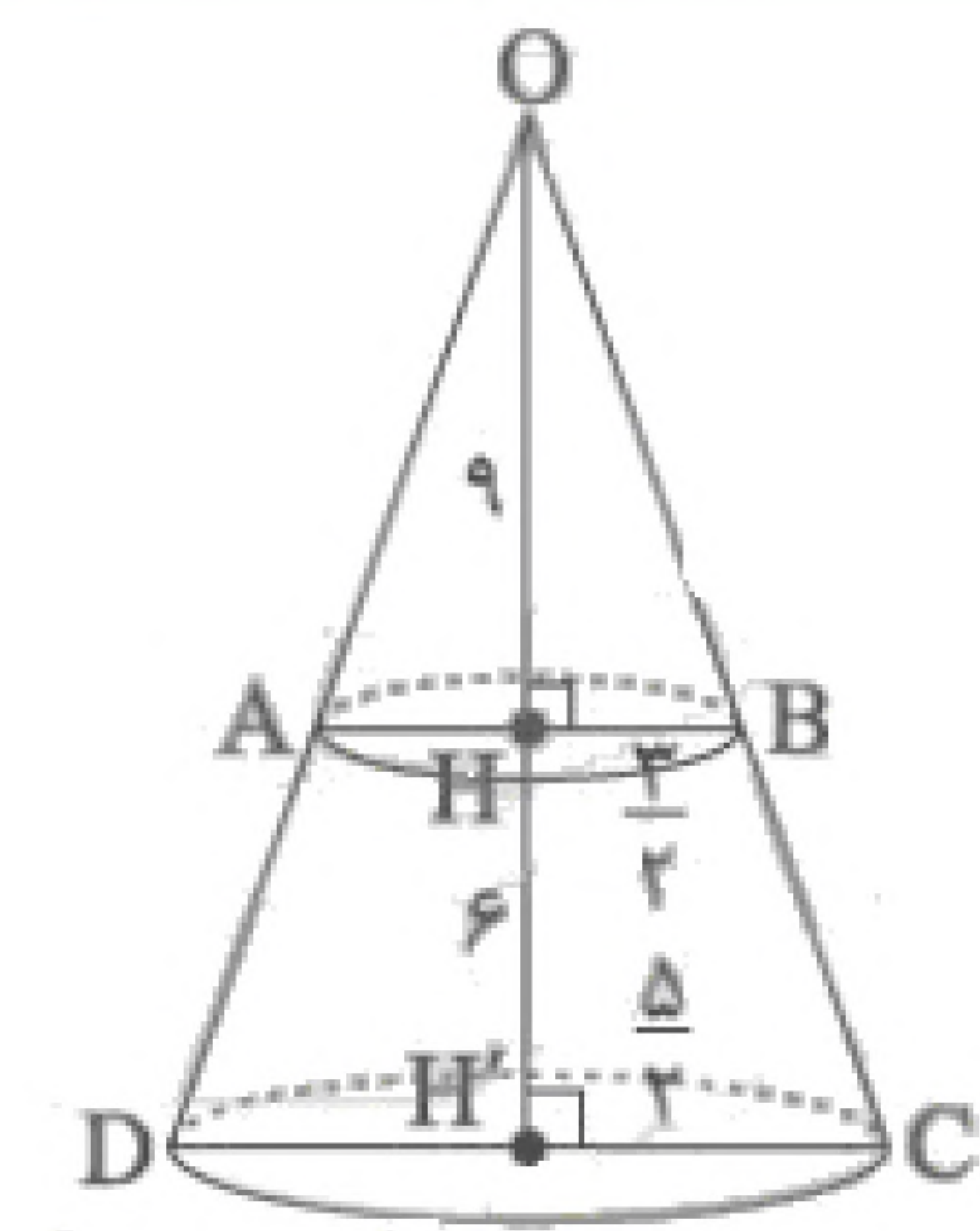


۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

روش اول: جسم حاصل، یک مخروط ناقص است. ساق‌های دوزنقه را امتداد می‌دهیم تا یک‌دیگر را در O قطع کنند. دو مخروط به قطر قاعده‌های AB و DC متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها برابر

$$\frac{AB}{DC} = \frac{3}{5} \text{ است.}$$

پس نسبت حجم‌های آن‌ها $\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$ است. حال داریم:



$$\widehat{OH'C} : HB \parallel H'C \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OH}{OH'} = \frac{HB}{H'C} \Rightarrow \frac{OH}{OH+6} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5OH = 3OH + 18 \Rightarrow 2OH = 18 \Rightarrow OH = 9 \Rightarrow OH' = 9 + 6 = 15$$

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - V_{\text{مخروط کوچک}} = V_{\text{مخروط بزرگ}} - \frac{27}{125} V_{\text{مخروط بزرگ}}$$

$$= \frac{98}{125} V_{\text{مخروط بزرگ}} = \frac{98}{125} \left(\frac{1}{3} \pi (H'C)^2 \right) = \frac{98}{125} \left(\frac{1}{3} \pi \left(\frac{25}{4} \right) (15) \right) = \frac{49}{2} \pi = 24\frac{1}{2} \pi$$

روش دوم:

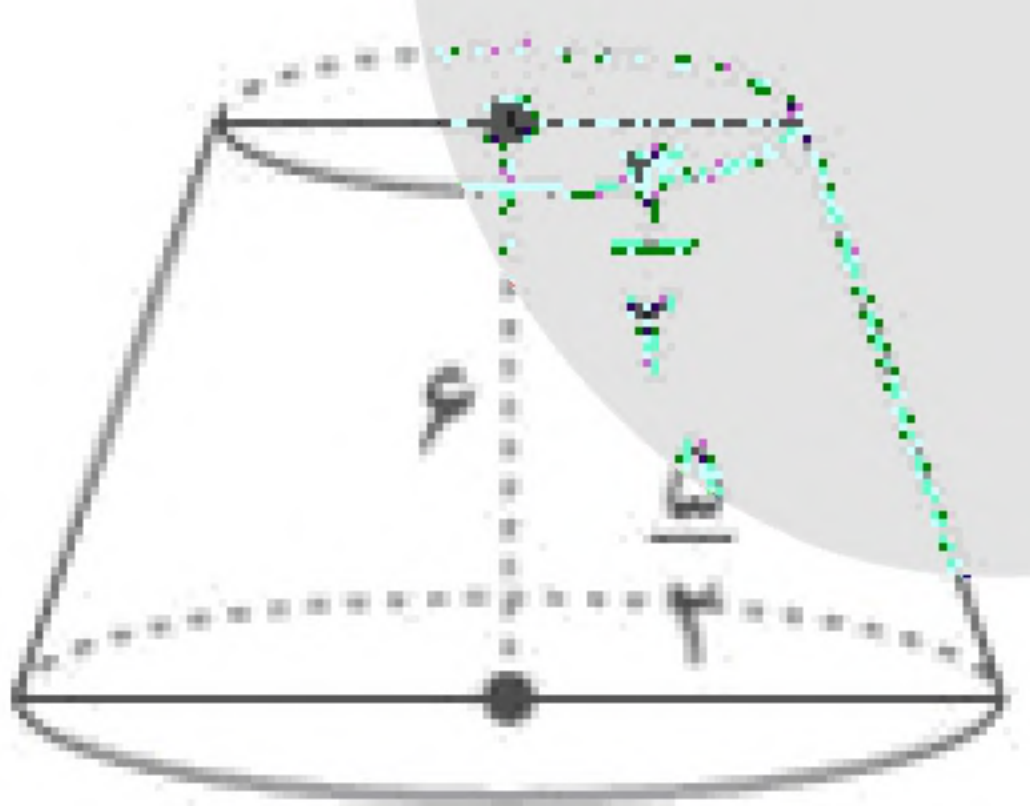
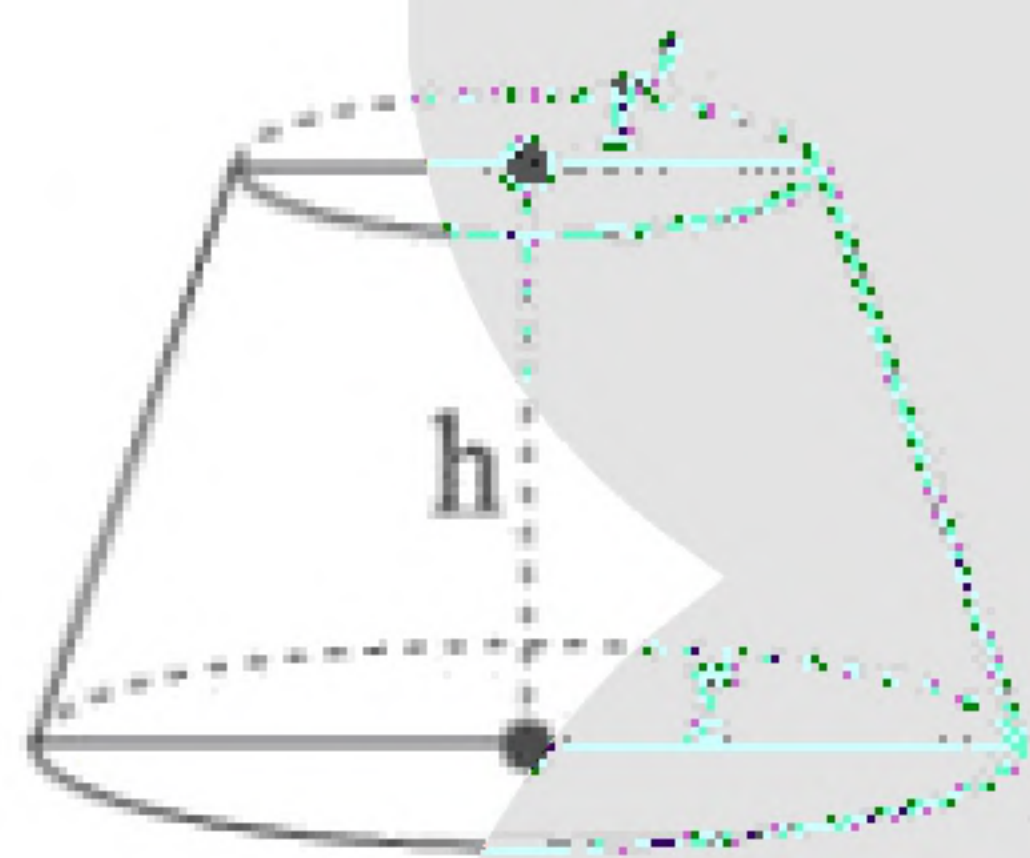
نکته: حجم مخروط ناقص به شعاع قاعده‌های r و r' و ارتفاع h، برابر است با:

$$V = \frac{1}{3} \pi (r^2 + r'^2 + rr') h$$

طبق فرض، $r = \frac{5}{2}$ ، $r' = \frac{3}{2}$ و $h = 6$. حال با توجه به نکته‌ی فوق داریم:

$$V_{\text{مخروط ناقص}} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{25}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} \right) (6)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \left(\frac{49}{4} \right) (6) = \frac{49}{2} \pi = 24\frac{1}{2} \pi$$



۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مساحت کره برحسب شعاع برابر است با:

$$S = 4\pi r^2 \Rightarrow 100\pi = 4\pi r^2 \Rightarrow r = 5$$

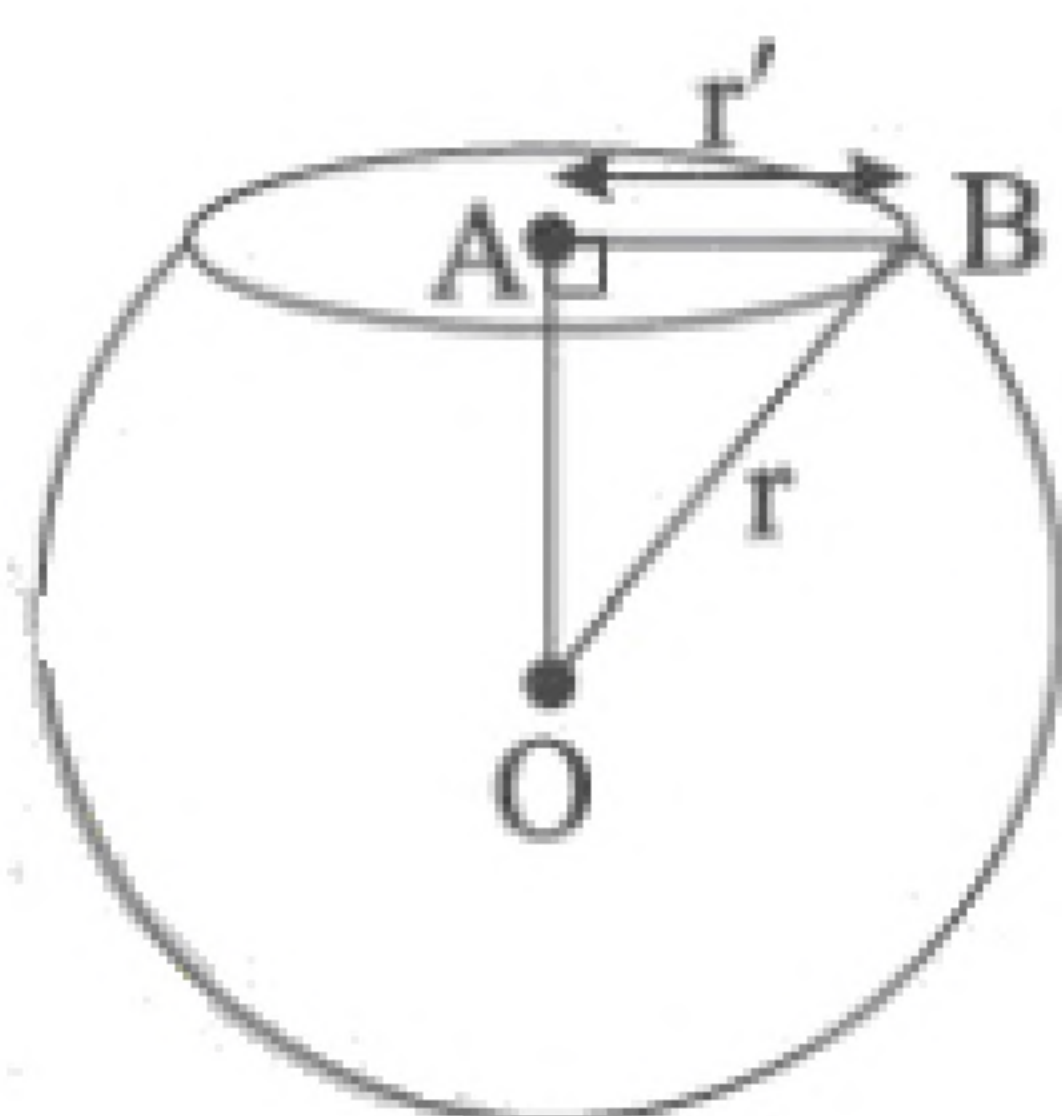
سطح مقطع برش، دایره‌ای است به شعاع r'،

$$S = \pi r'^2 = 16\pi \Rightarrow r' = 4$$

پس:

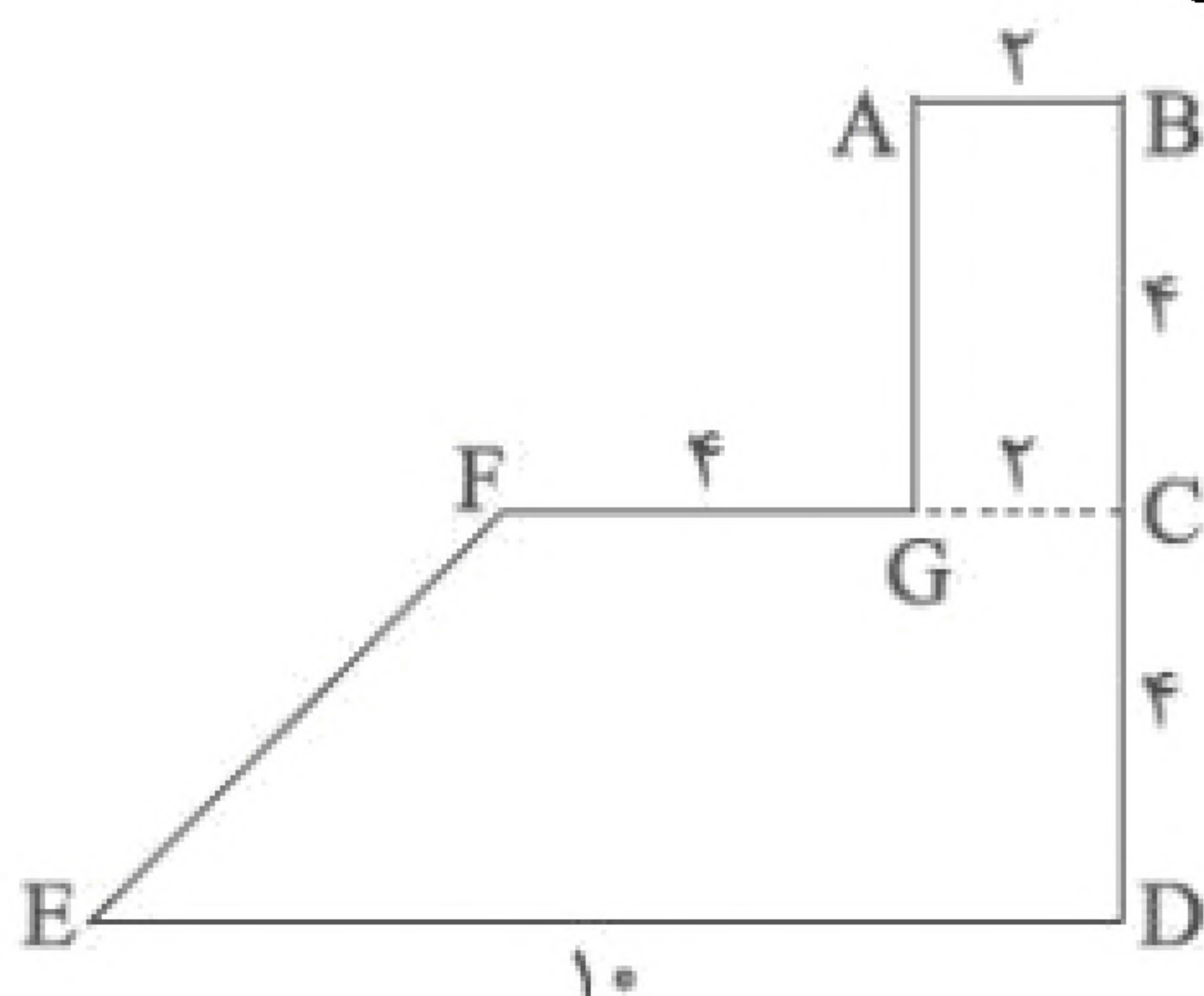
طبق قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث \widehat{OAB} ، داریم:

$$OA^2 + AB^2 = OB^2 \Rightarrow OA^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow OA = 3$$



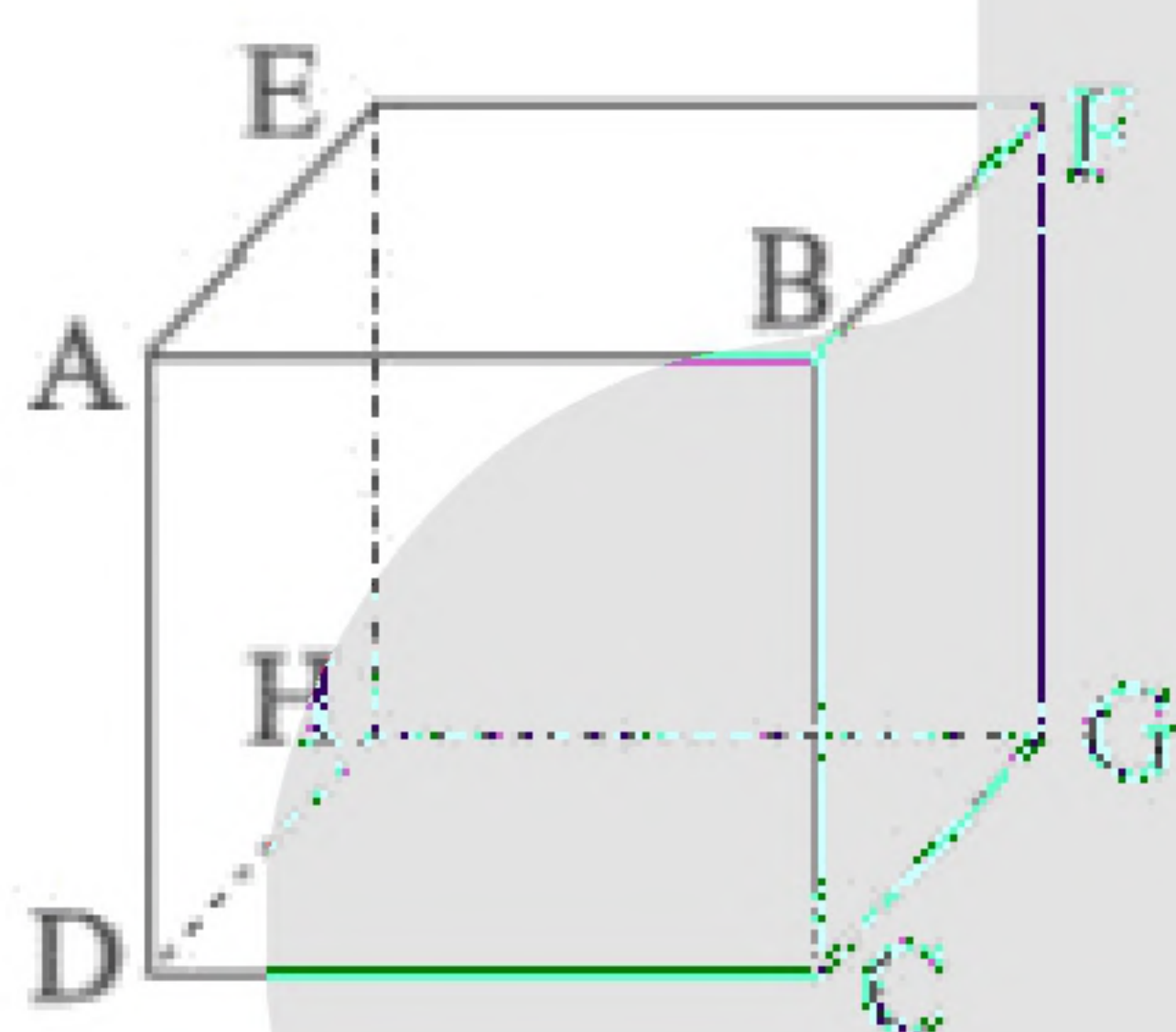


۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با رسم نمای روبه‌رو، داریم:
(مساحت دوزنقه‌ی FCDE) + (مساحت مستطیل ABCG) = مساحت کل



$$= (4 \times 2) + \frac{1}{2}(10 + 6)(4) = 8 + 32 = 40$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
یال‌های DH و CG با صفحه‌ی ABCD موازی نیستند و با یال AB متناظرند.



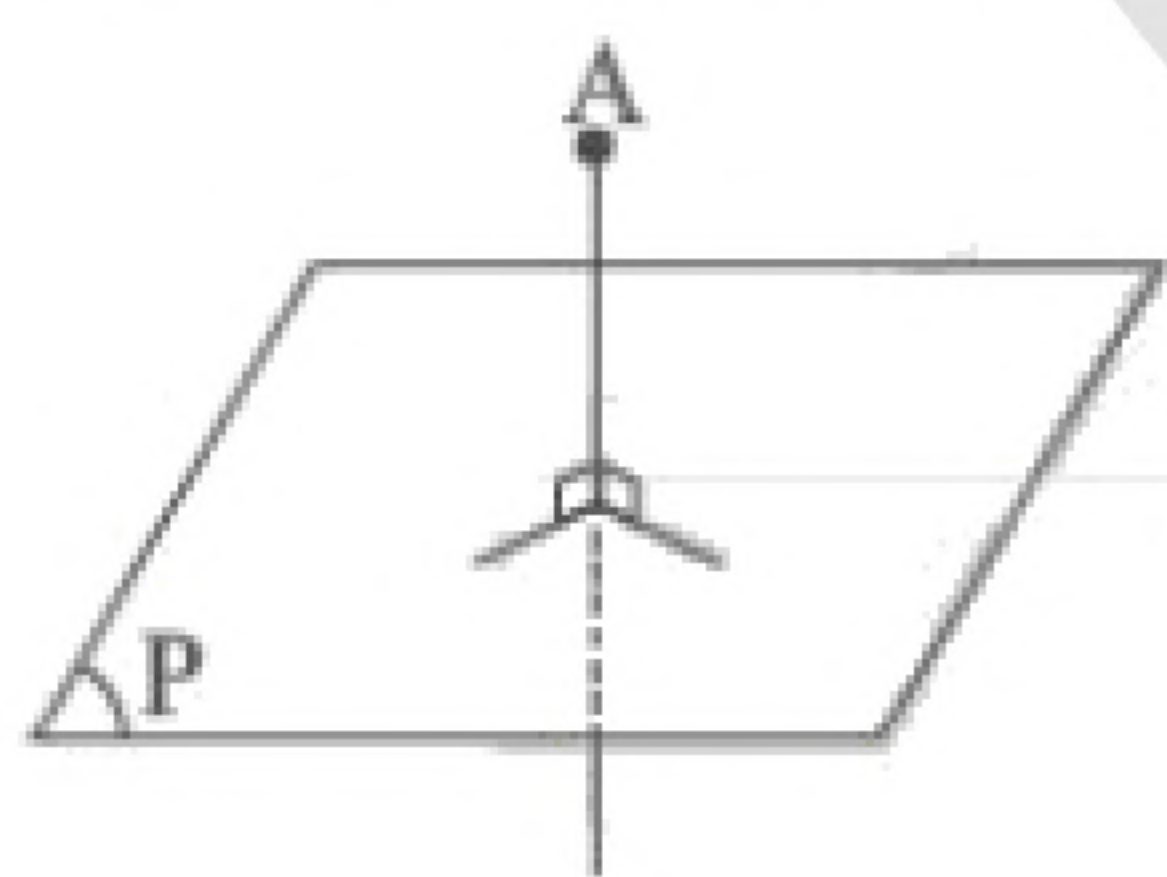
۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بررسی گزاره‌ها:

(الف) در مکعب‌مستطیل مقابل، دو خط AB و FG در دو صفحه‌ی موازی ABCD و EFGH قرار دارند، ولی با هم موازی نیستند (بلکه متناظرند)، پس این گزاره، غلط است.

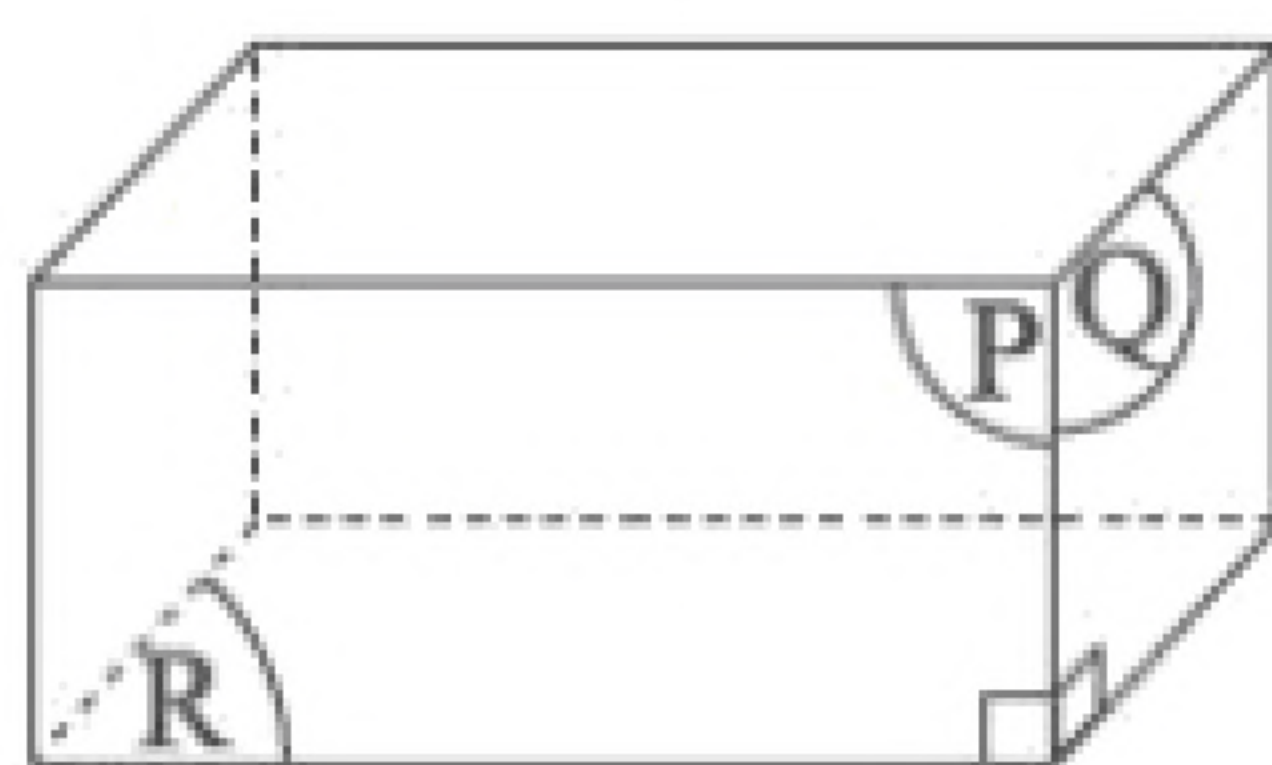
(ب) نکته: اگر صفحه‌ای، یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع می‌کند.

صفحه‌ی P و دو خط موازی L و L' را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم صفحه‌ی P با L موازی است. به فرض خلف، اگر صفحه‌ی P با L' موازی یا شامل آن نباشد، آنگاه L' را قطع می‌کند، در نتیجه (طبق نکته‌ی فوق) L را هم قطع می‌کند که خلاف فرض است. پس فرض خلف، باطل و این گزاره درست است.



(ج) از هر نقطه مانند A در فضا، فقط یک خط می‌گذرد که بر صفحه‌ی P عمود است. پس این گزاره، درست است.

(د) مطابق شکل، دو صفحه‌ی P و Q (صفحات جانبی مکعب‌مستطیل) بر صفحه‌ی R (قاعده‌ی مکعب‌مستطیل) عمودند، ولی با هم موازی نیستند (بلکه متقاطع‌اند). پس این گزاره، غلط است.





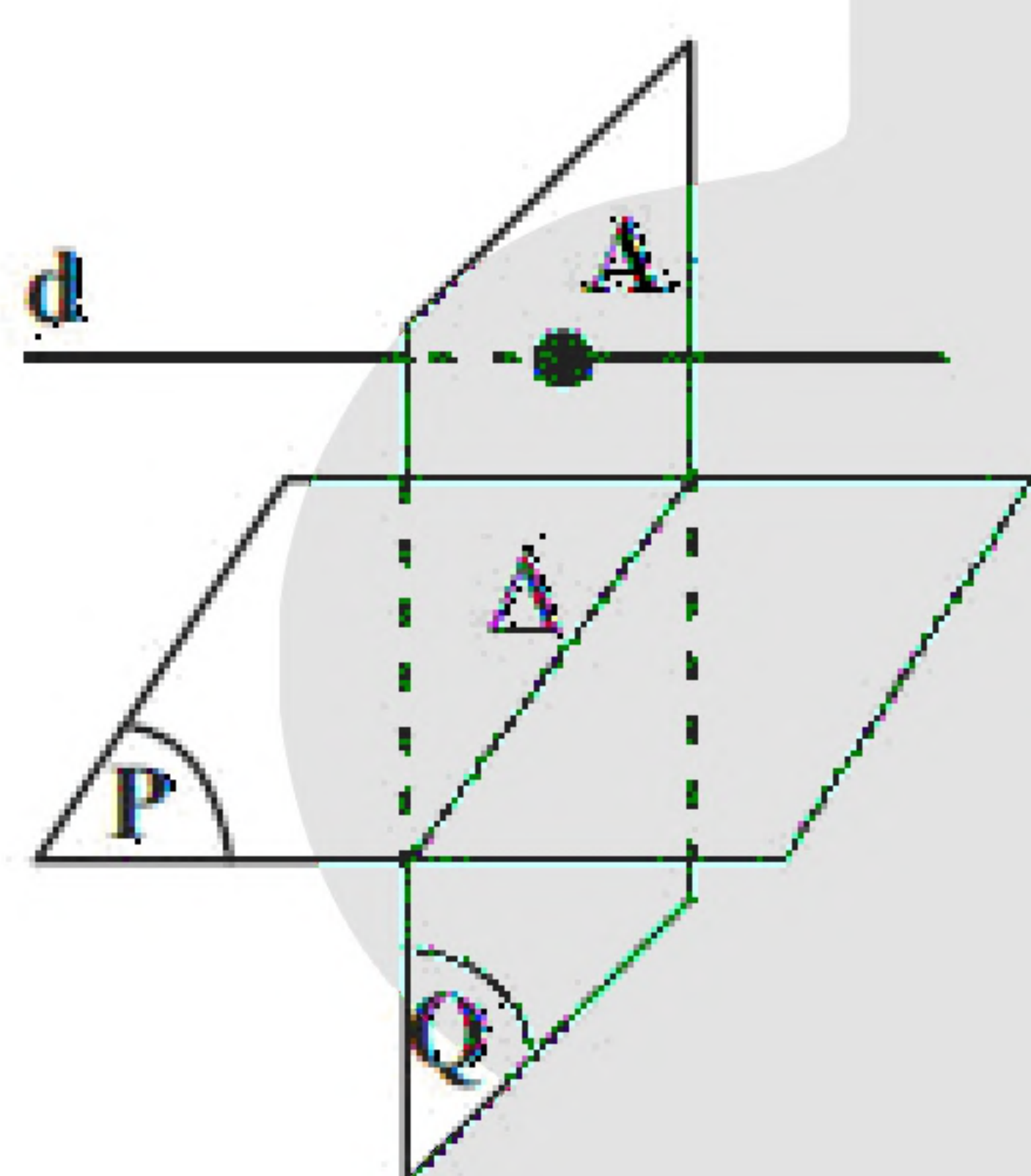
۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گزینه ۱: در یک صفحه، اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند ولی این موضوع در فضا الزاماً برقرار نیست.

گزینه ۲: از هر نقطه خارج یک صفحه، یک صفحه موازی با صفحه مفروض می‌توان رسم کرد. حال هر خطی که از این نقطه گذشته و در صفحه رسم شده باشد، با صفحه اولیه موازی است، پس این گزاره همواره درست است.

گزینه ۳: اگر خطی با یکی از دو خط متناظر، موازی باشد، می‌تواند با دیگری متقاطع یا متناظر باشد.

گزینه ۴: از هر نقطه غیر واقع بر یک خط، بی‌شمار خط متناظر با آن خط می‌گذرد.



۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنید خط Δ فصل مشترک دو صفحه P و Q

باشد. اگر خط d درون صفحه Q و موازی خط Δ باشد، آنگاه خط d موازی صفحه

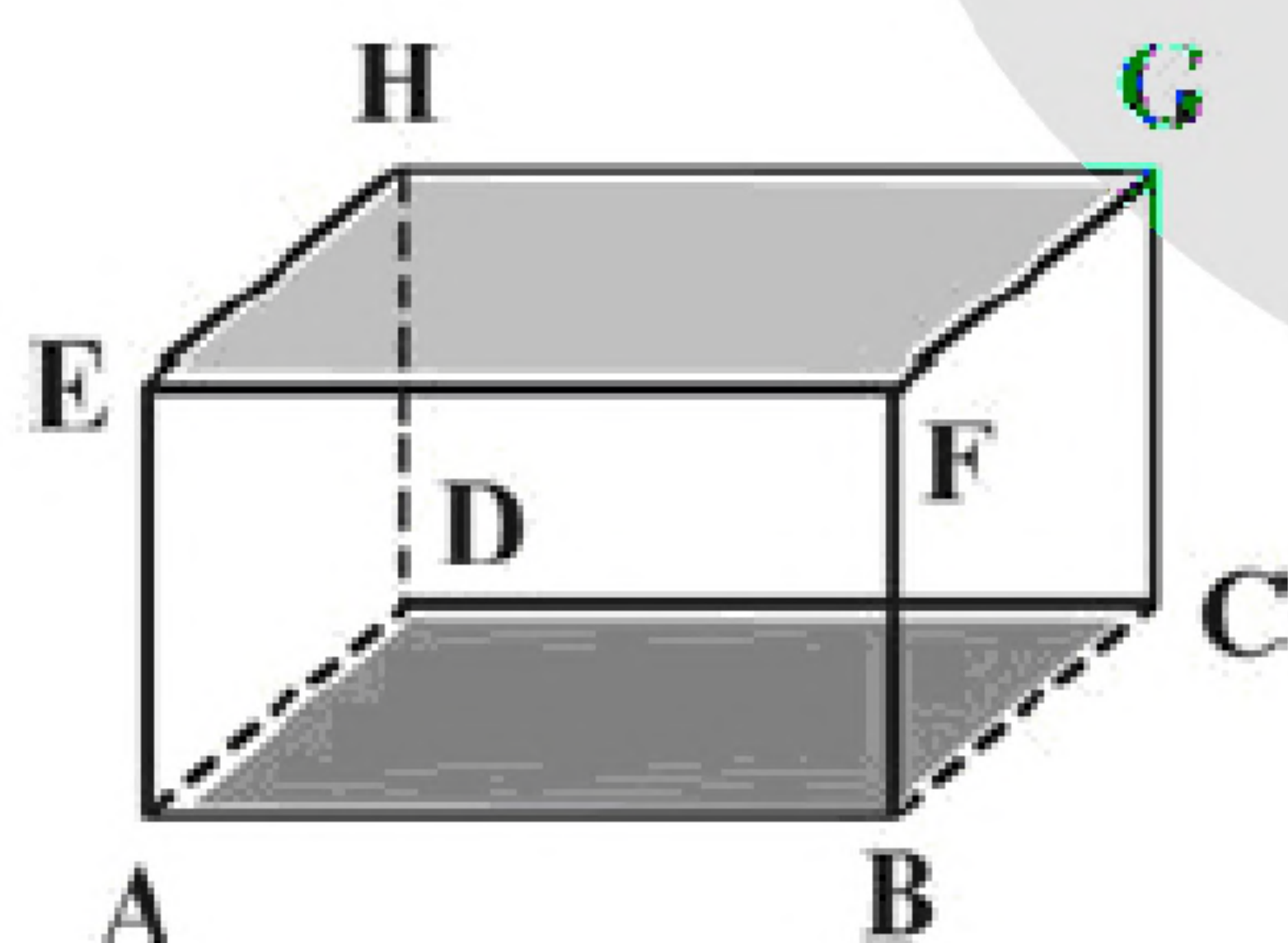
P است. اگر خط d خطی خارج از صفحه Q و موازی خط Δ باشد، آنگاه خط d

با هر دو صفحه P و Q موازی است. همچنین مطابق شکل خط d می‌تواند صفحه

Q را قطع کند و موازی صفحه P باشد، پس هر سه حالت گزینه‌های ۱، ۲ و ۳

امکان‌پذیر است.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»



۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق شکل دو وجه ABCD و EFGH را

در نظر می‌گیریم. ضلع AB در وجه ABCD با ضلع‌های EH و GF در

وجه EFGH متناظر است.

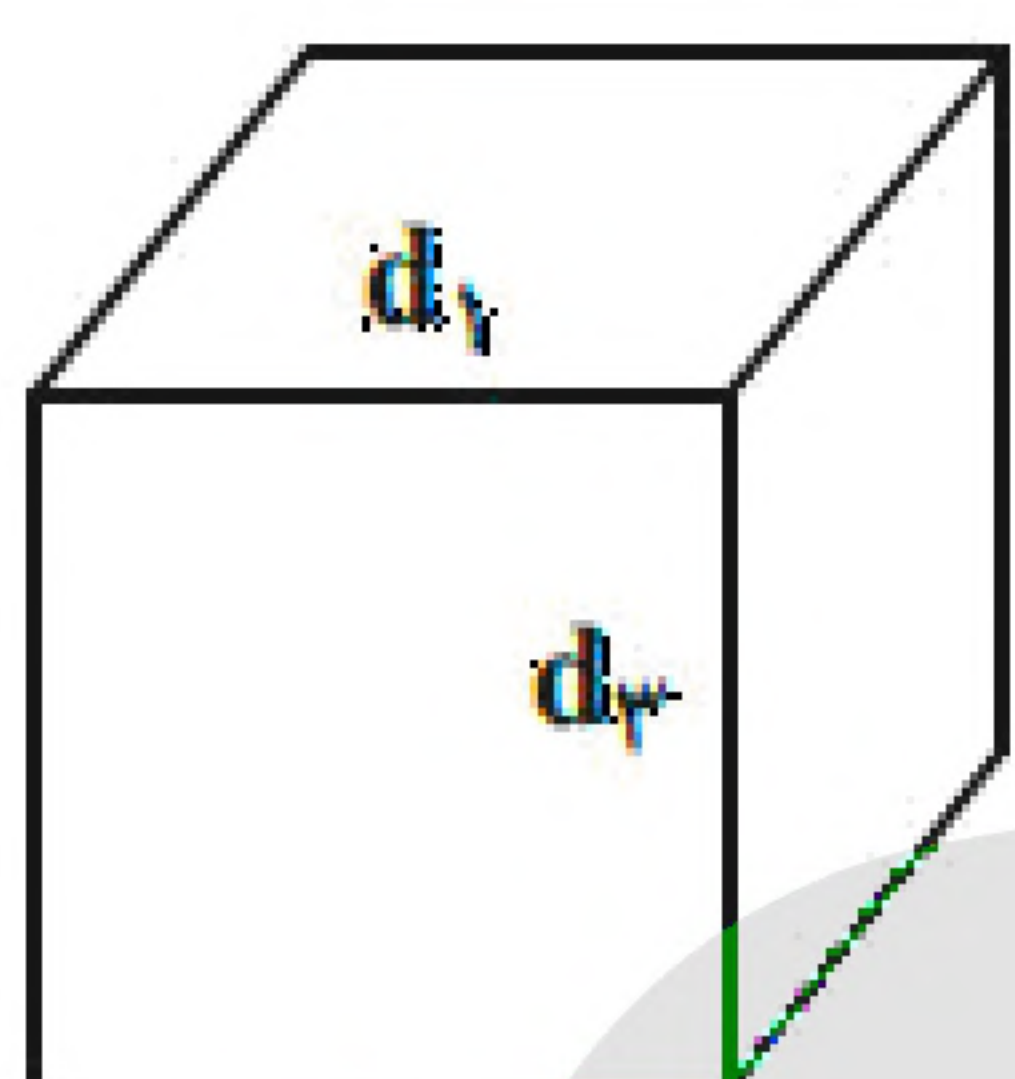
پس هر یال از وجه پایین با دو یال از وجه بالا متناظر است، لذا ۸ جفت یال

متناظر در وجه‌های مزبور وجود دارد.

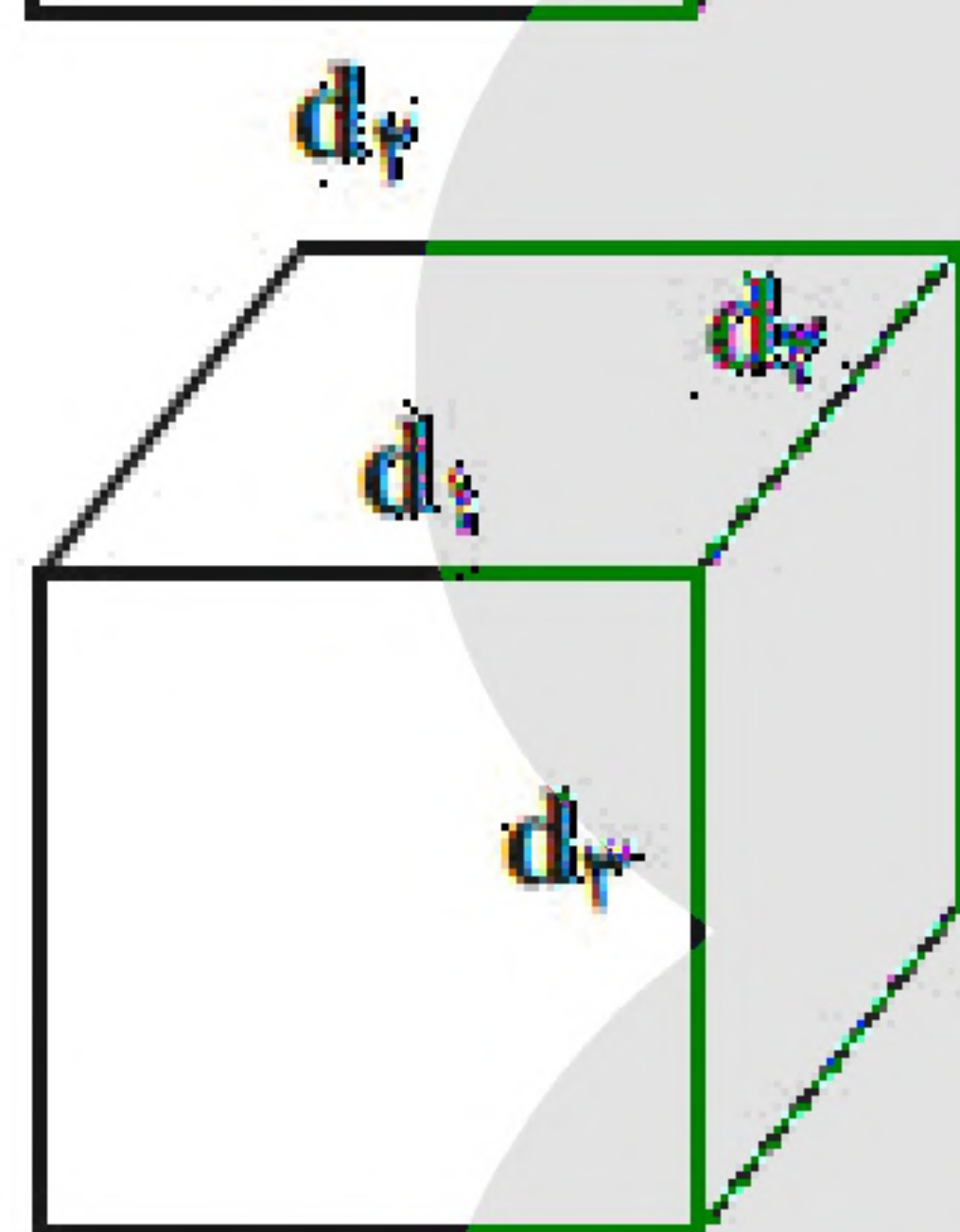


۳۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر سه گزاره در حالت کلی نادرست هستند. اگر سه نقطه A ، B و C بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، بی‌شمار صفحه در فضا از این سه نقطه عبور می‌کند. اگر دو خط d و d' متناظر باشند، آن‌گاه هیچ صفحه‌ای شامل این دو خط وجود ندارد و در صورتی که نقطه A بر روی خط d واقع باشد، از خط d و نقطه A بی‌شمار صفحه می‌گذرد.

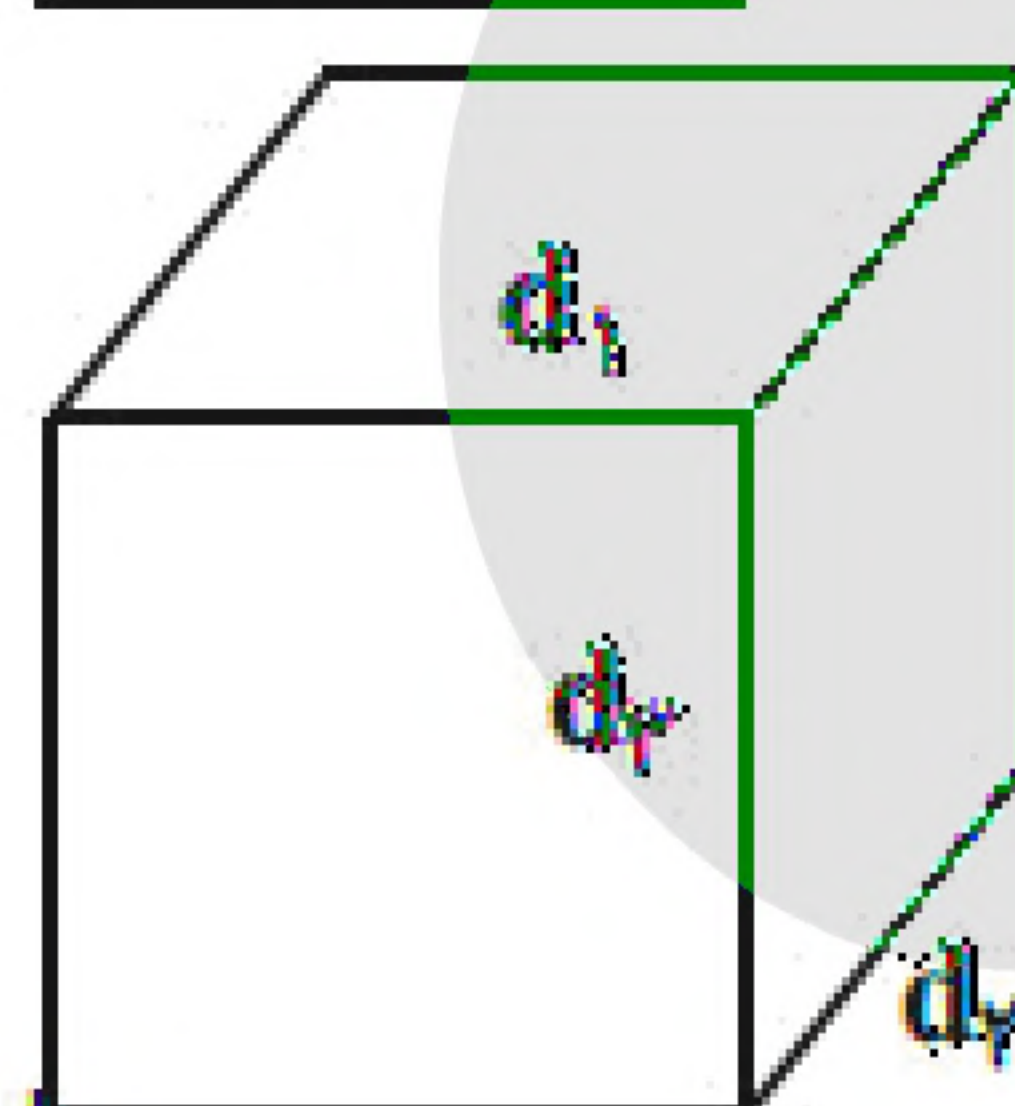
۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



(الف) در شکل مقابل d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده و موازی یکدیگرند.

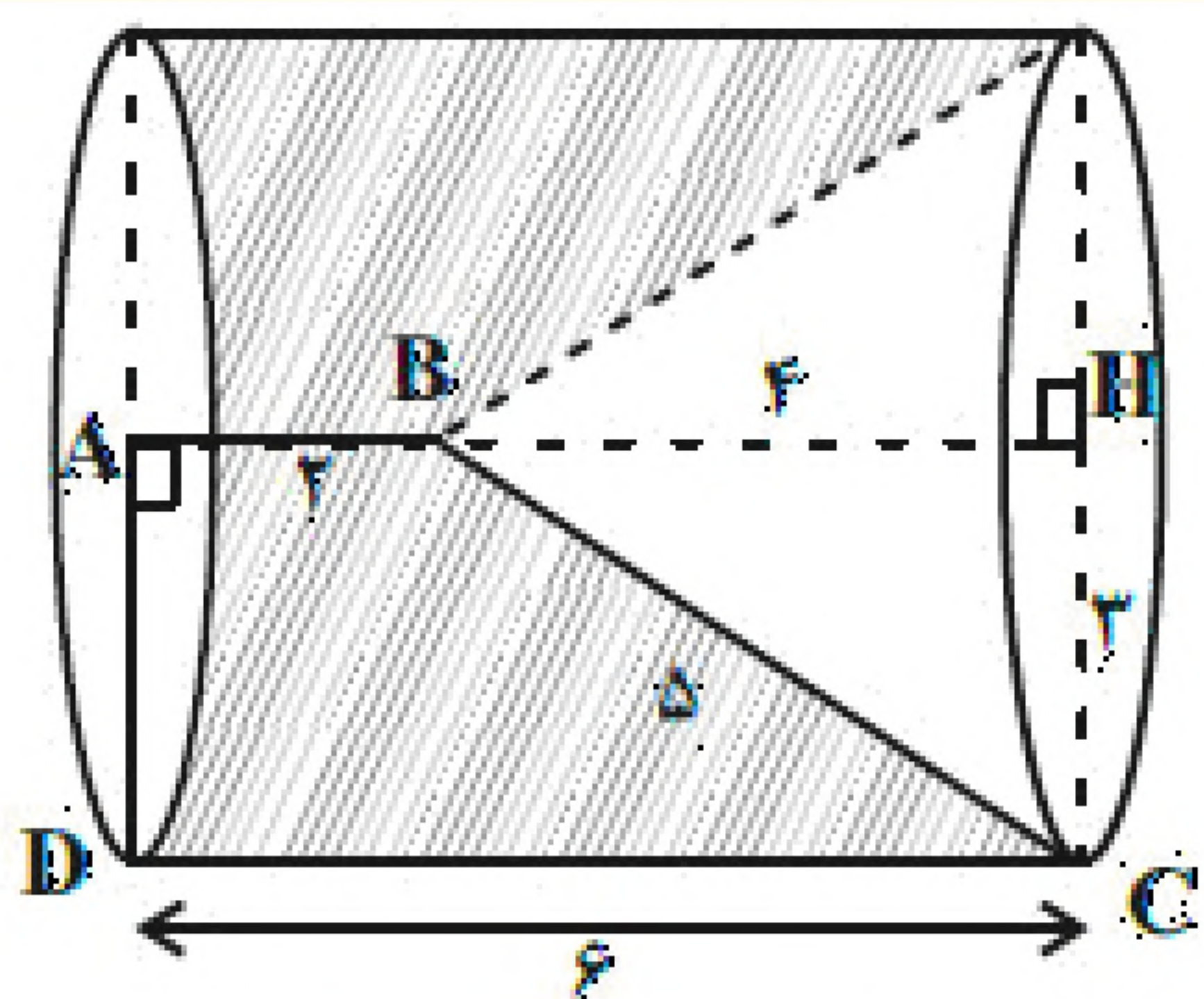


(ب) در شکل مقابل d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده و با یکدیگر متقاطع‌اند.



(پ) در شکل مقابل d_1 و d_2 عمود بر d_3 بوده و با یکدیگر متناظرند.

۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. هر سه گزاره در حالت کلی نادرست هستند. اگر سه نقطه A ، B و C بر روی یک خط راست قرار داشته باشند، بی‌شمار صفحه در فضا از این سه نقطه عبور می‌کند. اگر دو خط d و d' متناظر باشند، آن‌گاه هیچ صفحه‌ای شامل این دو خط وجود ندارد و در صورتی که نقطه A بر روی خط d واقع باشد، از خط d و نقطه A بی‌شمار صفحه می‌گذرد.



۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم الزاویه BHC داریم:

$$BH^{\gamma} = BC^{\gamma} - CH^{\gamma} = 25 - 9 = 16 \Rightarrow BH = 4$$

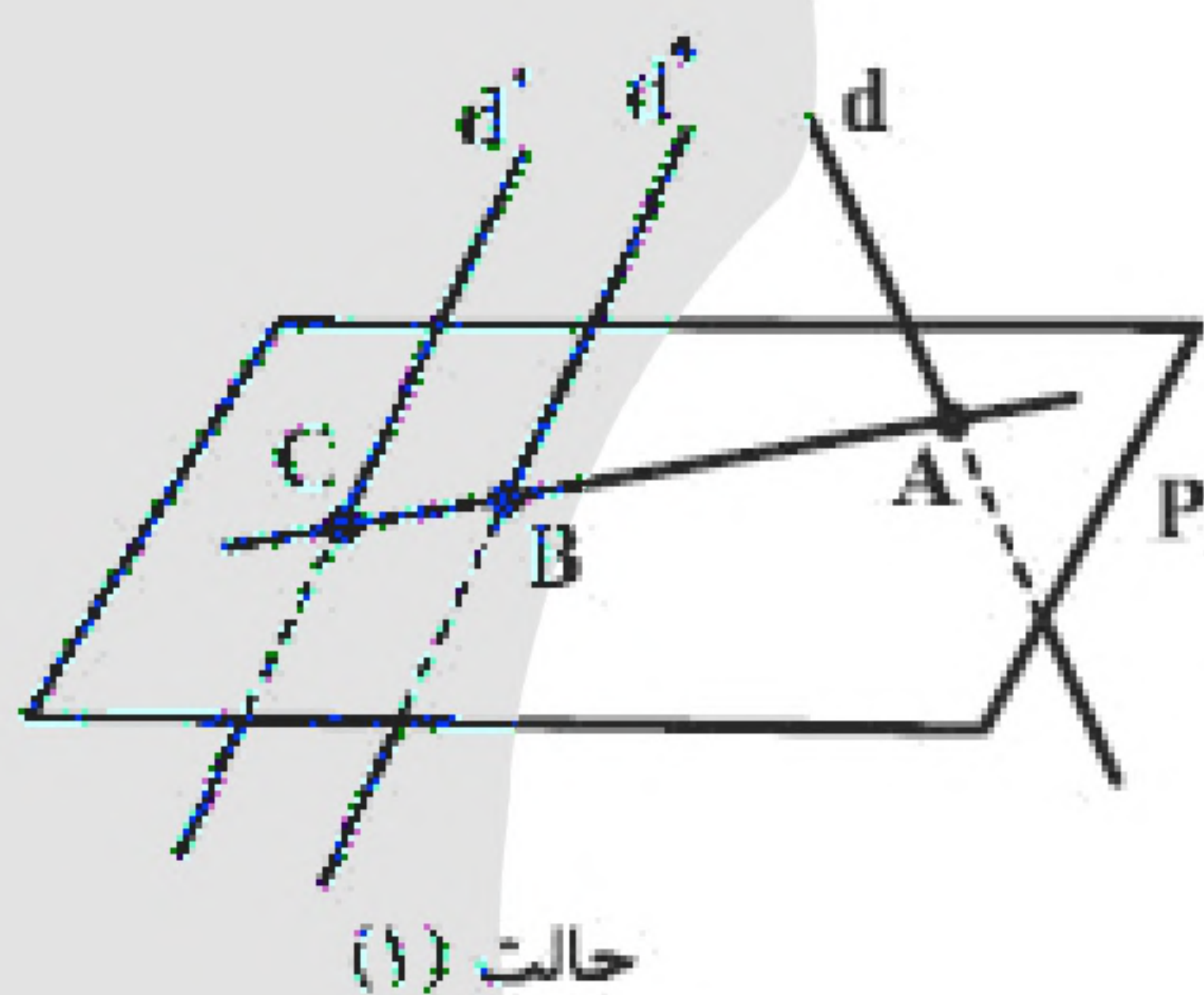
حجم حاصل از دوران دوزنقه‌ی قائم‌الزاویه ABCD حول ضلع AB مطابق شکل برابر تفاضل حجم یک استوانه و یک مخروط است:

$$V_{\text{استوانه}} = \pi (AD)^2 \times DC = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$$

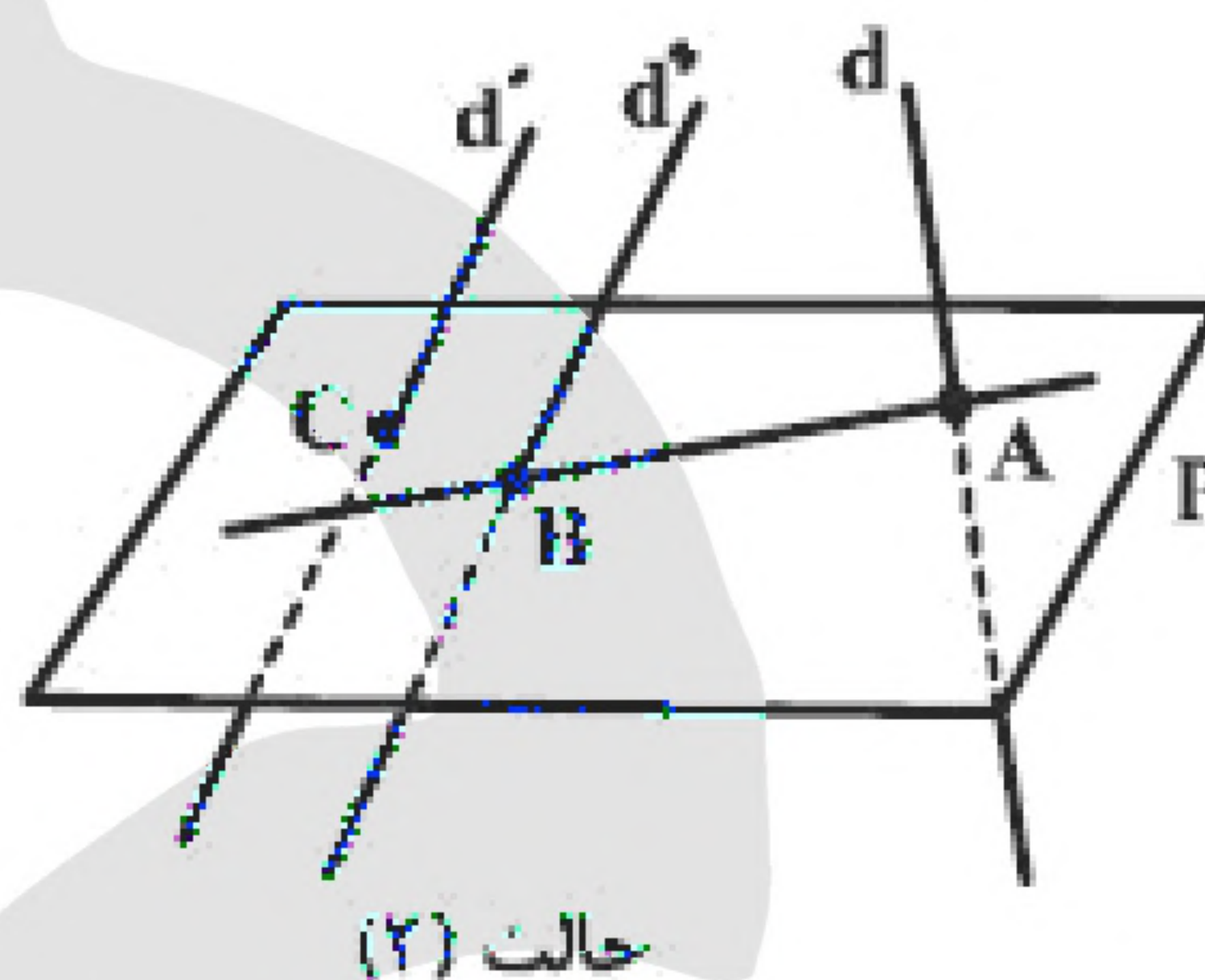
$$V_{\text{مخروط}} = \frac{1}{3} \pi (\text{CH})^2 \times \text{BH} = \frac{\pi}{3} \times 3^2 \times 4 = 12\pi$$

$$V = 54\pi - 12\pi = 42\pi$$

۳۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم اگر یکی از دو خط موازی، صفحه‌ای را قطع کند، لزوماً دیگری نیز، صفحه را قطع می‌کند. پس چون خط d'' ، صفحه‌ی P را قطع می‌کند، خط d' نیز این صفحه را در نقطه‌ای مانند C قطع خواهد کرد. حال اگر امتداد AB از نقطه‌ی C عبور کند (حالت ۱)، d' و AB متقاطع‌اند و در صورتی که امتداد AB از نقطه‌ی C عبور نکند (حالت ۲)، d' و AB متناظرند.

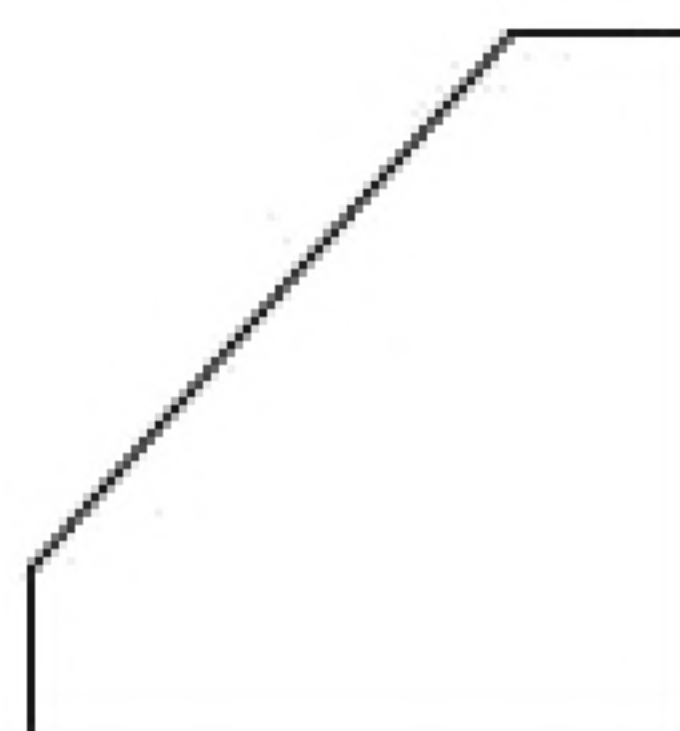


AB و d' متقاطع اند.



AB و d' متناظرند

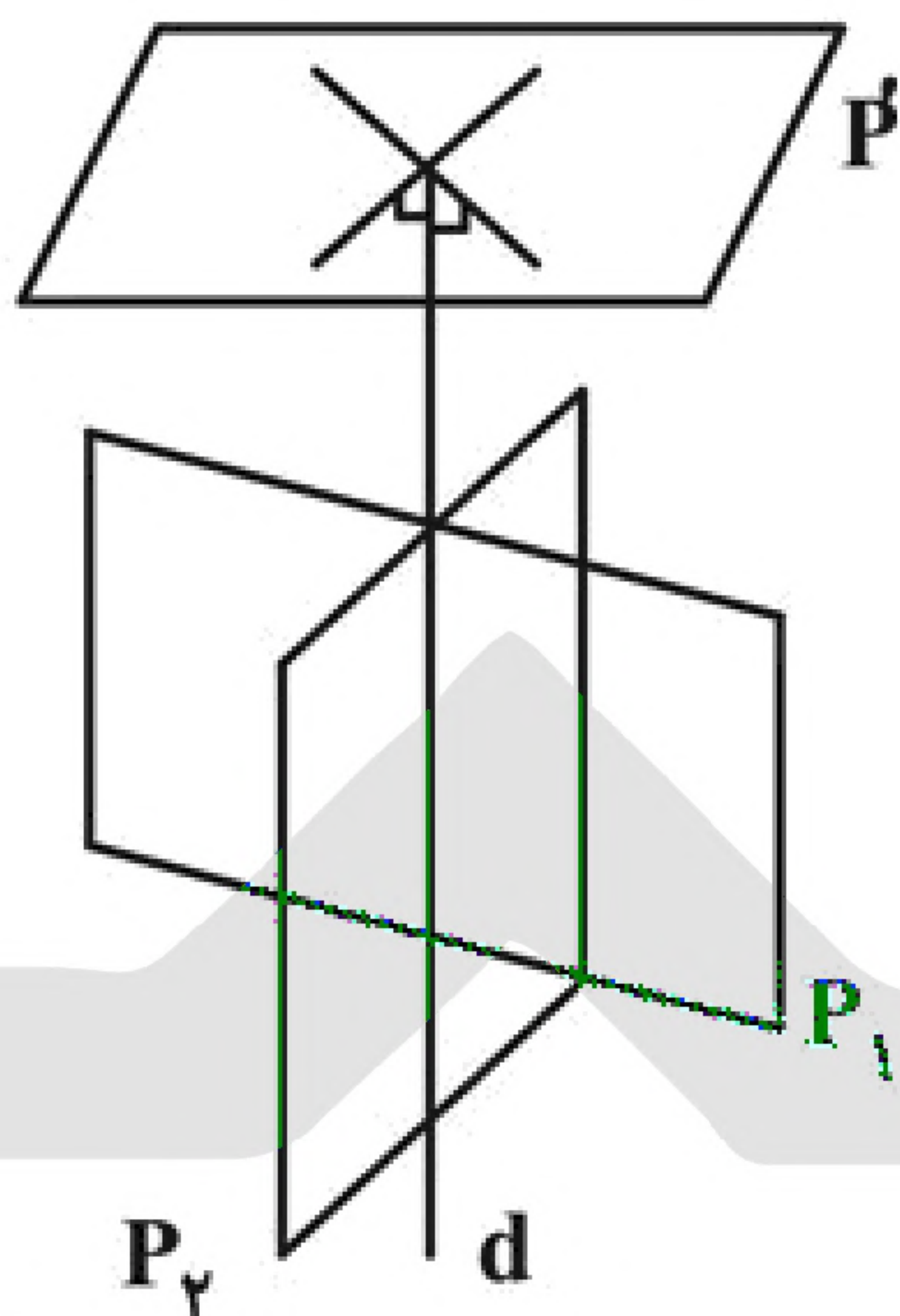
۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

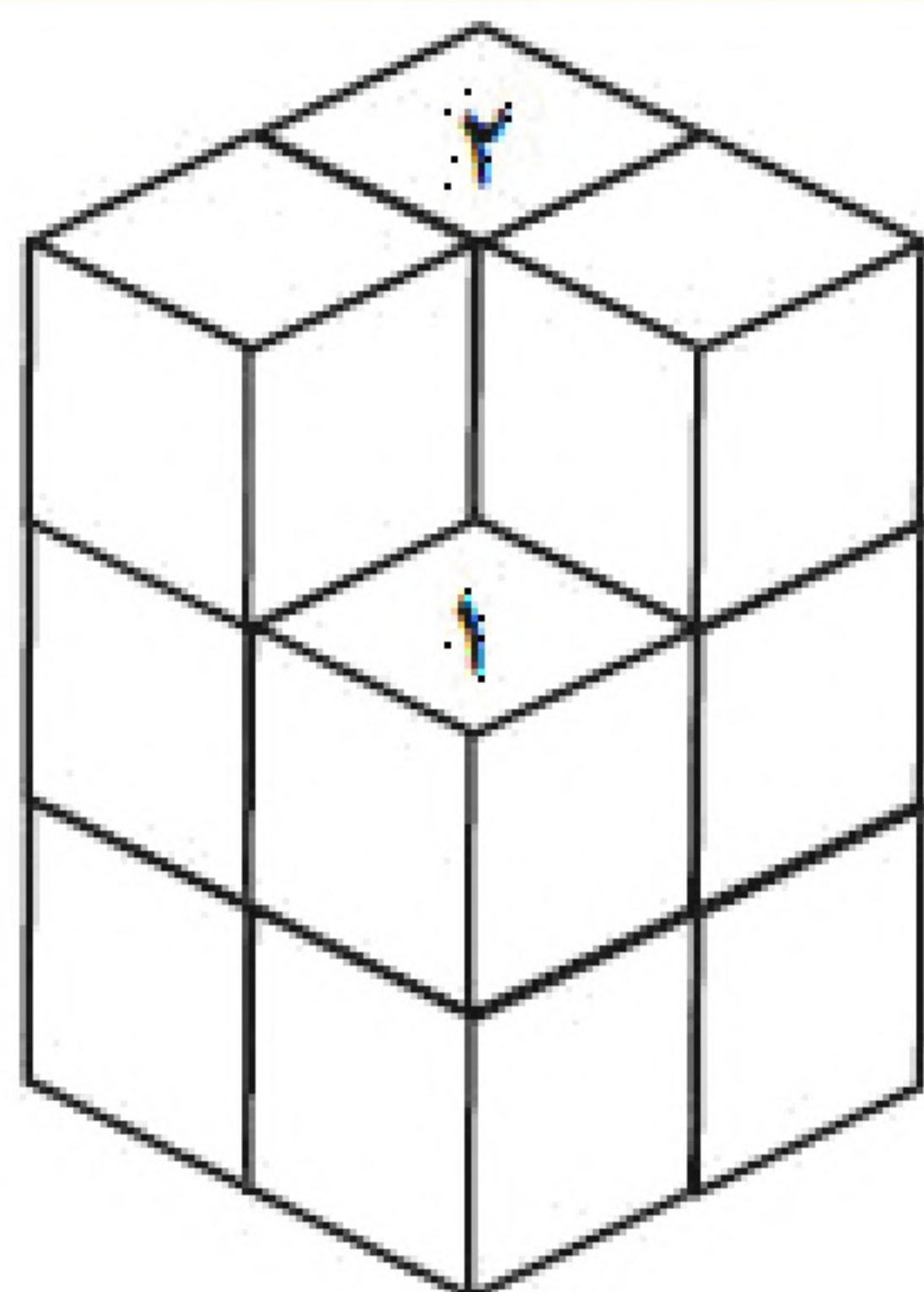


نمای روبه‌رو به شکل صحیح:



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که صفحه P_1 بر صفحه P' عمود است، اما لزوماً هر خط از صفحه P_1 بر صفحه P' عمود نیست.





۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در صورتی که این سازه را به طور کامل وارد یک مخزن رنگ کنیم، چهار مکعب ردیف پایین و دو مکعبی که با شماره‌های ۱ و ۲ و در شکل مشخص شده‌اند، سه وجه رنگی خواهند داشت.

