

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

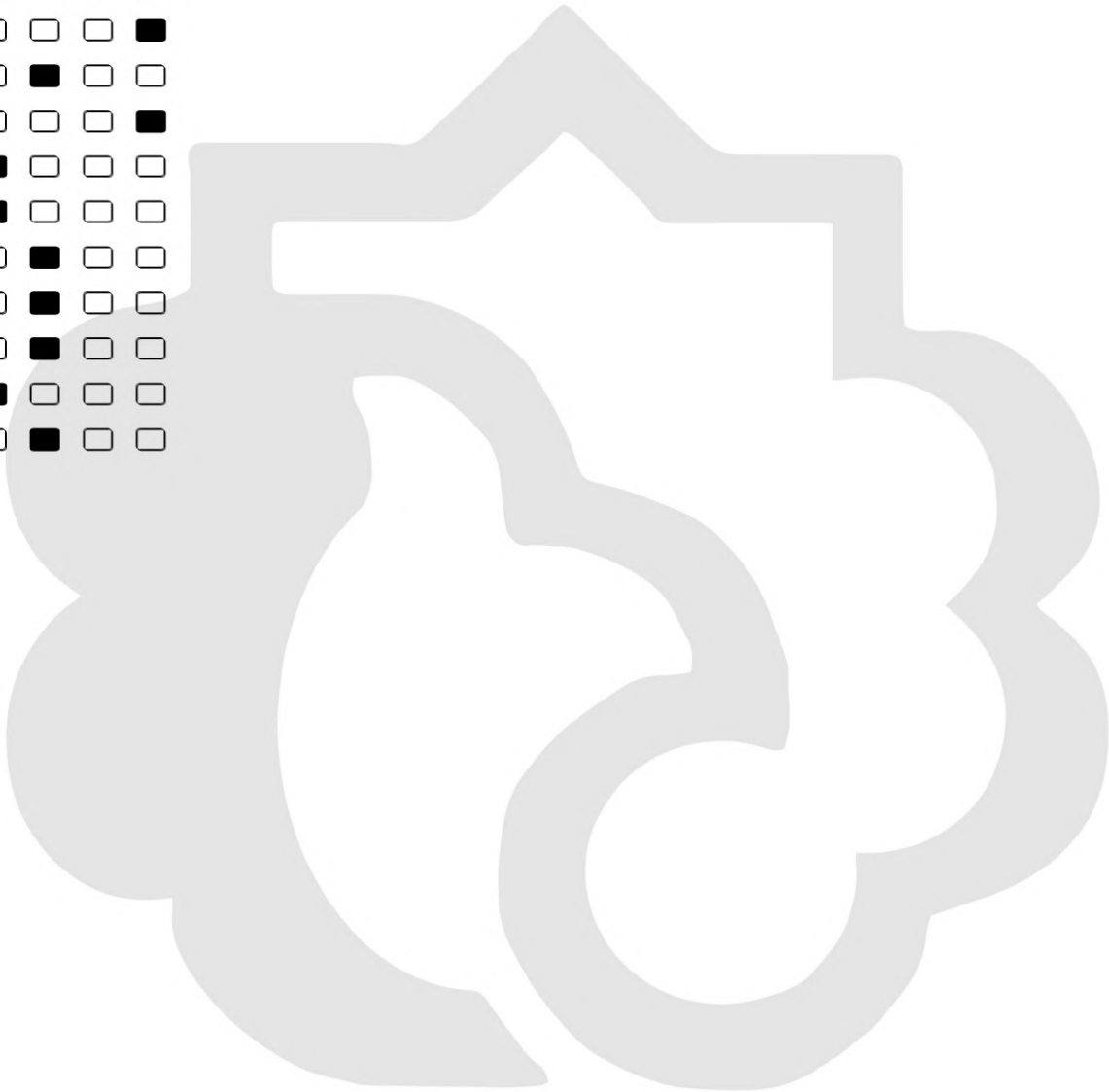
www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

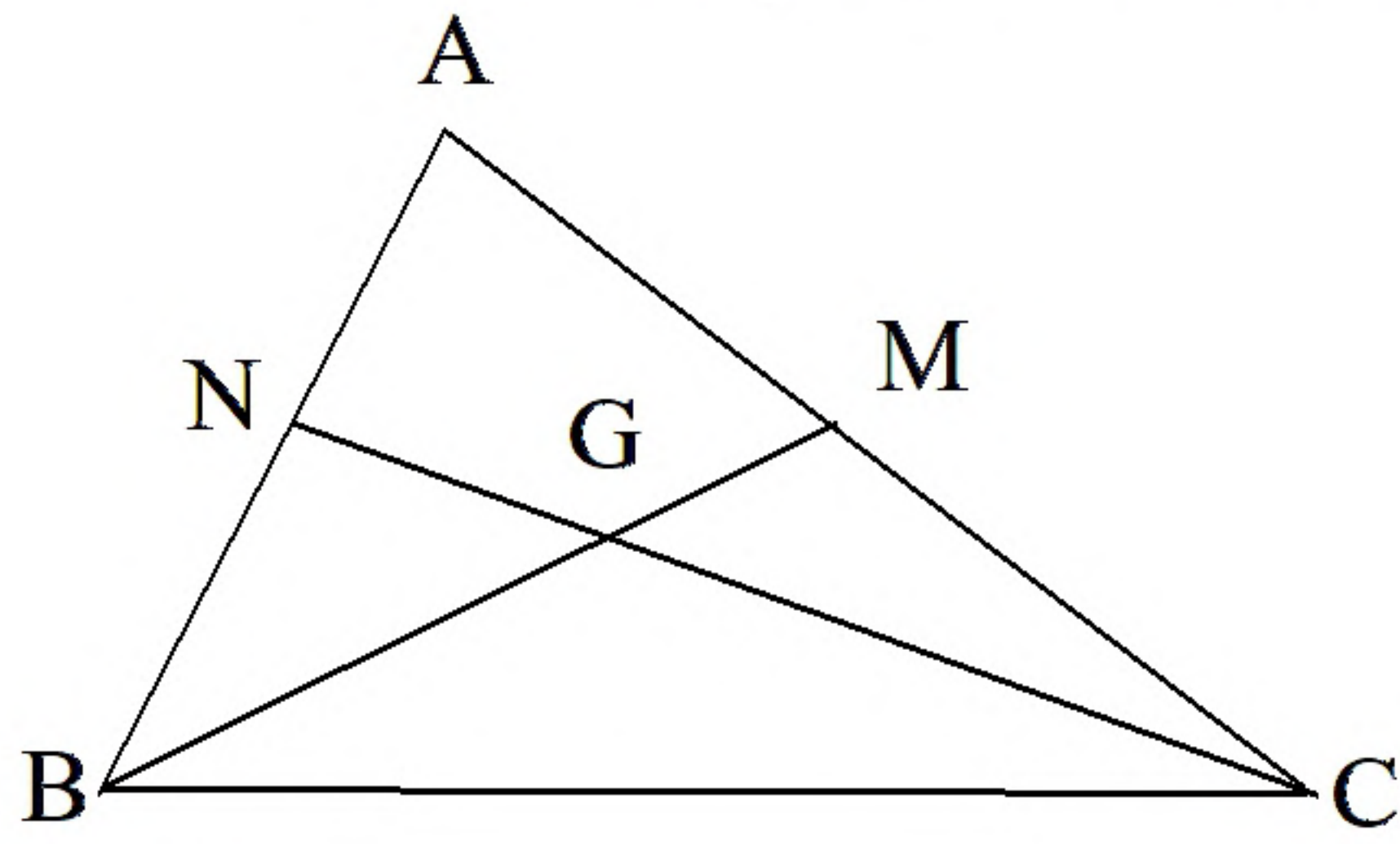


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در صورتی که G محل تلاقی دو میانه BM و CN باشد آنگاه خواهیم داشت:

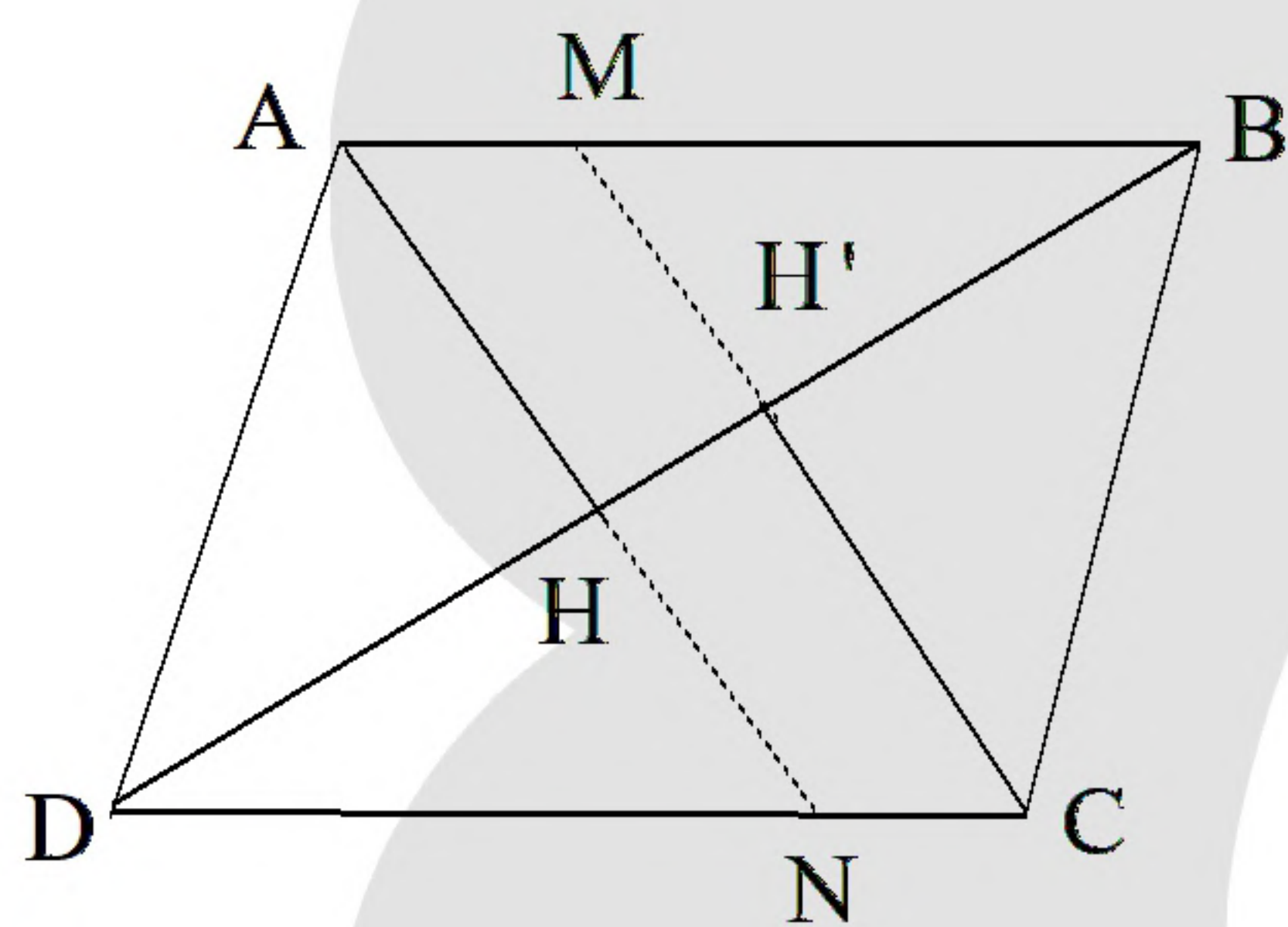


$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}(12) = 8, \quad CG = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}(9) = 6$$

$$S_{BGC} = \frac{1}{2}BG \times CG = \frac{1}{2}(8)(6) = 24$$

در ضمن می دانیم:

$$S_{BGC} = \frac{1}{3}S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BGC} = 3 \times 24 = 72$$



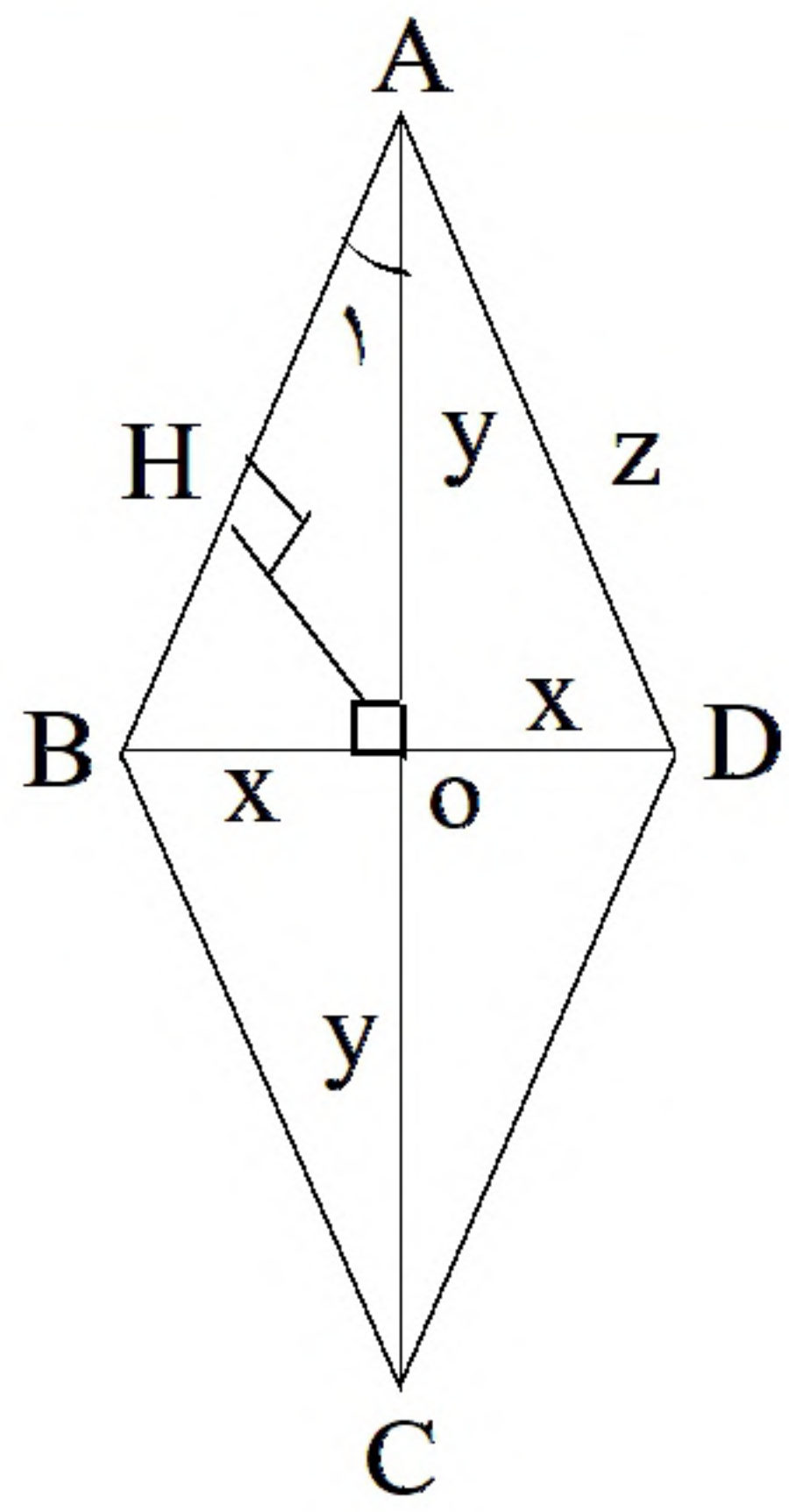
۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به داده‌های سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت به طوری که اگر $HH' = x$ آنگاه $BH' = DH = 2x$. در ضمن AH و CH' بر قطر BD عمودند پس موازیند. با استفاده از قضیه تالس می نویسیم:

$$AH \parallel MH' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{MH'}{AH} = \frac{BH'}{BH} \Rightarrow \frac{MH'}{AH} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \quad (1)$$

به همین ترتیب $\frac{NH}{CH'} = \frac{2}{3}$ پس دو ذوزنقه $AMH'H$ و $CNHH'$ چون دارای ارتفاع مشترک HH' و قاعده‌های مساویند پس هم‌مساحتند، داریم:

$$\frac{\text{مساحت کوچکترین مثلث}}{\text{مساحت متوازی الاضلاع}} = \frac{S_{BMH'}}{S_{AMCN}} = \frac{\frac{1}{2}MH' \times BH'}{2S_{AMH'H}} = \frac{\frac{1}{2}MH' \times BH'}{2\left(\frac{1}{2}HH'(MH' + AH)\right)}$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{\frac{1}{2}MH'(2x)}{(x)\left(MH' + \frac{3}{2}MH'\right)} = \frac{MH'}{\frac{5}{2}MH'} = \frac{2}{5} \Rightarrow \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \frac{5}{2}(\text{مساحت مثلث})$$



۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند. با توجه به شکل داریم:

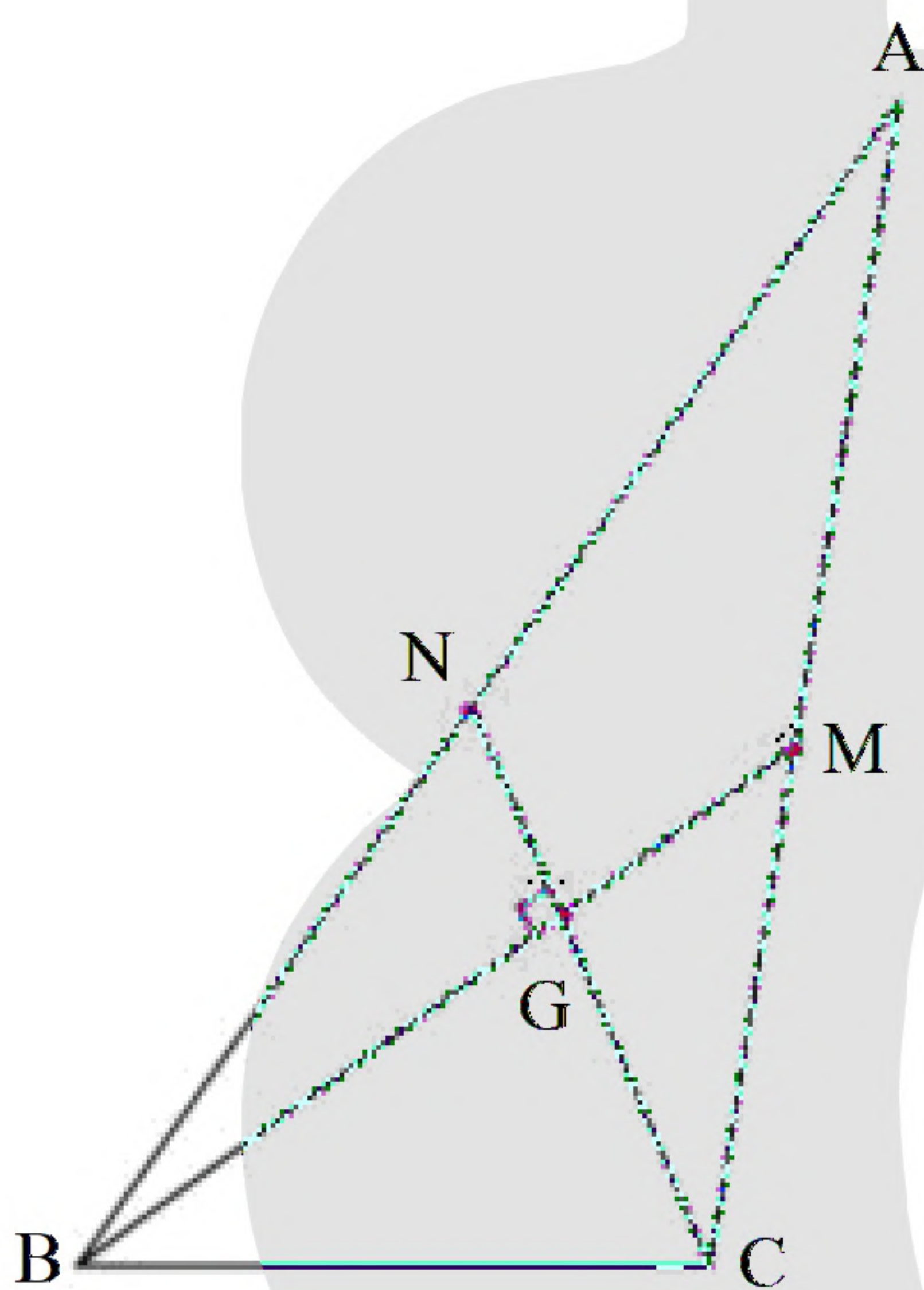
$$AB^2 = AC \times BD \Rightarrow z^2 = (2x)(2y) \Rightarrow z^2 = 4xy \Rightarrow xy = \frac{z^2}{4} \quad (1)$$

از طرف دیگر اگر ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB را رسم کنیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2} OH \times AB = \frac{1}{2} OA \times OB \Rightarrow OH \times z = xy \Rightarrow OH = \frac{xy}{z}$$

$$\xrightarrow{\text{از (1)}} OH = \frac{\frac{z^2}{4}}{z} \Rightarrow OH = \frac{z}{4} \Rightarrow OH = \frac{AB}{4}$$

چون در مثلث قائم‌الزاویه OAB ارتفاع وارد بر وتر ربع وتر است پس یک زاویه حاده این مثلث 15° است پس $\hat{A}_1 = 15^\circ$ پس $\hat{A} = 30^\circ$ در نتیجه: $\hat{B} = 150^\circ$



۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اگر G نقطه تلاقی میانه‌ها باشد آنگاه داریم:

$$CG = \frac{2}{3} CN \xrightarrow{CN = 4/5} CG = \frac{2}{3} (4/5) = 3$$

از طرف دیگر مساحت مثلث BGC مساوی $\frac{1}{3}$ مساحت مثلث ABC است.

$$S_{BGC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{3} (18) = 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} CG \times BG = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} (3) \times BG = 6 \Rightarrow BG = 4$$

$$BG = \frac{2}{3} BM$$

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} BM = 6$$

$$\frac{BM}{CN} = \frac{6}{4/5} = \frac{4}{3} \text{ بنابراین:}$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در لوزی قطرهای عمود منصف یکدیگرند. با توجه به شکل و فرض سؤال می‌نویسیم:

$$AB^2 = AC \times BD \Rightarrow z^2 = (2x)(2y) \Rightarrow z^2 = 4xy \Rightarrow xy = \frac{z^2}{4} \quad (1)$$

با رسم ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB نتیجه می‌گیریم.

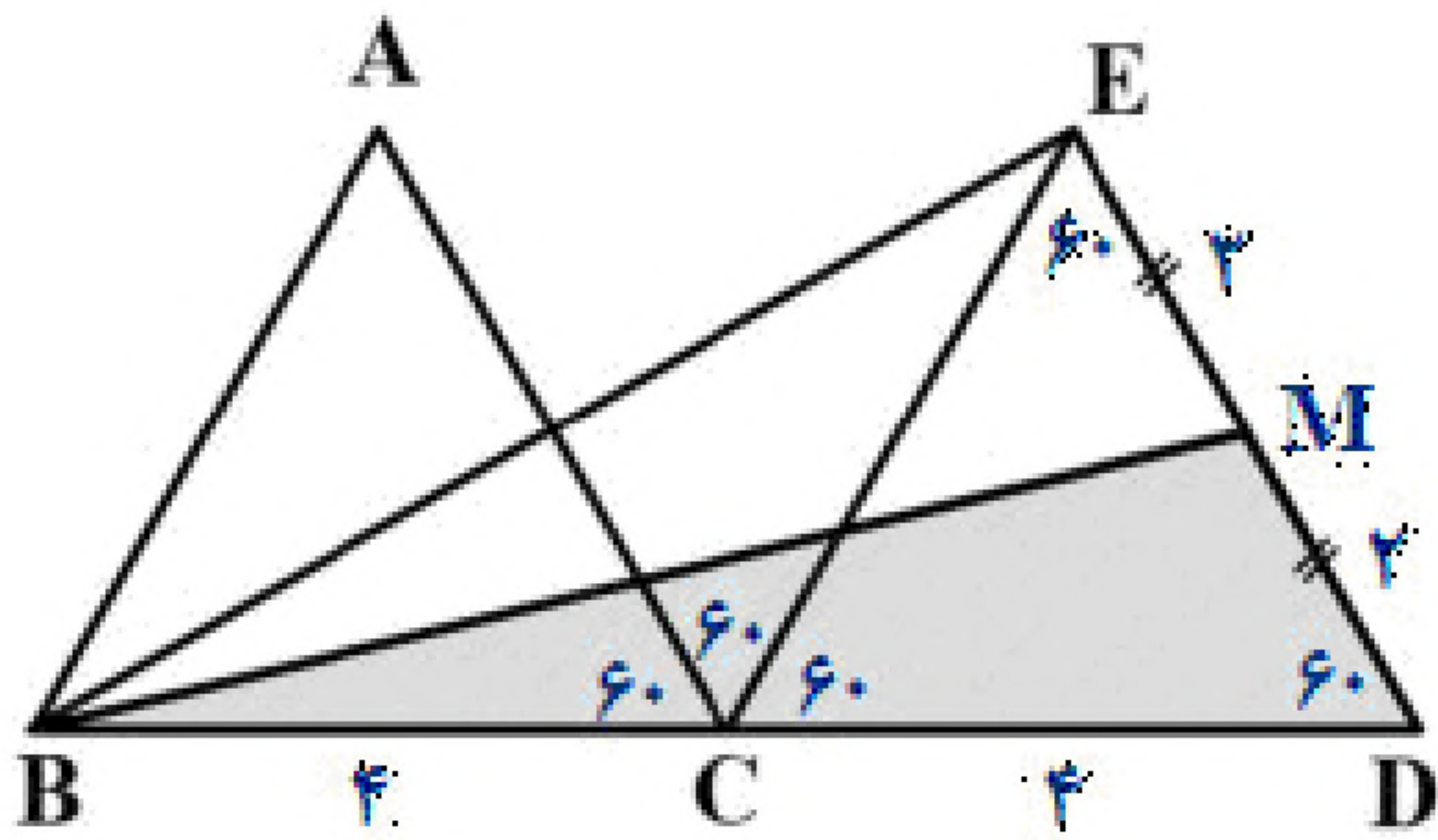
$$\frac{1}{2} OH \times z = \frac{1}{2} xy \Rightarrow OH = \frac{xy}{z} \xrightarrow{\text{از (1)}} OH = \frac{\frac{z^2}{4}}{z} \Rightarrow OH = \frac{z}{4}$$

چون ارتفاع OH در مثلث قائم‌الزاویه AOB مساوی $\frac{1}{4}$ وتر است پس یک زاویه حاده این مثلث 15° است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

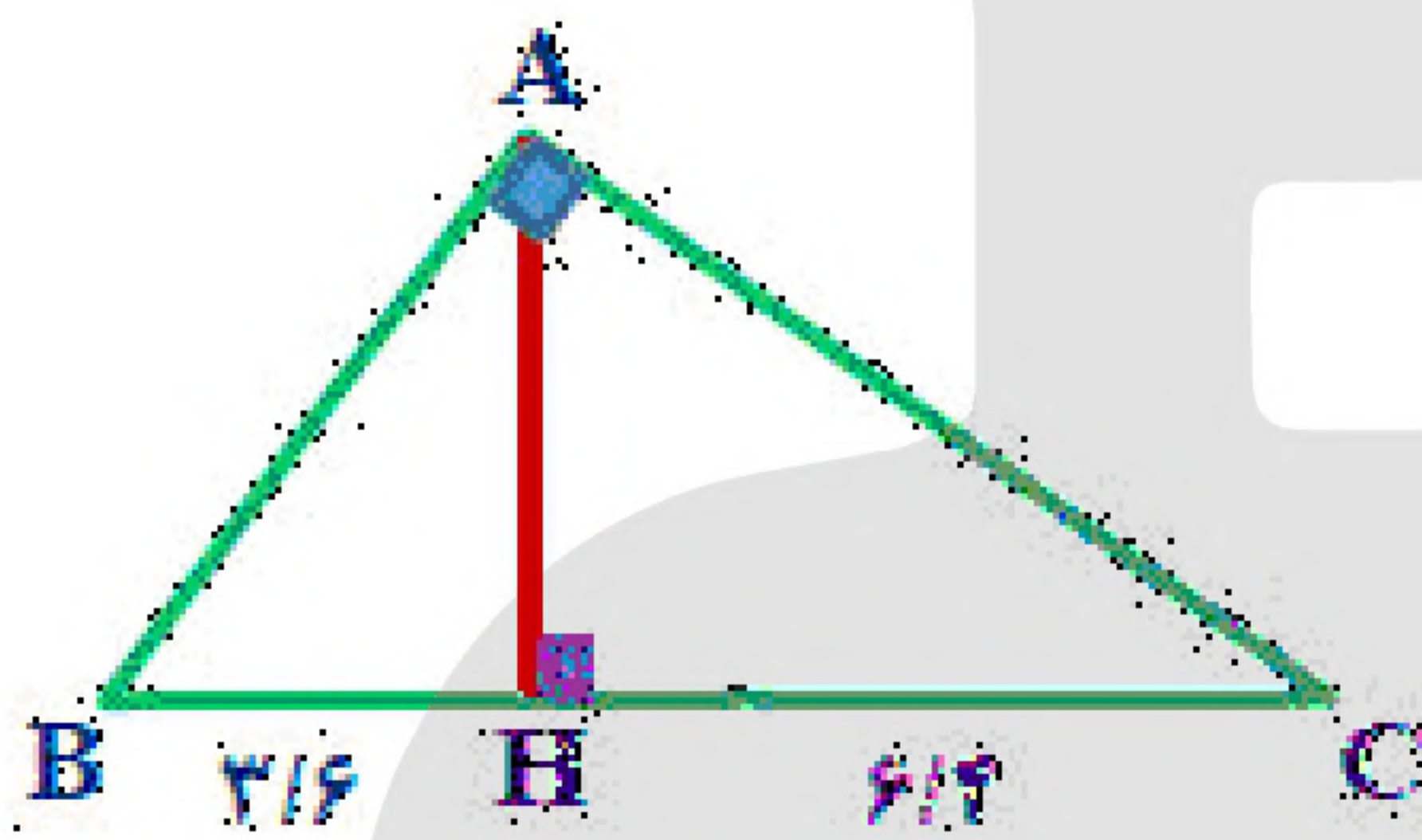


$$S_{\triangle BDM} = \frac{1}{2} \times MD \times BD \times \sin 60$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

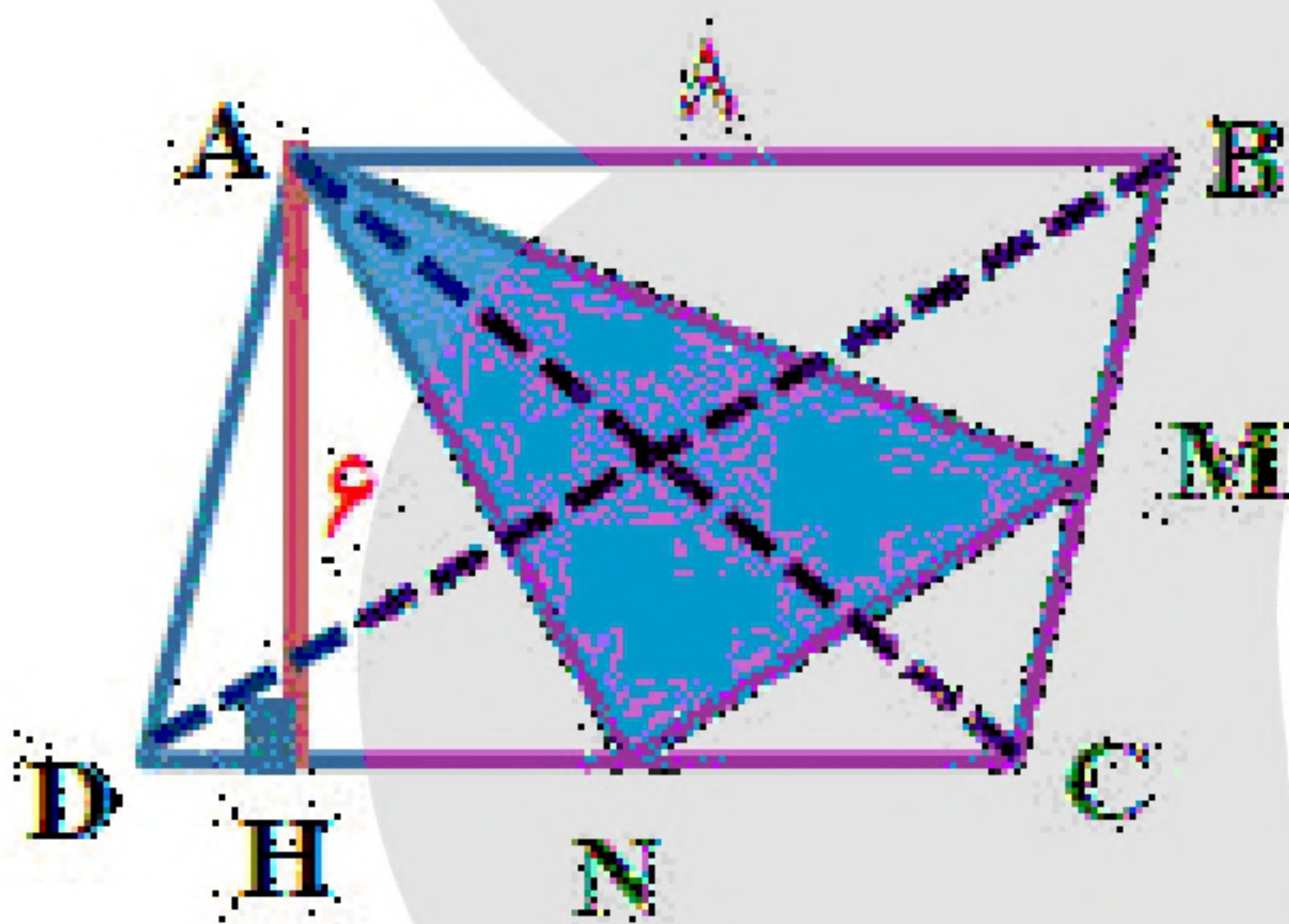
$$S_{\triangle BDM} = 3\sqrt{3}$$

۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \Rightarrow AB^2 = 3/6 \times 10 \Rightarrow AB = 6 \\ AC^2 = CH \times BC \Rightarrow AC^2 = 6/4 \times 10 \Rightarrow AC = 8 \\ \Rightarrow AB + AC = 14 \end{cases}$$

۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$S_{ABCD} = DC \times AH = 8 \times 6 = 48$$

$$S_{ABM} = S_{ACM} = S_{ACN} = S_{ADN} \Rightarrow S_{AMCN} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$$

$$= \frac{1}{2} \times 48 = 24$$

$$\frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}, MN \parallel BD \xrightarrow{\text{Tales}} S_{MNC} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 S_{BDC} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} S_{ABCD}\right) = 6$$

$$S_{AMN} = 24 - 6 \Rightarrow S_{AMN} = 18$$

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب از رابطه $\frac{n(n-3)}{2}$ به دست می آید، بنابراین داریم:

$$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{(n-1)(n-4)}{2} = 16 \Rightarrow \frac{(n^2 - 3n) - (n^2 - 5n + 4)}{2} = 16$$

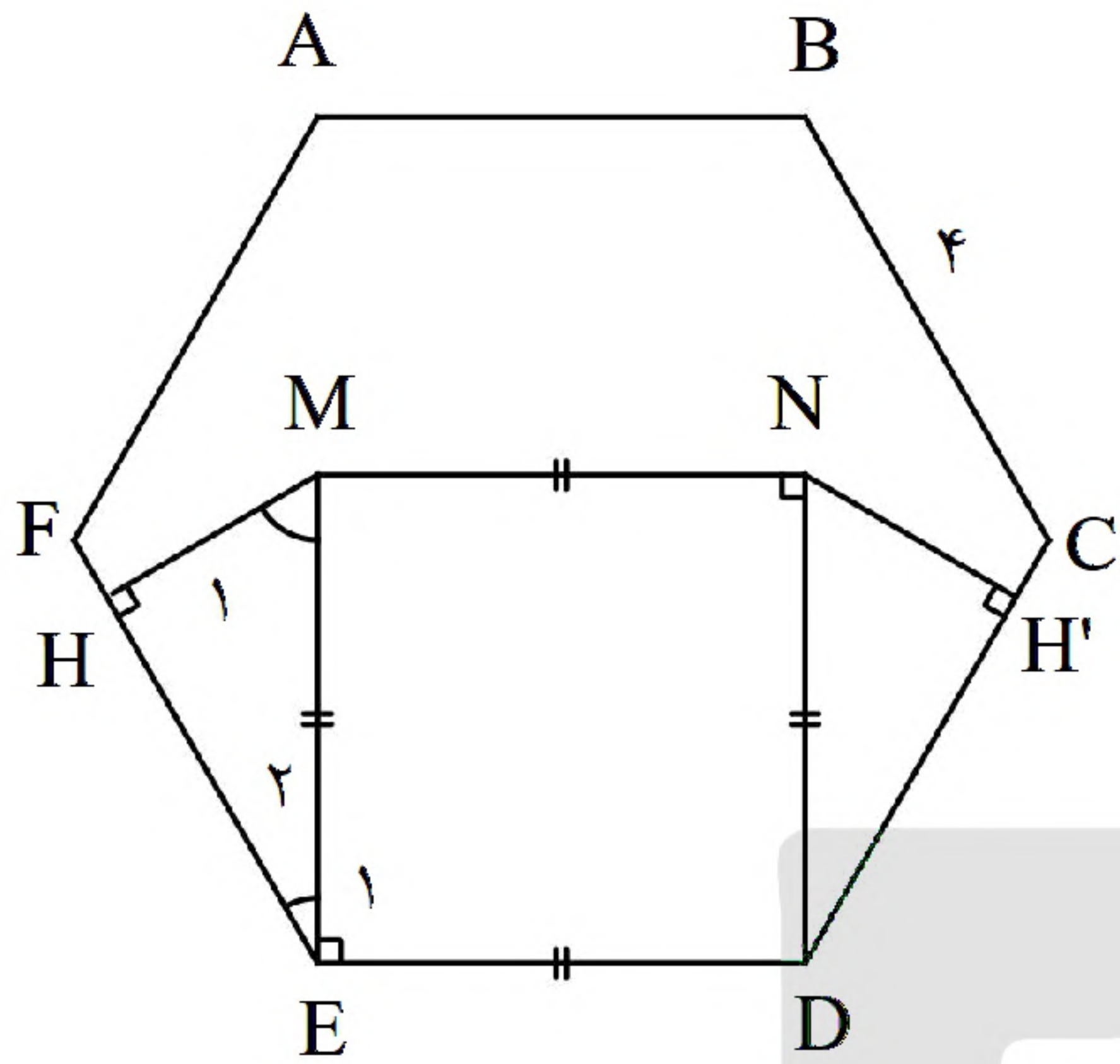
$$\Rightarrow 2n - 4 = 32 \Rightarrow 2n = 36 \Rightarrow n = 18$$

جواب مسئله برابر اختلاف تعداد قطرهای ۱۸ ضلعی و ۱۶ ضلعی است، بنابراین داریم:

$$\frac{18 \times 15}{2} - \frac{16 \times 13}{2} = 135 - 104 = 31$$



۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چهارضلعی MNDE مربع به ضلع ۴ است پس $\hat{E}_1 = 90^\circ$. در ضمن هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است پس $\hat{E}_2 = 30^\circ$ در نتیجه در مثل قائم‌الزاویه MHE زاویه \hat{M}_1 برابر 60° می‌شود بنابراین:



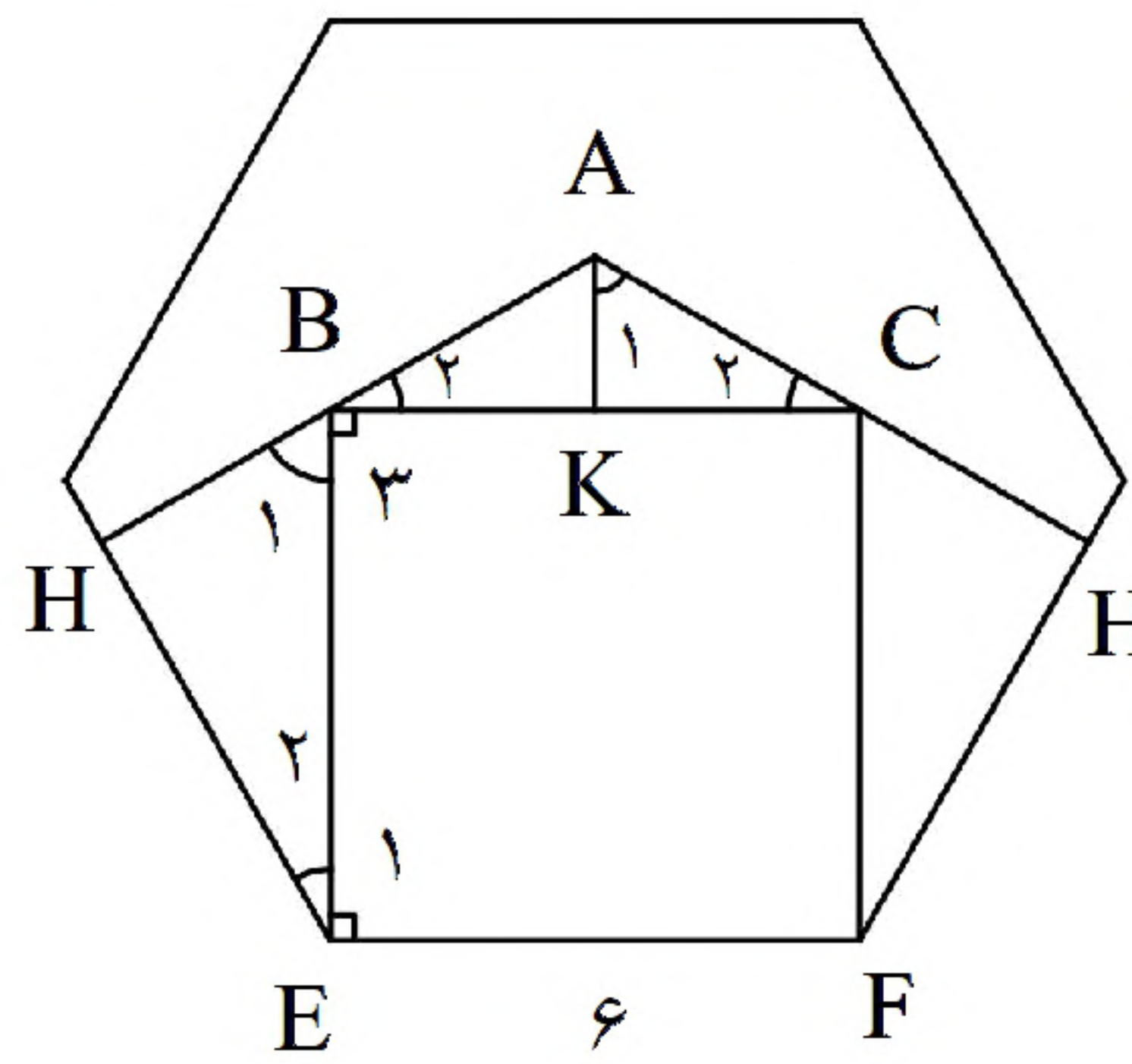
$$\triangle MEH : \hat{M}_1 = 60^\circ \Rightarrow HE = \frac{\sqrt{3}}{2} ME \xrightarrow{ME=4} HE = 2\sqrt{3}$$

$$\triangle MEH : \hat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow MH = \frac{1}{2} ME \xrightarrow{ME=4} MH = 2$$

$$S_{MEH} = \frac{1}{2} MH \times EH = \frac{1}{2} (2(2\sqrt{3})) = 2\sqrt{3}$$

پس:

به همین ترتیب مشخص می‌شود $S_{NDH'} = 2\sqrt{3}$ بنابراین مجموع مساحت‌های دو مثلث MHE و NDH' برابر $4\sqrt{3}$ است.



۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سوال چهارضلعی BCFE مربع است. پس

$$\hat{E}_1 = 90^\circ$$

از طرف دیگر هر زاویه داخلی شش ضلعی منتظم 120° است. بنابراین:

$$\hat{E}_1 + \hat{E}_2 = 120^\circ \xrightarrow{\hat{E}_1 = 90^\circ} \hat{E}_2 = 30^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 = 60^\circ$$

چون $\hat{B}_3 = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 = 60^\circ$ پس: $\hat{B}_2 = 30^\circ$.

به همین ترتیب معلوم می شود $\hat{C}_2 = 30^\circ$ پس مثلث ABC متساوی الساقین با زاویه ی رأس 120° است. بنابراین اگر ارتفاع AK وارد بر قاعده ی BC را رسم کنیم. AK میانه و نیمساز هم هست. در نتیجه:

$$BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

در مثلث قائم الزاویه ی AKC ضلع KC روبرو به زاویه ی 60° است. پس:

$$KC = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$AK = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) \Rightarrow AK = \sqrt{3}$$

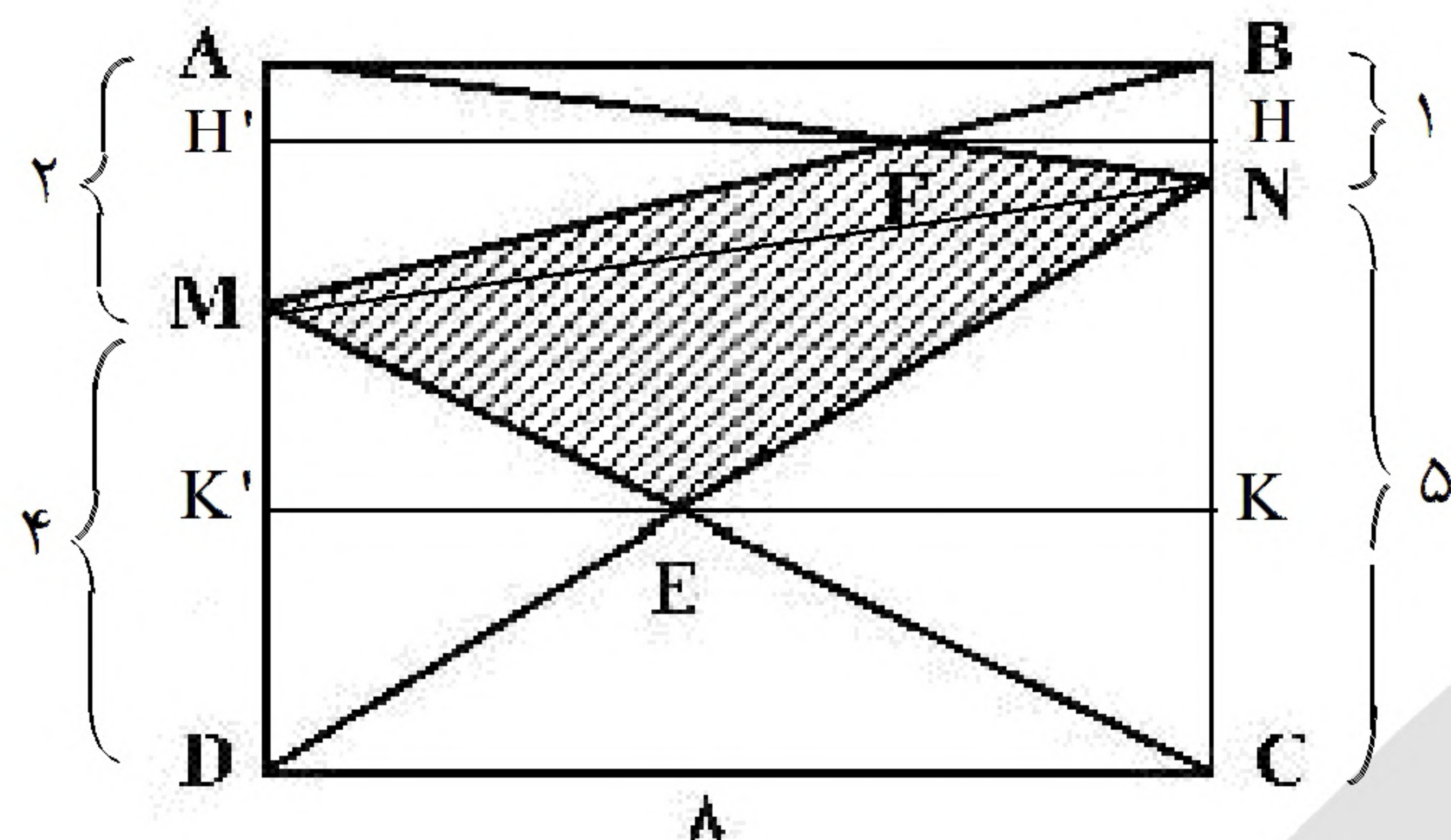
و AK روبرو به زاویه ی 30° است. پس:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AK \times BC = \frac{1}{2} (\sqrt{3}) (6) = 3\sqrt{3}$$

بنابراین:



۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از نقطه‌ی F عمود HH' و از نقطه‌ی E عمود KK' را بر عرض‌های مستطیل وارد می‌کنیم.



$$BN \parallel AM \Rightarrow \triangle BFN \sim \triangle AFM \Rightarrow \frac{FH}{FH'} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{FH}{HH'} = \frac{1}{3} \xrightarrow{HH' = 8} FH = \frac{8}{3}$$

$$S_{BFN} = \frac{1}{2} FH \times BN = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right) (1) = \frac{4}{3}$$

پس:

$$NC \parallel MD \Rightarrow \triangle ENC \sim \triangle MDE \Rightarrow \frac{EK}{EK'} = \frac{5}{4} \xrightarrow[\text{در مخرج}]{\text{ترکیب}} \frac{EK}{KK'} = \frac{5}{9} \xrightarrow{KK' = 8} EK = \frac{40}{9}$$

$$S_{ENC} = \frac{1}{2} EK \times NC = \frac{1}{2} \times \frac{40}{9} \times 5 = \frac{100}{9}$$

پس:

حال پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم در این صورت دو ذوزنقه ABNM و MNCD ایجاد می‌شود. با استفاده از قضیه شبه پروانه داریم.

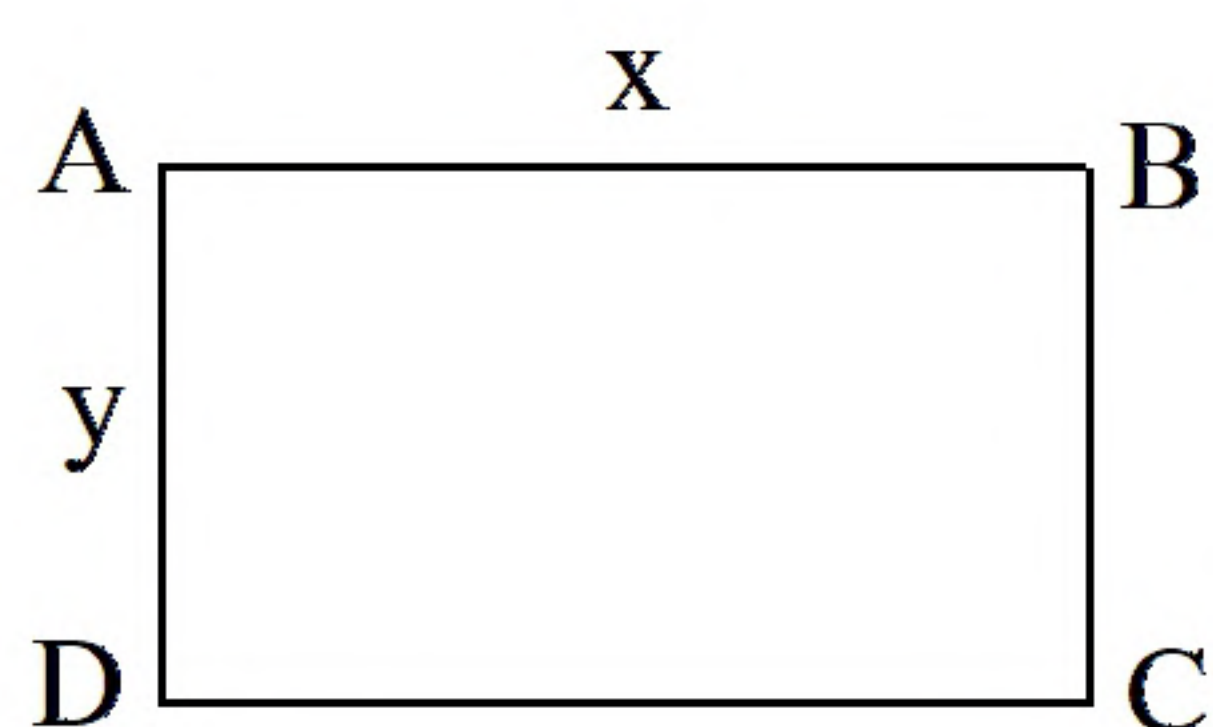
$$ABNM \text{ ذوزنقه} \Rightarrow S_{MFN} = \sqrt{S_{FBN} \times S_{AFM}} = \sqrt{S_{FBN} \times 4S_{FBN}} = 2S_{FBN} = \frac{8}{3}$$

$$MNCD \text{ ذوزنقه} \Rightarrow S_{MEN} = \sqrt{S_{ENC} \times S_{MED}} = \sqrt{S_{ENC} \times \frac{16}{25}S_{ENC}} = \frac{4}{5}S_{ENC} = \frac{4}{5} \left(\frac{100}{9}\right) = \frac{80}{9}$$

$$S_{MENF} = S_{MFN} + S_{MEN} = \frac{8}{3} + \frac{80}{9} = \frac{104}{9}$$

بنابراین:

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طول مستطیل را x و عرض آنرا y در نظر می‌گیریم. بنابر فرض سؤال $x = \frac{1}{5}y - 2$ داریم:



$$S_{ABCD} = 192 \Rightarrow xy = 192 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}y - 2\right)y = 192$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}y^2 - 2y - 192 = 0 \xrightarrow{\text{ضرب در ۵}} 3y^2 - 4y - 384 = 0$$

این معادله را از دستور b' حل می‌کنیم.

$$y = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 1152}}{3} = \frac{2 \pm 34}{3} \Rightarrow y = 12$$

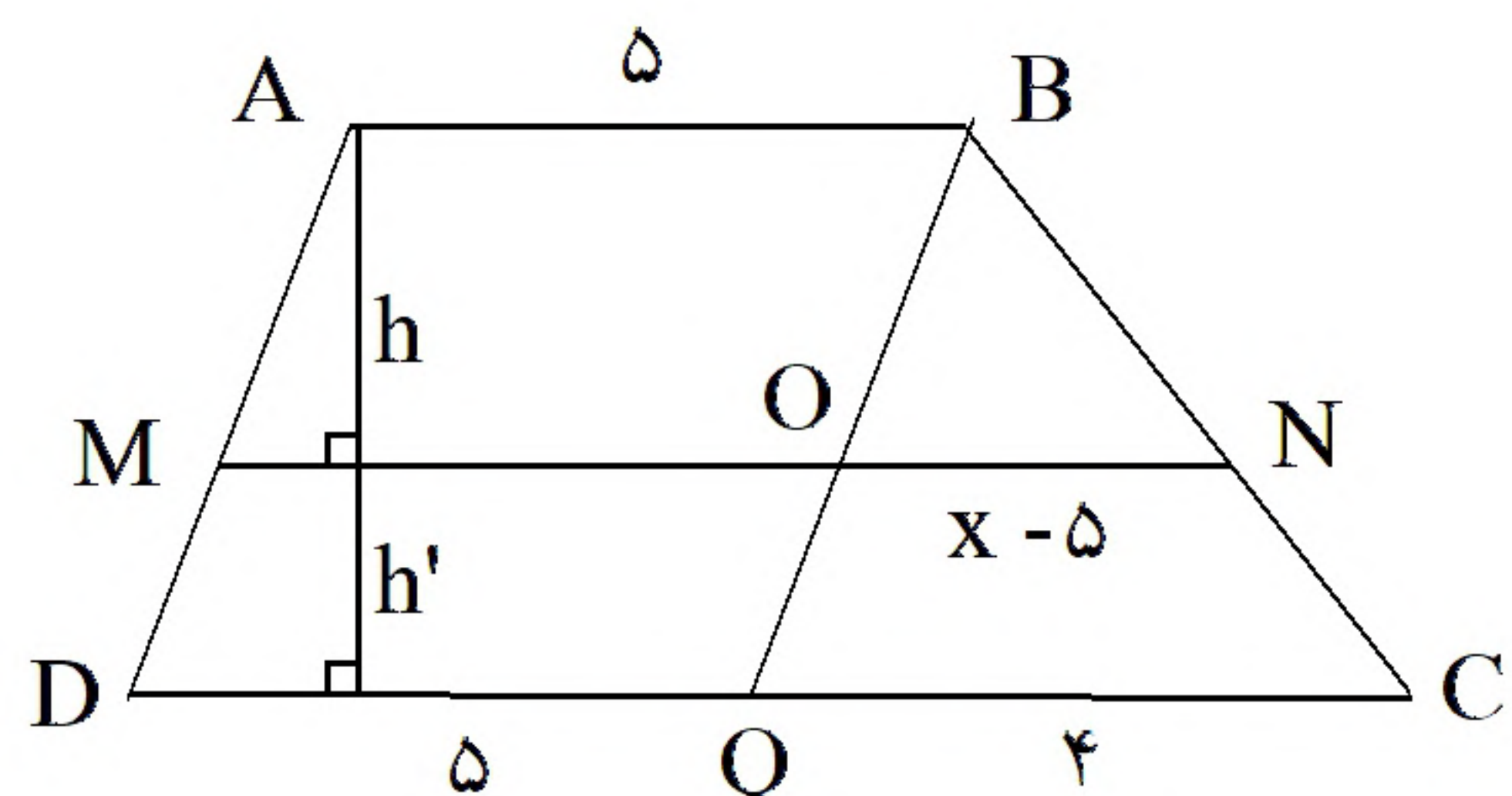
$$\text{محیط مستطیل} = 2(x + y) = 2(16 + 12) = 56$$

پس $x = 16$ در نتیجه:



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ارتفاع دوزنقه را رسم می‌کنیم و از رأس B پاره‌خط BQ را موازی AD ترسیم می‌کنیم تا دوزنقه‌ی ABCD به متوازی‌الاضلاع ABQD و مثلث BQC تقسیم شود. در این صورت $DQ = 5$ و $QC = 4$ است. با فرض $MN = x$ نتیجه می‌گیریم $ON = x - 5$ داریم:



$$S_{ABNM} = S_{MNCD} \Rightarrow \frac{1}{2}(h)(5+x) = \frac{1}{2}(h')(9+x)$$

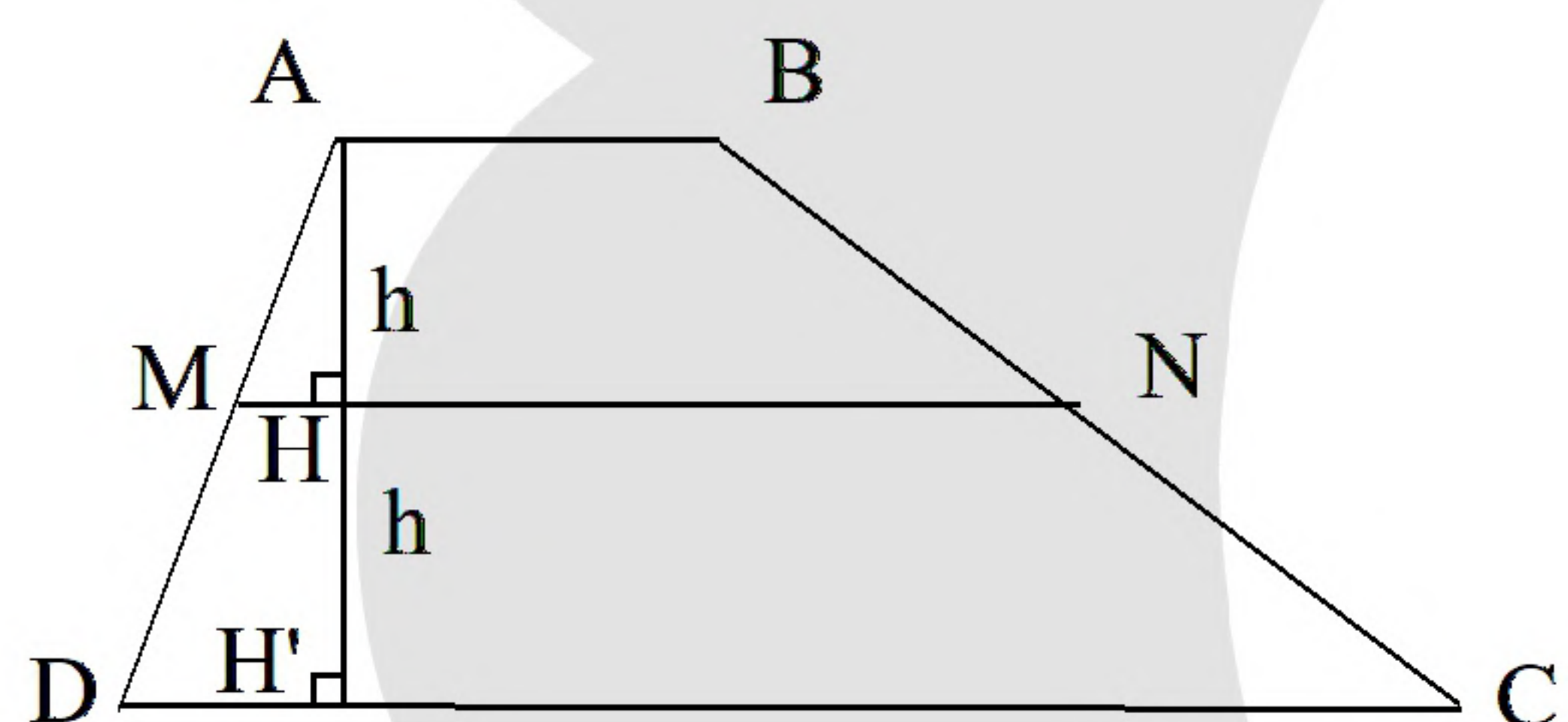
$$\Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{9+x}{5+x} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{h}{h+h'} = \frac{x+9}{2x+14} \quad (1)$$

از طرف دیگر: $BQC : ON \parallel QC \Rightarrow \triangle BQN \sim \triangle BQC \Rightarrow \frac{ON}{QC} = \frac{h}{h+h'} \Rightarrow \frac{x-5}{4} = \frac{h}{h+h'} \quad (2)$

از ۱، ۲ $\Rightarrow \frac{x+9}{2x+14} = \frac{x-5}{4} \Rightarrow 2x^2 + 4x - 70 = 4x + 36 \Rightarrow 2x^2 = 106 \Rightarrow x^2 = 53 \Rightarrow x = \sqrt{53}$

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند مساوی نصف مجموع دو قاعده است. در صورتی که M و N وسط‌های دو ساق دوزنقه‌ی ABCD باشند پس $MN = \frac{AB+DC}{2}$ است.

در ضمن بنابر قضیه‌ی تالس اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آن‌گاه $AH = HH' = h$. حال بنابر فرض می‌نویسیم.



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}h(AB+MN)}{\frac{1}{2}h(MN+DC)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{AB+MN}{MN+DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN+DC = 2AB+2MN$$

$$\Rightarrow DC - 2AB = MN \Rightarrow DC - 2AB = \frac{AB+DC}{2} \Rightarrow 2DC - 4AB = AB+DC$$

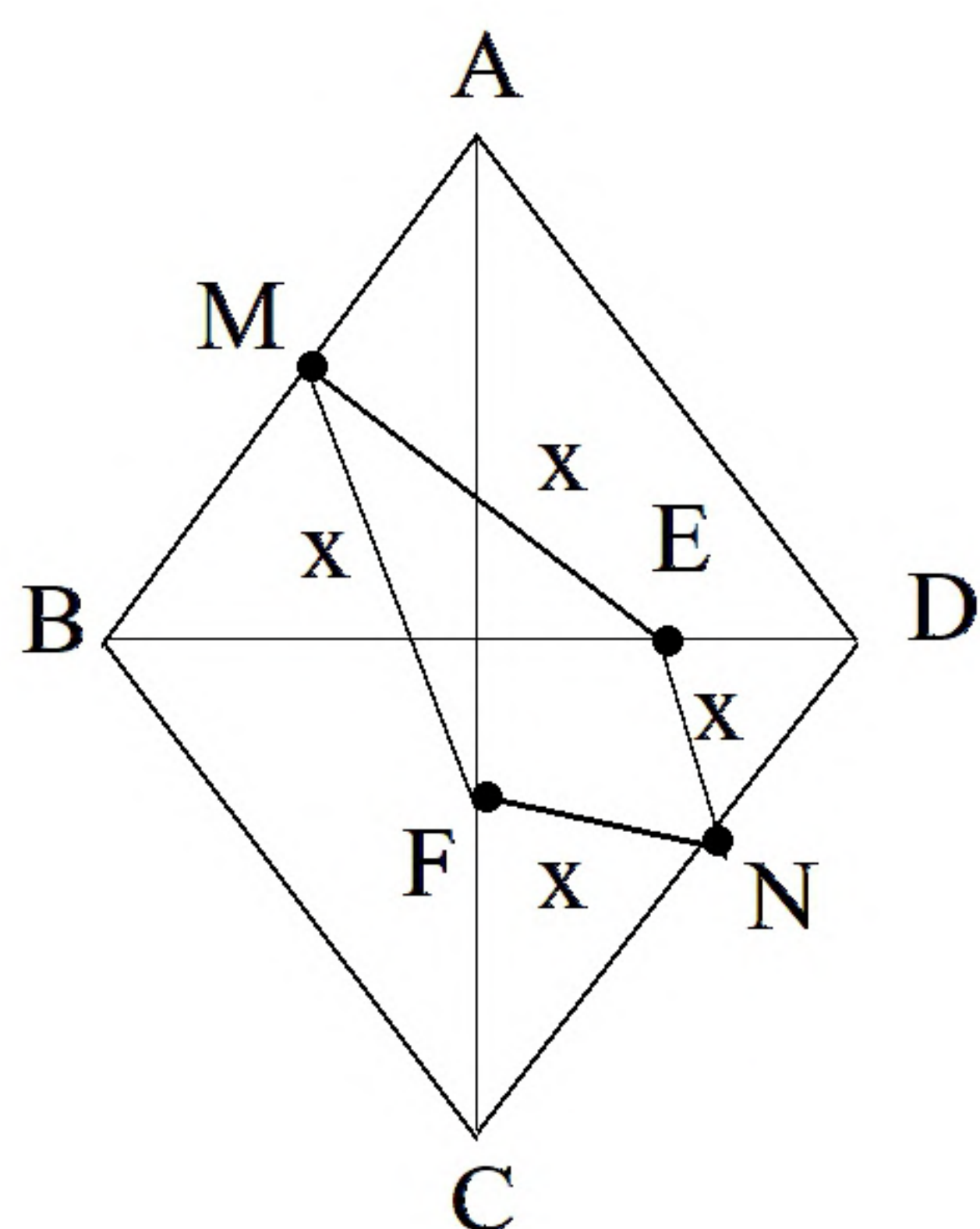
$$\Rightarrow DC = 5AB \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{5}$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در نظر بگیرید نقاط M و N وسط‌های دو ضلع غیرمجاور چهارضلعی ABCD است و نقاط E و F وسط‌های دو قطر آن است و چهارضلعی MENF لوزی به ضلع x است. بنابر قضیه‌ی میان خط دو مثلث نتیجه می‌گیریم.

$$BC = 2MF = 2EN = 2x \text{ و } AD = 2ME = 2FN = 2x$$

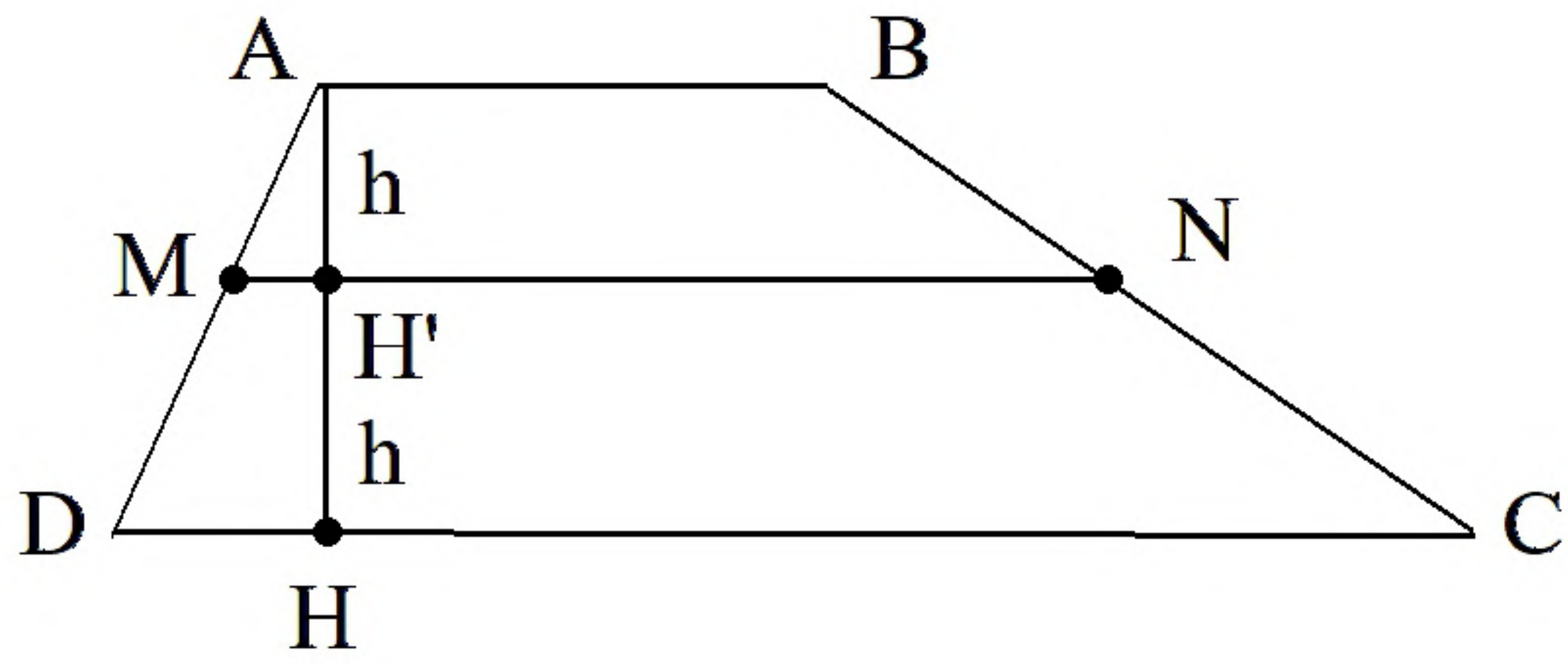
پس $BC = AD$ یعنی دو ضلع غیرمجاور دیگر چهارضلعی ABCD برابرند.





۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دوزنقه‌ی ABCD نقاط M و N وسط‌های دو ساق هستند پس بنابر قضیه‌ی میان خط در دوزنقه $MN = \frac{AB + DC}{2}$ و اگر ارتفاع AH را رسم کنیم آن‌گاه $AH' = HH' = h$. بنابر فرض سؤال

داریم.



$$\frac{S_{ABNM}}{S_{MNCD}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}h(AB + MN)}{\frac{1}{2}h(MN + DC)} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5AB + 5MN = 3MN + 3DC$$

$$\Rightarrow 5AB - 3DC = -2MN \Rightarrow 5AB - 3DC = -2\left(\frac{AB + DC}{2}\right) \Rightarrow 6AB = 2DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$$