

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

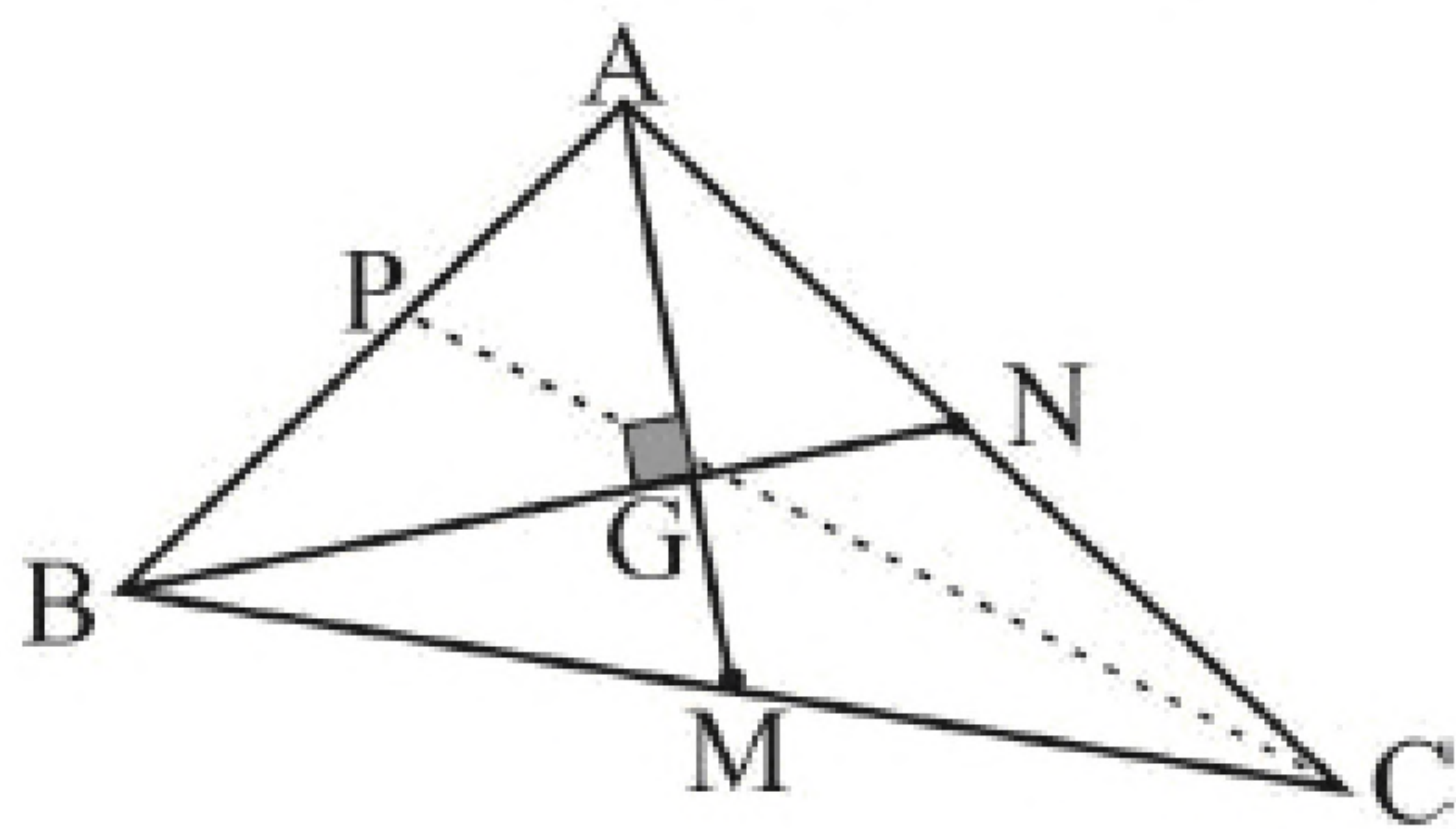


	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. میانه‌های هر مثلث، یکدیگر را به نسبت ۲ و ۱ قطع می‌کنند، بنابراین:



$$AG = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$BG = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

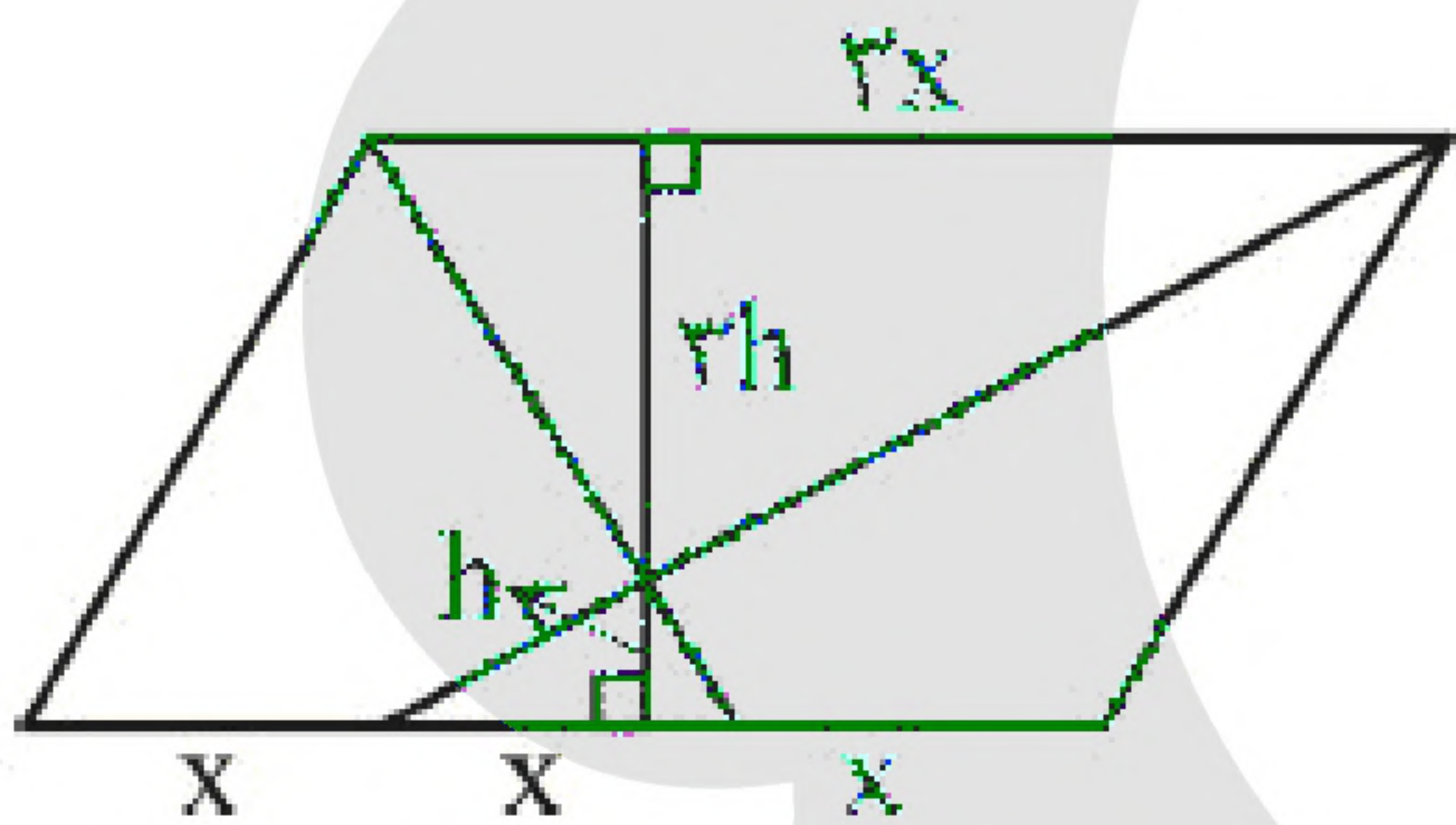
$$\triangle ABG : AB^2 = AG^2 + BG^2 = 6^2 + 4^2 = 52$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

مطابق شکل پاره خط GP میانه وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABG و اندازه آن نصف وتر است:

$$GP = \frac{1}{2} AB = \sqrt{13} \Rightarrow CP = 3GP = 3\sqrt{13} \quad \text{طول میانه سوم}$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\text{مساحت کل} = 3x \times 4h = 12xh$$

$$\text{مساحت ناحیه رنگی} = 12xh - \left( \frac{1}{2} \times xh + \frac{1}{2} \times 3x \times 3h \right)$$

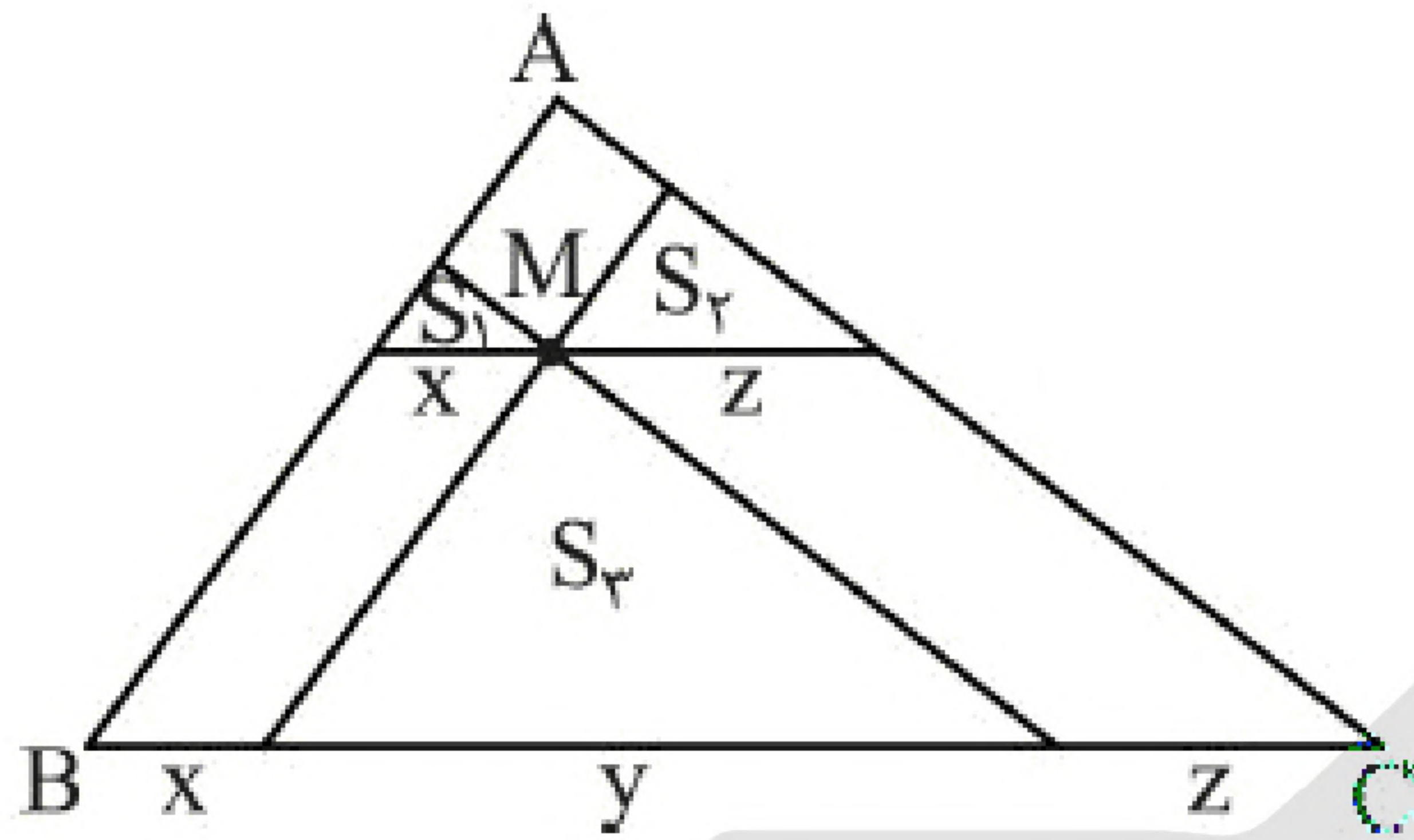
$$= 12xh - 5xh = 7xh$$

$$\text{مساحت مثلث MNP} = \frac{1}{2} xh$$

$$\frac{\text{مساحت ناحیه سایه زده}}{\text{مساحت مثلث MNP}} = \frac{7xh}{\frac{1}{2} xh} = 14$$



۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به موازی بودن خطوط، هریک از مثلث‌های با مساحت  $S_1$ ،  $S_2$  و  $S_3$  با مثلث  $ABC$  متشابه‌اند. با توجه به مقادیر  $x$ ،  $y$  و  $z$  مشخص شده در شکل:



$$\frac{S_1}{S_{ABC}} = \left( \frac{x}{x+y+z} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_{ABC}}}$$

$$= \frac{x}{x+y+z} \quad (1)$$

$$\frac{S_2}{S_{ABC}} = \left( \frac{y}{x+y+z} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_2}{S_{ABC}}}$$

$$= \frac{y}{x+y+z} \quad (2)$$

$$\frac{S_3}{S_{ABC}} = \left( \frac{z}{x+y+z} \right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_3}{S_{ABC}}} = \frac{z}{x+y+z} \quad (3)$$

$$1, 2, 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{\sqrt{S_{ABC}}} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_{ABC}} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \Rightarrow \sqrt{S_{ABC}} = 1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow S_{ABC} = 36$$



۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دو مثلث  $ABC$  و  $ABD$  دارای قاعده مشترک  $AB$  هستند و ارتفاع نظیر این قاعده در دو مثلث (فاصله دو خط موازی) یکسان است؛ بنابراین  $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD}$ . با کم کردن  $S_{\triangle AOB}$  از دو طرف این رابطه:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{AO}{OC} \\ \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} = \frac{AO}{OC} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle DOC}} = \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle BOC}} \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{y}{x}$$

مساحت سر پروانه  
مساحت بدن پروانه

$$\Rightarrow x^2 = z \cdot y \Rightarrow x^2 = 4 \times 9 \Rightarrow x = 6$$

$$S_{\square ABCD} = 2x + z + y = 2(6) + 4 + 9 = 25$$

توجه: این مسئله به «قضیه پروانه» در ذوزنقه مشهور است و برای به ذهن سپردن ساده‌تر نتایج آن به صورت زیر خلاصه می‌شود:

(۱) مساحت دو بال پروانه برای پرواز و حفظ تعادل باید یکسان باشد:  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = x$

(۲) مساحت بال پروانه واسطه هندسی بین مساحت سر  $y$  و بدن پروانه  $z$  است:  $x^2 = z \cdot y$

(۳)  $\sqrt{S_{\square}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

در همین تست به راحتی می‌توانستید از نتیجه ۳ استفاده کنید:

$$\sqrt{S_{\square}} = \sqrt{4} + \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{S_{\square}} = 2 + 3 \Rightarrow S_{\square} = 25$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مثلث  $ABC$  نقطه‌ی  $N$  محل تلاقی میانه‌هاست پس:

$$D_{BMN} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} \quad (1)$$

از طرف دیگر  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$  پس داریم:

$$S_{\triangle DOA} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD} \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow S_{\triangle DOA} = 3 S_{\triangle BMN} = 3 \times 5 = 15$$

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \xrightarrow{i = 2b} 34 = \frac{b}{2} + 2b - 1 \Rightarrow b = 14$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{ارتفاع مثلث} = \frac{\sqrt{3}}{2}a = ۳۰$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه دلخواه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از ۳ ضلع آن

در مثلث متساوی‌الاضلاع محل برخوردها (ارتفاع‌ها و نیمسازها و میانه‌ها) از هر رأس،  $\frac{2}{3}$  طول میانه (یا ارتفاع) است:

$$\text{فاصله مورد نظر سؤال} = \frac{2}{3}(۳۰) = ۲۰$$

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۵۴ \Rightarrow n = ۱۲$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha = \frac{(n-۲)180^\circ}{n} = \frac{10 \times 180^\circ}{12} = 150^\circ$$

هر زاویه داخلی

$$\beta = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

هر زاویه خارجی

$$150^\circ - 30^\circ = 120^\circ = \text{اختلاف زاویه داخلی و خارجی یک رأس}$$

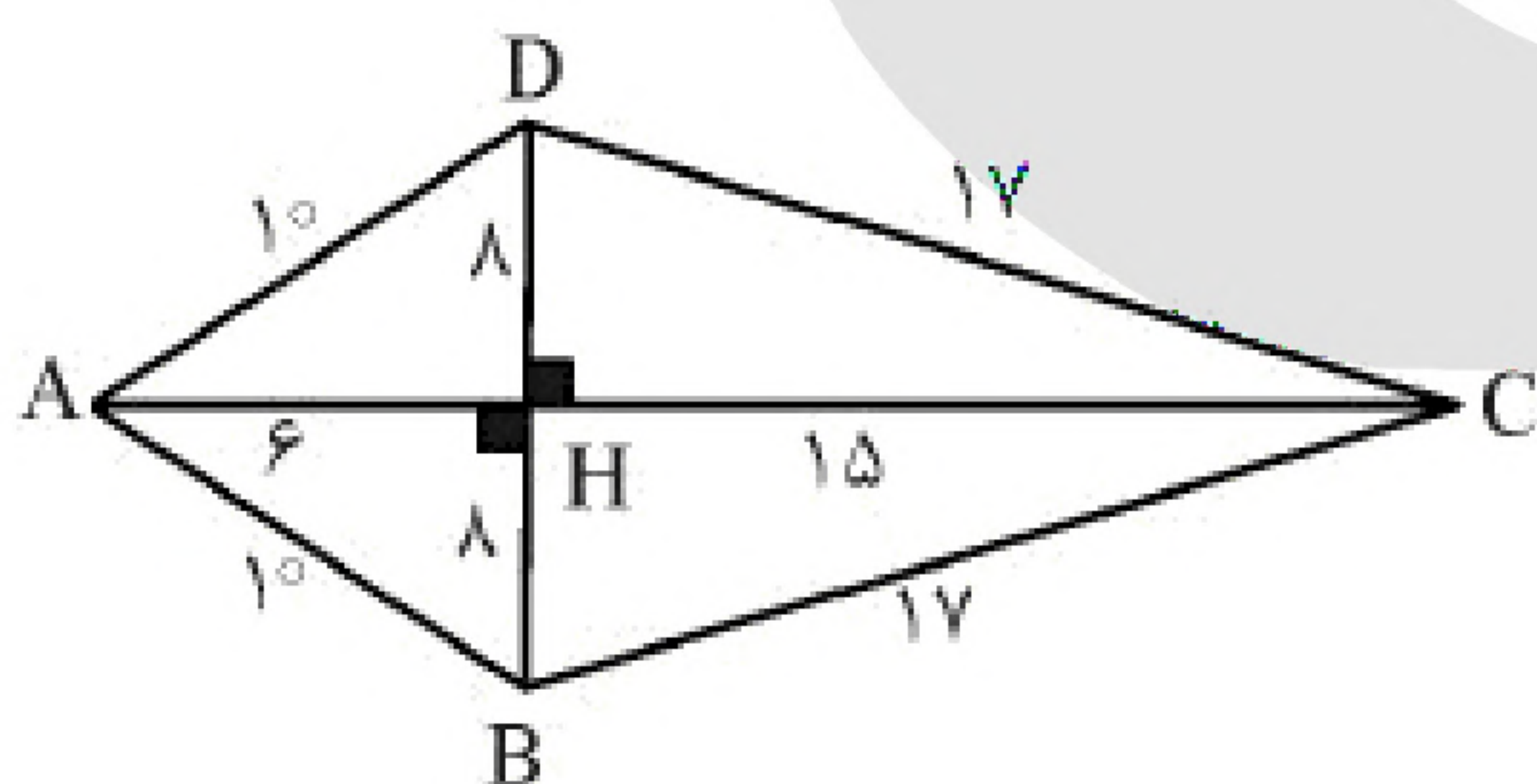
۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نیمسازهای داخلی هر متوازی‌الاضلاع یک مستطیل می‌سازد که ابعاد این مستطیل برابر است با:

$$\begin{cases} x = (5a - 2a) \sin 30^\circ = \frac{3a}{2} \\ y = (5a - 2a) \cos 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}a \end{cases} \Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{9\sqrt{3}}{4}a^2 = 36\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$$

از طرفی وقتی وسط اضلاع مستطیل را به هم وصل می‌کنیم، مساحت نصف می‌شود پس مساحت چهارضلعی

$$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{18\sqrt{3}}{20 \times 8 \times \sin 60^\circ} = \frac{9}{40}$$

$A'B'C'D'$  برابر با  $18\sqrt{3}$  است.



۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در کایت یک قطر عمود منصف قطر

دیگر است و هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است. بنابراین با استفاده از قضیه غیثاغورت اعداد روی شکل حاصل می‌شوند و محیط کایت برابر ۵۴ است.

$$\text{قطر AC: } 5x + 2x = 21 \Rightarrow x = 3$$

$$\Rightarrow HC = 15, HA = 6$$

از طرفی مساحت کایت نصف حاصل ضرب قطرهای آن است:

$$S = \frac{16 \times 21}{2} = 168$$

$$\text{تفاوت محیط و مساحت} = 168 - 54 = 114$$



۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر تعداد نقاط درونی  $i$  و تعداد نقاط مرزی  $b$  باشد:

$$i \times b = 20 = 1 \times 20 = 2 \times 10 = 4 \times 5 = 5 \times 4 = 10 \times 2 = 20 \times 1$$

چون  $b \geq 3$  بنابراین حالات  $10 \times 2$  و  $20 \times 1$  قابل قبول نیست. در سایر حالات مطابق قضیه پیک:

$$i = 1, b = 20 \Rightarrow s = \frac{b}{2} + i - 1 = 10 + 1 - 1 = 10$$

$$i = 2, b = 10 \Rightarrow s = 5 + 2 - 1 = 6$$

$$i = 4, b = 5 \Rightarrow s = \frac{5}{2} + 4 - 1 = 5/5$$

$$i = 5, b = 4 \Rightarrow s = 2 + 5 - 1 = 6$$

$$S_{\min}, S_{\max} \text{ مجموع} = 10 + 5/5 = 15/5$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مطابق قضیه پیک:

$$\left\{ \begin{array}{l} S = \frac{b}{2} + i - 1 \\ S = \frac{b+i}{2} \text{ طبق فرض سوال} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{b+i}{2} = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow i = 2$$

کمترین تعداد  $b$  برابر ۳ است  
تعداد نقاط مرزی  $b =$

$$S_{\min} = \frac{3}{2} + 2 - 1 = 2/5$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. محیط متوازی الاضلاع حاصل، برابر مجموع اندازه قطرهای چهارضلعی اولیه است:  
 $30 = 13 + 17 =$  محیط ۴ ضلعی حاصل

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 8n \Rightarrow n = 19 \Rightarrow \text{تعداد اضلاع} \times 8 = \text{تعداد قطرها}$$

$$\frac{\text{مجموع زاویه های داخلی}}{\text{مجموع زاویه های خارجی}} = \frac{(n-2) \times 180}{360} = \frac{n-2}{2} = \frac{19-2}{2} = \frac{17}{2} = 8/5$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تعداد نقاط درونی  $i$  ( $i \geq 0$ ) و تعداد نقاط مرزی  $b$  ( $b \geq 3$ ) با استفاده از رابطه پیک

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \text{ مساحت چندضلعی شبکه ای را مشخص می کنند:}$$

$$11/5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow b = 25 - 2i \xrightarrow{b \geq 3} 25 - 2i \geq 3 \Rightarrow i \leq 11 \xrightarrow{i \geq 0} 0 \leq i \leq 11 \Rightarrow$$

$$\text{مجموع مقادیر } i \text{ های متمایز} = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = \frac{11(11+1)}{2} = 66$$



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با رسم قطر  $AC$ ، در مثل  $ABC$  پاره‌خط‌های  $AE$  و  $CN$  میان‌ه مثلث‌اند بنابراین:

$$S_{\triangle AEN} = S_{\triangle CEN} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC}$$

به همین ترتیب پاره‌خط‌های  $AF$  و  $CM$  هم در  $\triangle ADC$  میان‌ه‌اند:

$$S_{\triangle AMT} = S_{\triangle TFC} = \frac{1}{6} S_{\triangle ADC}$$

$$S_{\text{کل سایه زده}} = \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ADC} + \frac{1}{6} S_{\triangle ADC} = \frac{1}{3} (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC})$$

$$= \frac{1}{3} S_{\text{چهار ضلعی } ABCD} = \frac{1}{3} \times 96 = 32$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به نسبت  $\frac{AE}{EB} = \frac{2}{3}$  سایر نسبت‌ها در شکل نمایش داده شده است:

$$EF = 2y, BC = 5y$$

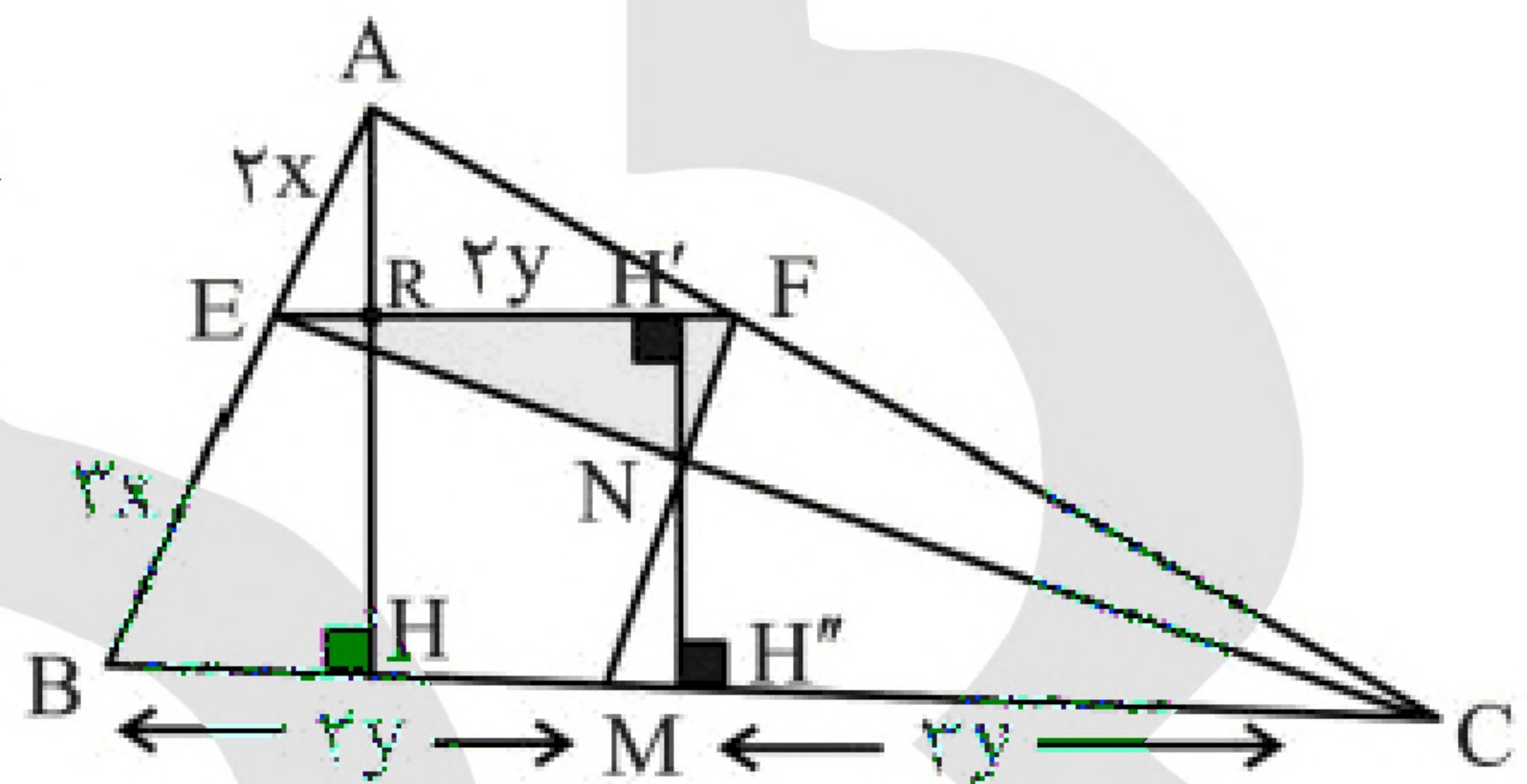
$$BM = EF = 2y \rightarrow MC = 3y$$

$$NH' = 2k, NH'' = 2K \xrightarrow{H'H'' = 5K} RH = 5k$$

$$\frac{AR}{AH} = \frac{2}{5} \rightarrow \frac{AH - RH}{AH} = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow \frac{AH - 5K}{AH} = \frac{2}{5} \rightarrow AH = \frac{25k}{3}$$

$$\frac{S_{\triangle EFN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \times 2y \times 2k}{\frac{1}{2} \times 5y \times \frac{25k}{3}} = \frac{12}{125} \xrightarrow{\text{درصد}} 9.6\%$$



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر  $b$  نقاط مرزی و  $i$  نقاط درونی باشد، با توجه به ۵ ضلعی شبکه‌ای داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 5 = \frac{b}{2} + i - 1 \Rightarrow 6 = \frac{b}{2} + i$$

$b \geq 5$  پس می‌توان نوشت:

بنابراین حالت‌های  $\left\{ \begin{matrix} b=6 \\ i=3 \end{matrix} \right\}$ ،  $\left\{ \begin{matrix} b=8 \\ i=2 \end{matrix} \right\}$ ،  $\left\{ \begin{matrix} b=10 \\ i=1 \end{matrix} \right\}$ ،  $\left\{ \begin{matrix} b=12 \\ i=0 \end{matrix} \right\}$  امکان‌پذیر است. مجموعه مقادیر ممکن برای نقاط درونی  $6 = 0 + 1 + 2 + 3$  است.

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموع فاصله‌های یک نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا سه ضلع آن برابر ارتفاع مثلث است، اگر ضلع مثلث را  $a$  فرض کنیم، پس می‌توان نوشت:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 4\sqrt{3} \Rightarrow \text{ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 6$$

پس مجموع فاصله‌ها باید برابر ۶ باشد، اگر فاصله‌ی  $M$  تا ضلع  $BC$  را  $x$  در نظر بگیریم آن‌گاه:

$$1 + 2 + x + 6 \Rightarrow x = 3$$





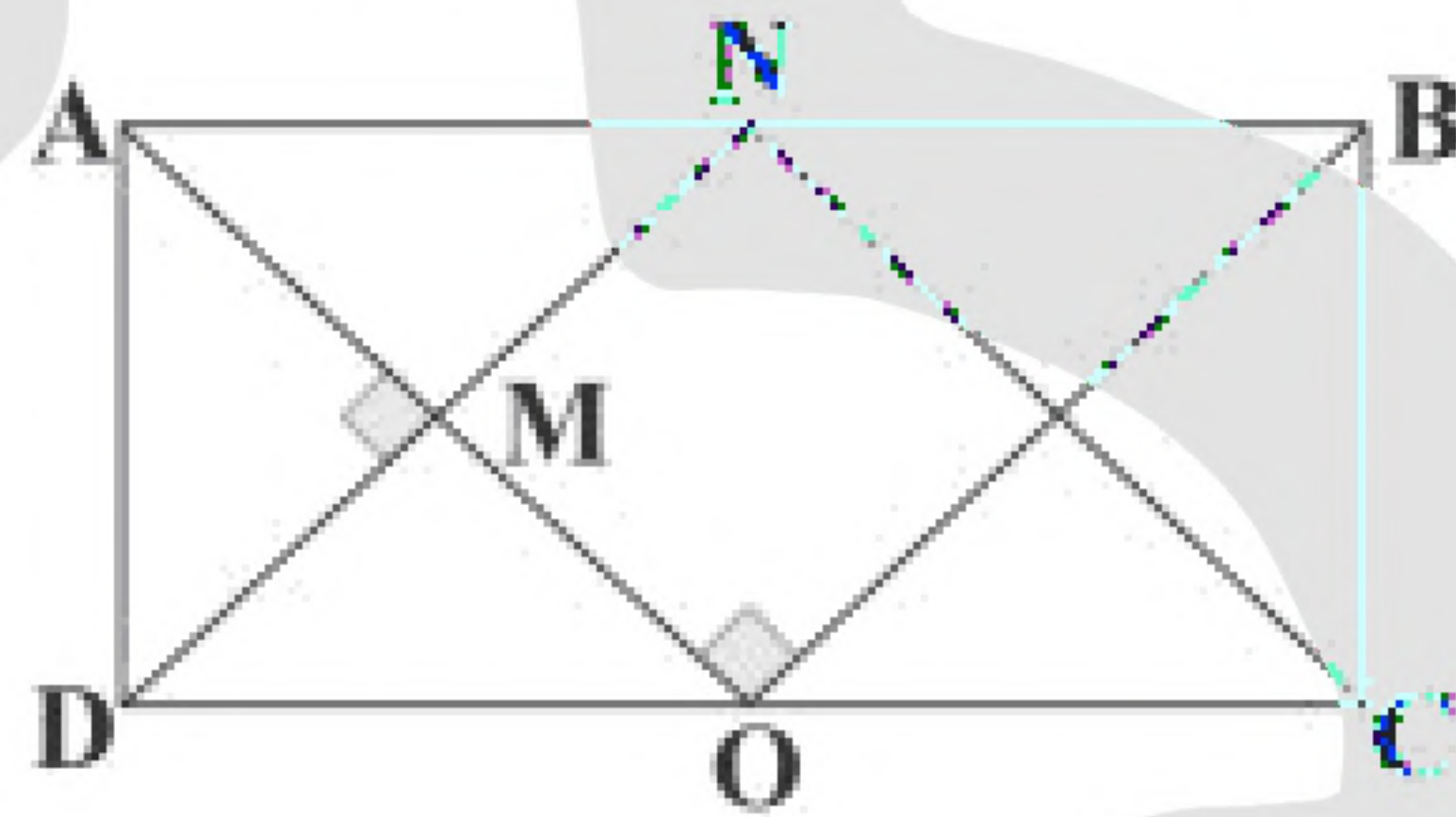
۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. میانه‌ها ۶ مثلث هم‌مساحت می‌سازند که هر کدام را با  $S$  نمایش می‌دهیم، بنابراین:  
 $S_{AGB} = ۲S$

همچنین طبق قضیه تالس  $F$  وسط  $CM$  است:

$$\widehat{CNF} \sim \widehat{AMC} \Rightarrow S_{CNF} = \frac{1}{4} S_{AMC} = \frac{1}{4} (۳S) = \frac{۳}{4} S \Rightarrow S_{GMFN} = \frac{۵}{4} S$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AGB}}{S_{GMFN}} = \frac{۲S}{\frac{۵}{4} S} = \frac{۸}{۵}$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیل یک مربع حاصل می‌شود. حال طول ضلع مربع را به دست می‌آوریم. مثلث‌های  $AOB$  و  $AMD$  قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین هستند.



$$AM = DM \Rightarrow AD^2 = AM^2 + DM^2 \xrightarrow{AD = b} b^2 = ۲AM^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{2}}{2} b$$

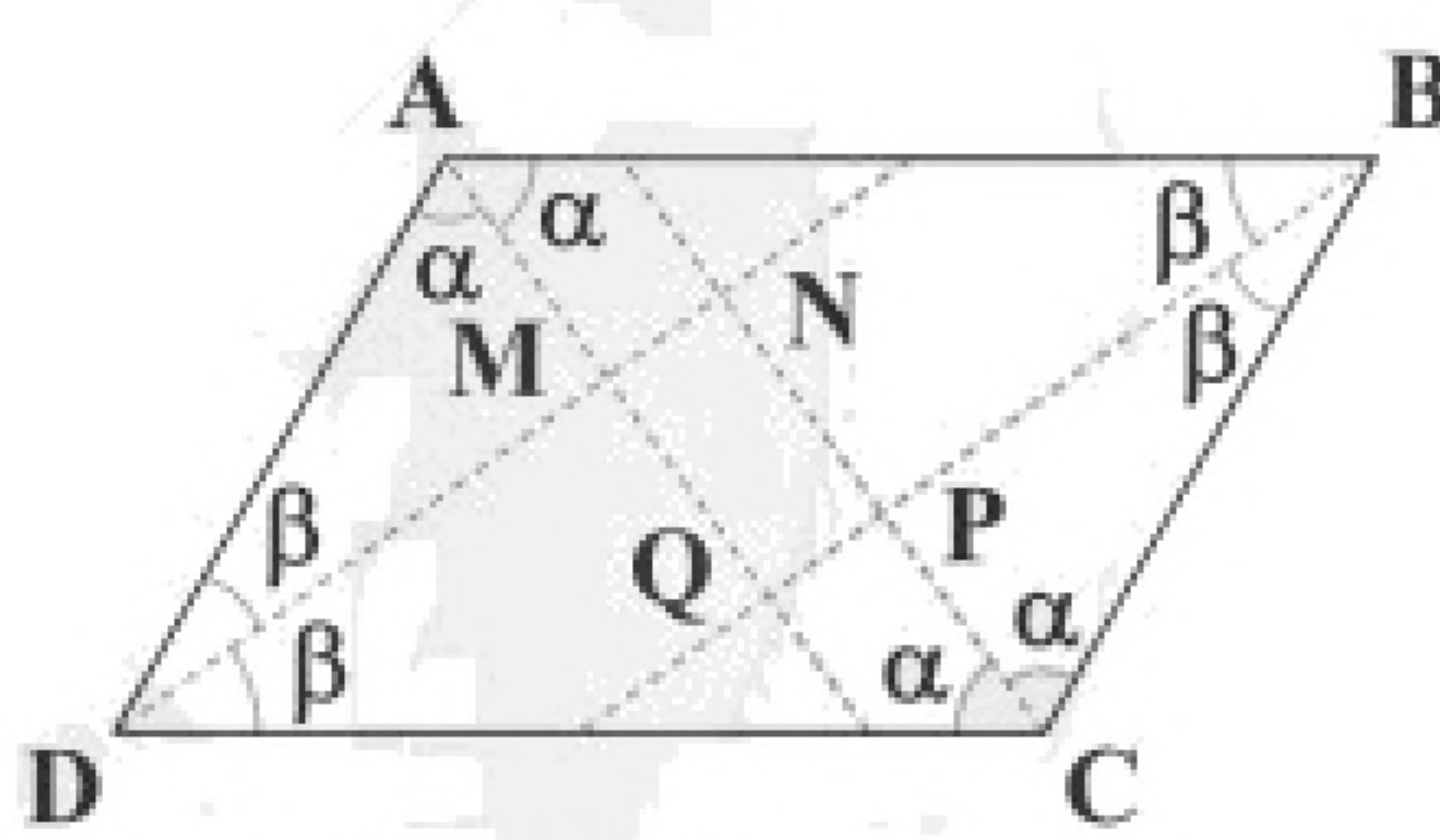
$$OA = OB \Rightarrow AB^2 = OB^2 + OA^2 \xrightarrow{AB = a} a^2 = ۲OA^2 \Rightarrow OA = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$\text{طول یک ضلع مربع} = OM = OA - AM = \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} b = \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b)$$

$$\text{مساحت مربع} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} (a - b) \right)^2 = \frac{1}{2} (a - b)^2$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMD} : \widehat{M} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

$$\widehat{N} = \widehat{P} = \widehat{Q} = 90^\circ$$

به طور مشابه:

پس چهارضلعی حاصل یا مربع یا مستطیل است. از طرفی داریم:

$$PN = NC - PC = ND \tan \beta - PB \tan \beta = (ND - PB) \tan \beta$$

$$PB = DM$$

$$\text{=====} MN \tan \beta = PQ \tan \beta$$

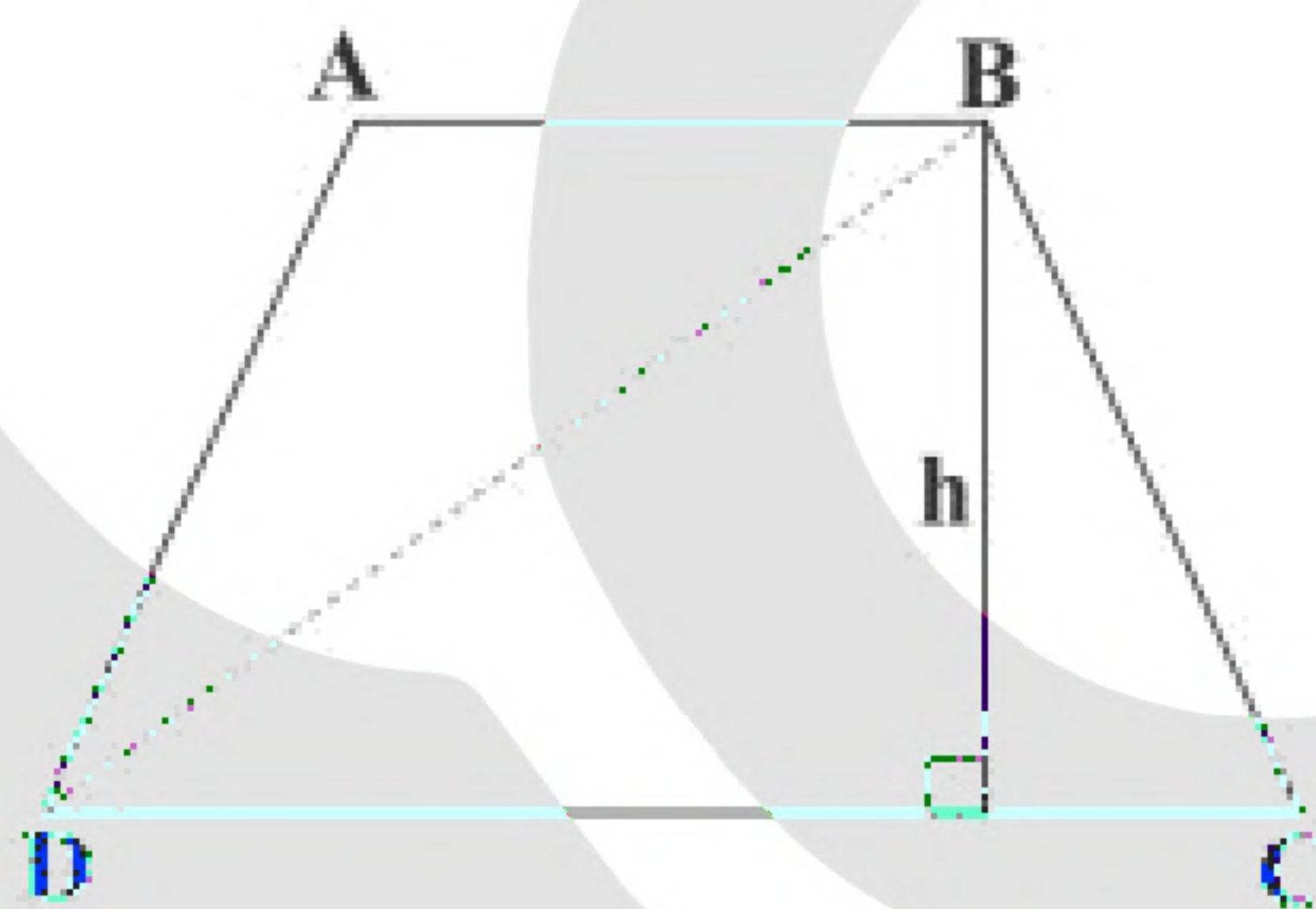
$$PN = PQ \tan \beta \xrightarrow{\beta \neq 45^\circ} PN \neq PQ$$

بنابراین چهارضلعی حاصل لزوماً مربع نیست و مستطیل است.

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{کمترین تعداد نقاط مرزی را دارد.} \\ i = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow b = 6 \Rightarrow S = \frac{b}{2} - 1 + i = 3 - 1 + 3 = 5$$

۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



ارتفاع مثلث‌های ABD، BCD و ذوزنقه‌ی ABCD با هم برابر است و برابر با h می‌باشد، پس داریم:

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2} h \times AB}{\frac{1}{2} h \times (AB + CD)} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{AB}{AB + CD} = \frac{3}{7}$$

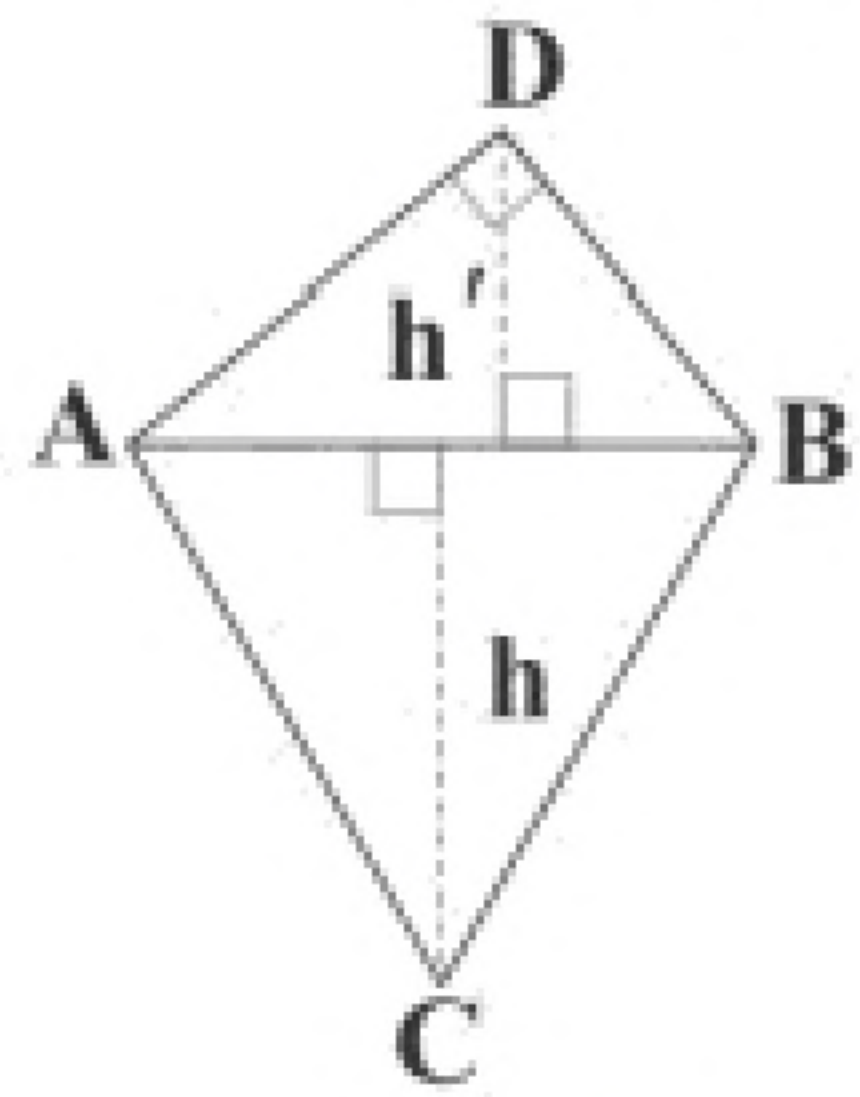
$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{AB}{AB + CD - AB} = \frac{3}{7-3} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{3}{4}$$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABD} \quad (*)$$

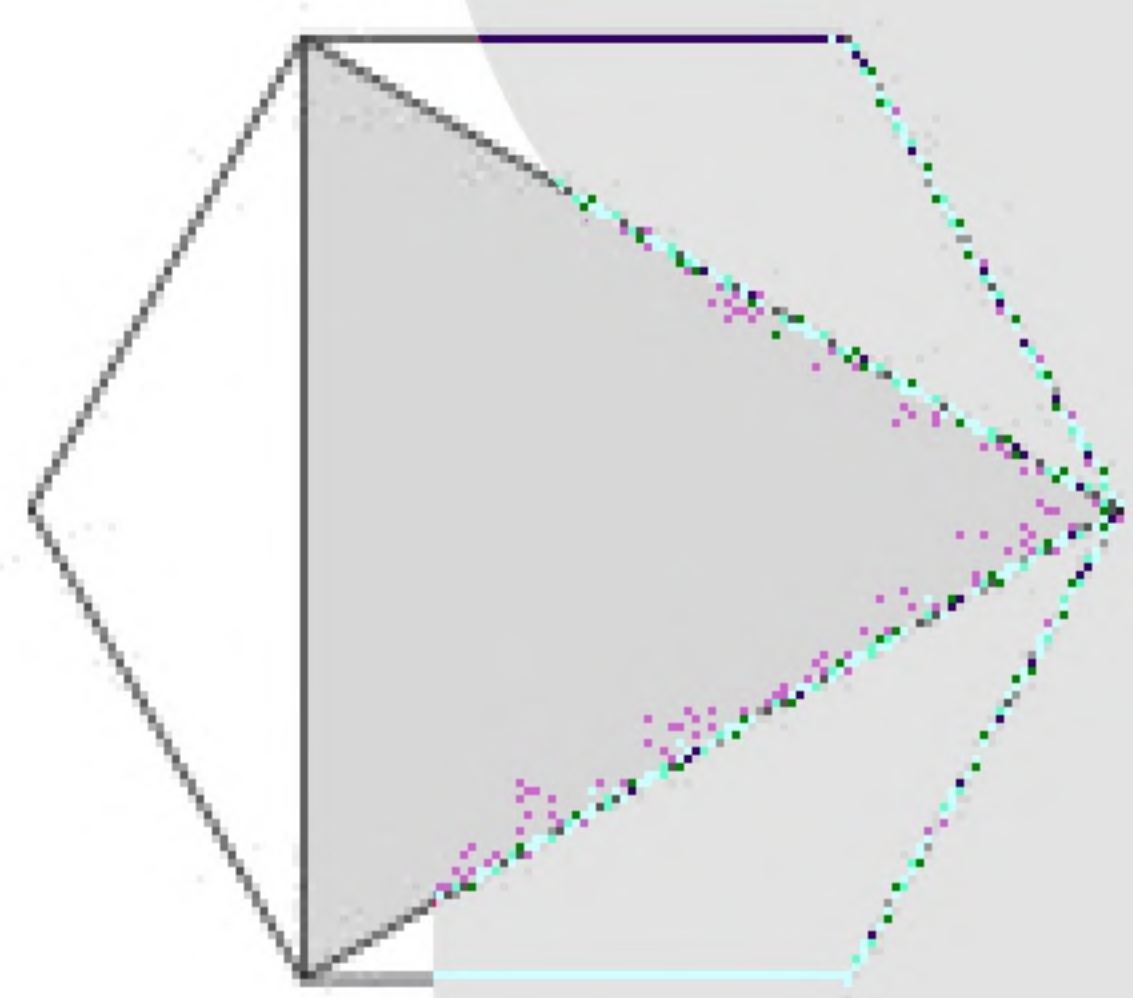
در دو مثلث  $ABC$  و  $ABD$ ، قاعده‌ها  $(AB)$  برابر است، پس نسبت مساحت‌ها برابر با نسبت ارتفاع‌هاست:



$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ABD}} = \frac{h}{h'} \xrightarrow{(*)} 2 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{h'}$$

$$\Rightarrow h' = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} AB}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB \Rightarrow \text{فاصله ی D از AB} = h' = \frac{\sqrt{3}}{4} AB$$

۲۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث موردنظر هر ضلع برابر قطر کوچک شش ضلعی است. بنابراین چون ضلع شش ضلعی ۴ واحد است، قطر کوچک آن (ضلع مثلث)  $4\sqrt{3}$  خواهد بود و از آنجایی که این مثلث متساوی‌الاضلاع است داریم:



$$S_{\Delta} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \times \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$3a = 2b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \frac{b}{a} = \frac{3}{2}$$

نسبت ارتفاع وارد بر اضلاع عکس نسبت اضلاع است، پس داریم:

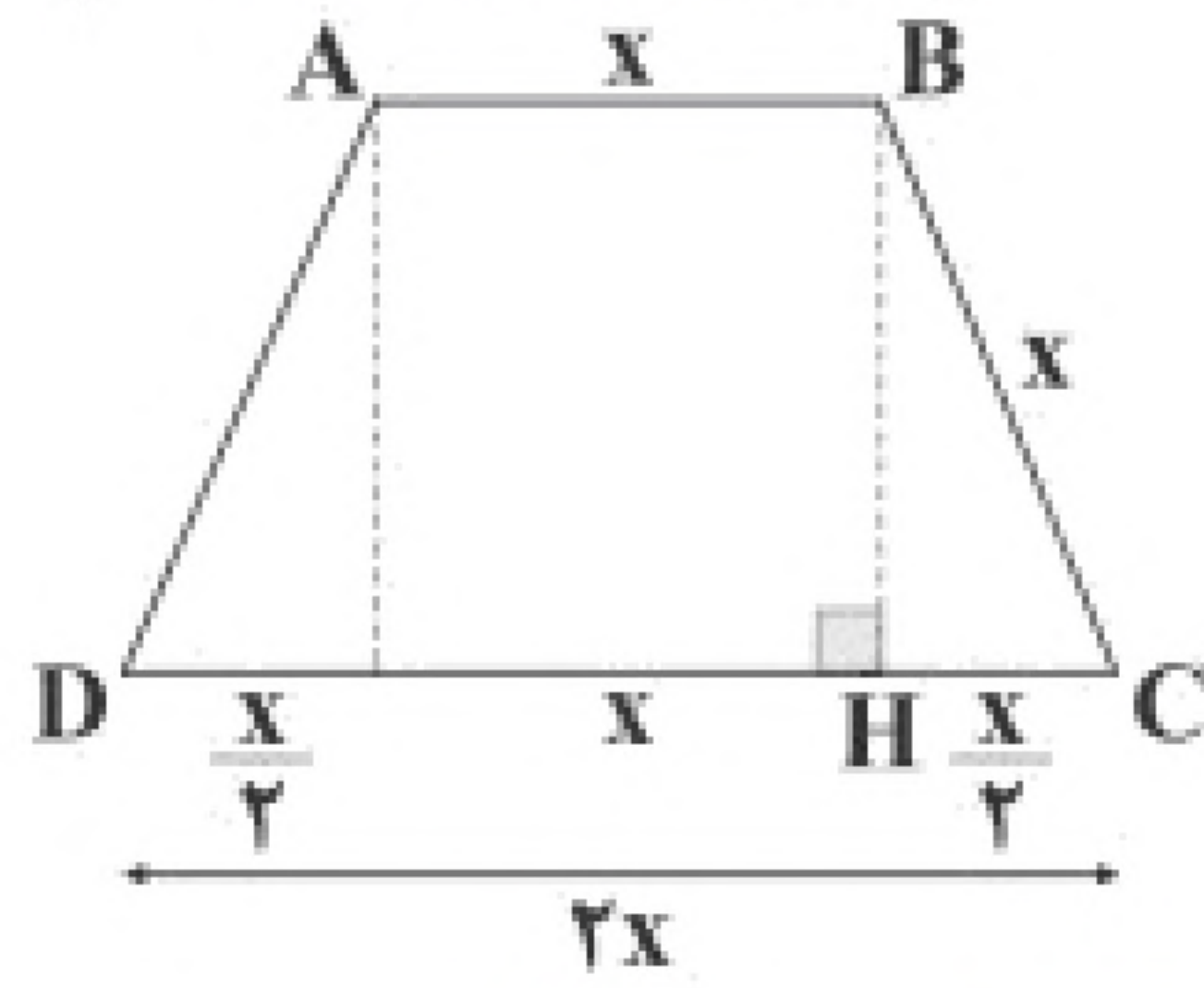
$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2h_a = 3h_b \Rightarrow 2h_a - 3h_b = 0$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مستطیل شبکه‌ای حداقل ۴ نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد یعنی  $b \geq 4$  داریم:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 \xrightarrow{i=2} S = \frac{b}{2} + 1 \xrightarrow{b \geq 4} S \geq 3$$



۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طبق صورت سؤال شکل زیر را می توان رسم کرد:



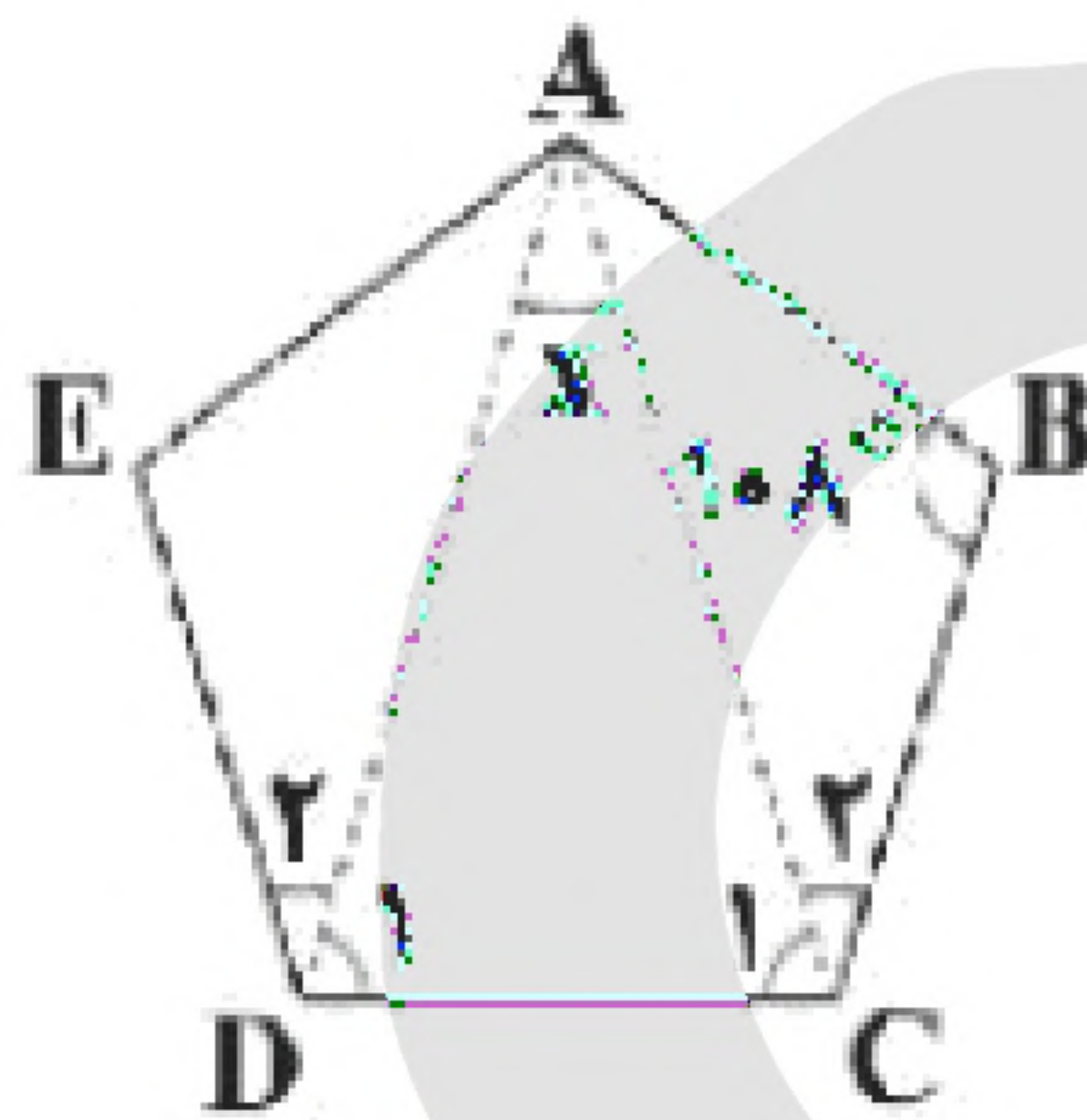
با رسم ارتفاع BH در مثلث قائم‌الزاویه BHC، ضلع CH نصف وتر BC است، پس زاویه روبه‌روی آن  $30^\circ$  است:

$$CH = \frac{1}{2} BC \Rightarrow \widehat{BHC} : \widehat{HBC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} x = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$$

۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در هر پنج ضلعی منتظم اندازه‌ی هر زاویه داخلی برابر است با:

$$\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$$

به‌علاوه داریم:

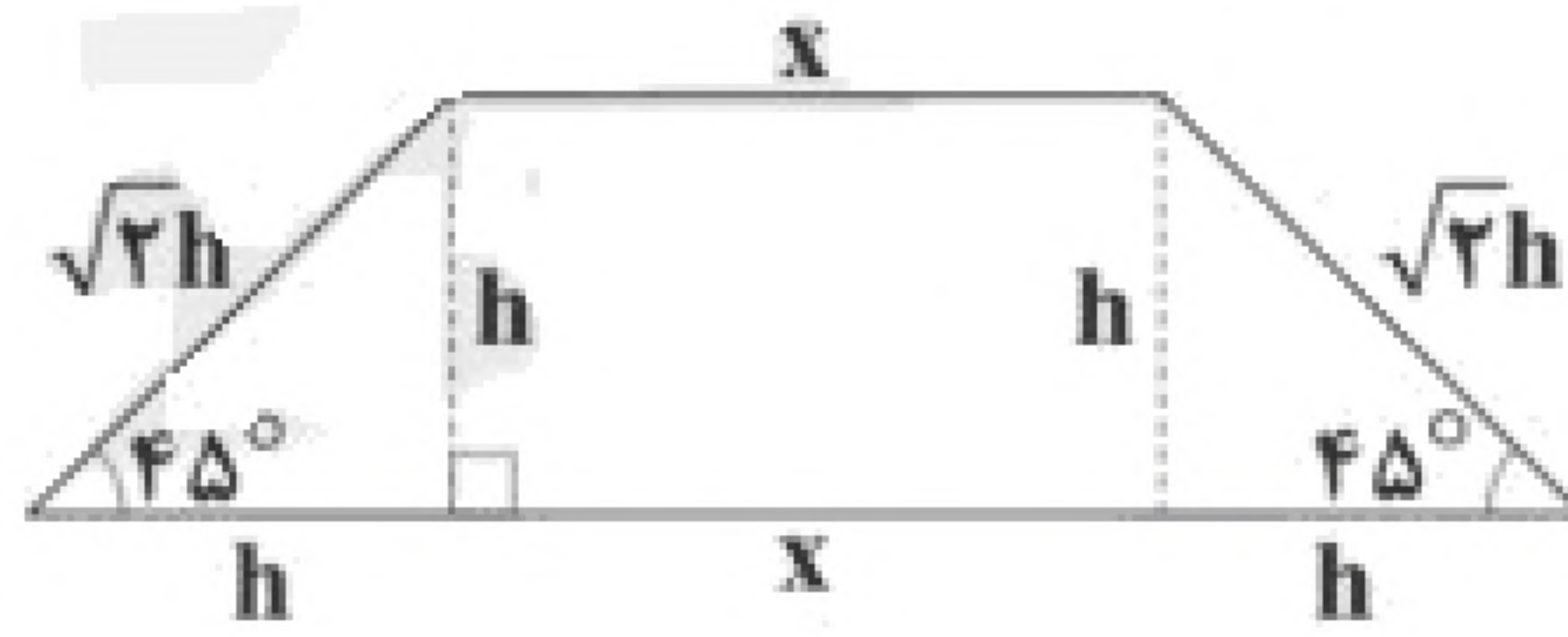


$$\begin{cases} AB = BC \Rightarrow \widehat{C}_2 = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ \\ AD = AC \Rightarrow \widehat{D}_1 = \widehat{C}_1 = 108^\circ - \widehat{C}_2 = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\widehat{ADC}} \widehat{x} = 180^\circ - 2\widehat{C}_1 = 180^\circ - 2(72^\circ) = 180^\circ - 144^\circ = 36^\circ$$



۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می نویسیم.



$$S = \frac{(2x + 2h) \times h}{2} = h(x + h) = 10$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{طبیعی}]{h} \\ \xrightarrow{x+h > h} \end{array} \begin{cases} h = 1 \Rightarrow (x + h) = 10 \\ h = 2 \Rightarrow (x + h) = 5 \\ h = 3 \Rightarrow (x + h) = \frac{10}{3} \end{cases}$$

$$\text{محیط دوزنقه} = 2x + 2h + 2\sqrt{2}h = 2(x + h) + 2\sqrt{2}h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(10) + 2\sqrt{2} = 20 + 2\sqrt{2} \\ 2(5) + 2\sqrt{2} \times 2 = 10 + 4\sqrt{2} \\ 2\left(\frac{10}{3}\right) + 2\sqrt{2} \times 3 = \frac{20}{3} + 6\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین بیشترین محیط دوزنقه برابر  $20 + 2\sqrt{2}$  است.

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر زوایای چهارضلعی را  $x, y, z$  و  $t$  در نظر بگیریم، به غیر از زاویه  $t$  مجموع هر دو زاویه دلخواه  $100^\circ$  درجه است:

$$\begin{cases} x + y = 100^\circ \\ x + z = 100^\circ \\ y + z = 100^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع می کنیم}} 2x + 2y + 2z = 300^\circ \Rightarrow x + y + z = \frac{300^\circ}{2} = 150^\circ$$

از طرفی مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی،  $360^\circ$  است پس:

$$t = 360^\circ - 150^\circ = 210^\circ \Rightarrow t > 180^\circ \Rightarrow \text{چهارضلعی مقعر است.}$$

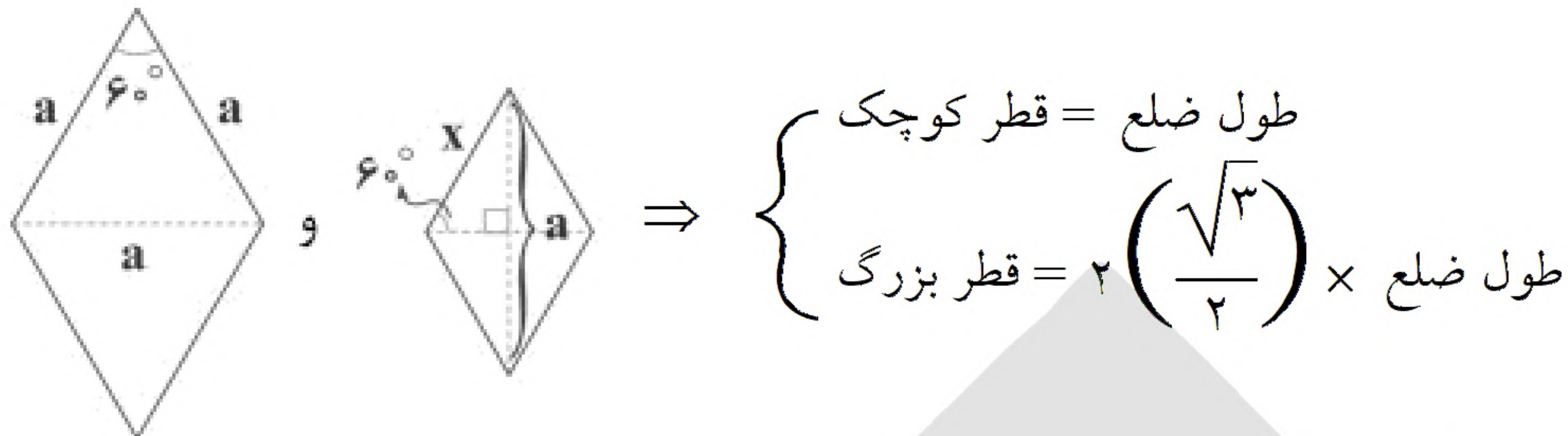


«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. هر دو لوزی دارای زوایای  $60^\circ$  و  $120^\circ$  می‌باشند:

$$120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

پس هر دو لوزی با هم متشابه‌اند و داریم:



اگر ضلع لوزی کوچک‌تر  $x$  و ضلع لوزی بزرگ‌تر  $a$  باشد، داریم:

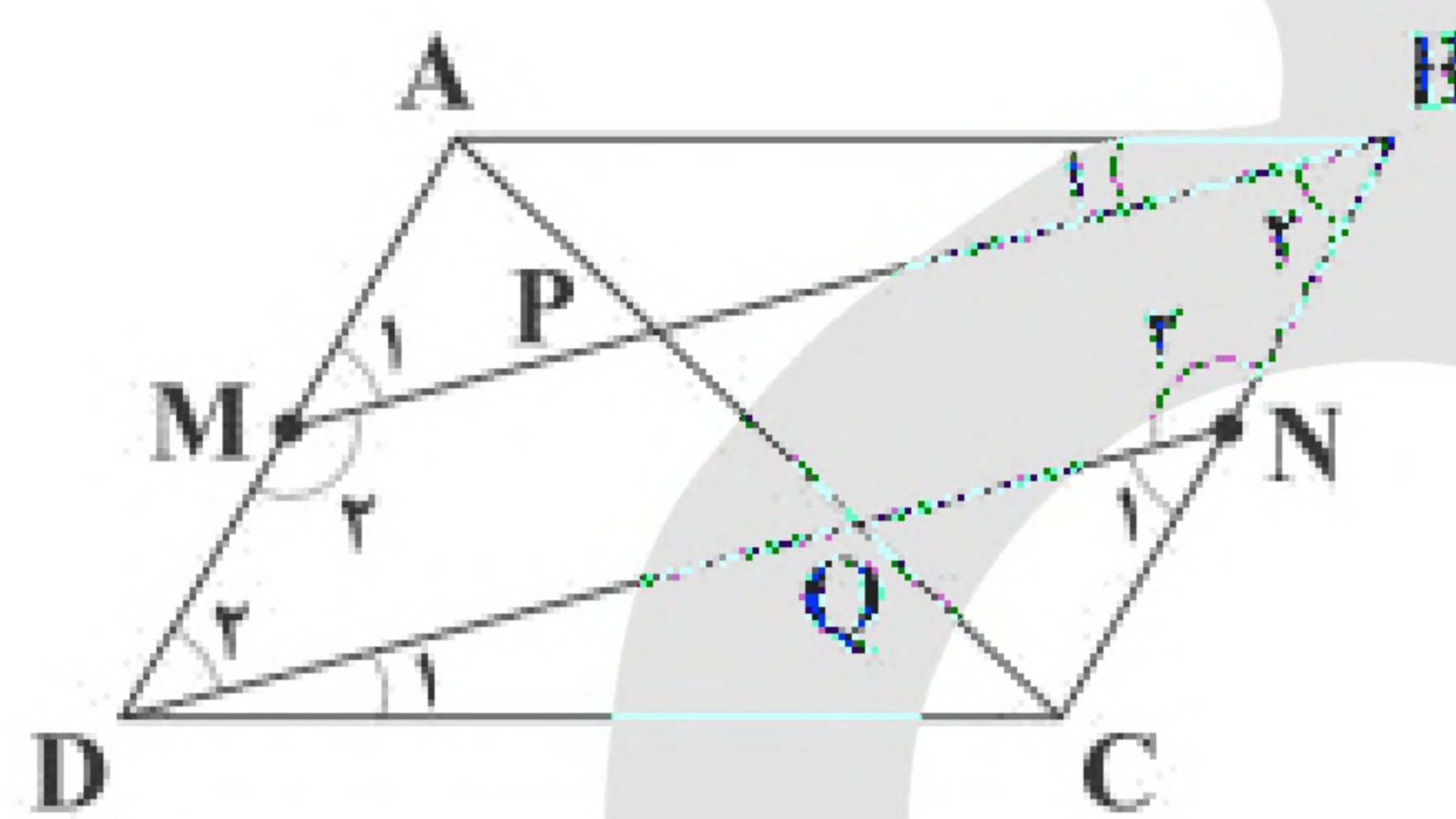
قطر کوچک لوزی بزرگ‌تر = قطر بزرگ لوزی کوچک‌تر

نسبت تشابه دو لوزی:

$$\Rightarrow 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) = a \Rightarrow \sqrt{3} x = a \Rightarrow \frac{a}{x} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \text{نسبت مساحت دو لوزی} = \left( \frac{a}{x} \right)^2 = 3$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \\ CN = AM = \frac{1}{2} AD \\ \hat{A} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \hat{ABM} \cong \hat{CND} \Rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ \hat{N}_1 = \hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_2 = \hat{N}_2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_2 = \hat{D}_2 \\ \hat{M}_2 = \hat{N}_2 \\ BN = MD \end{array} \right\} \Rightarrow \text{متوازی الاضلاع } MBND \Rightarrow PM \parallel DQ$$

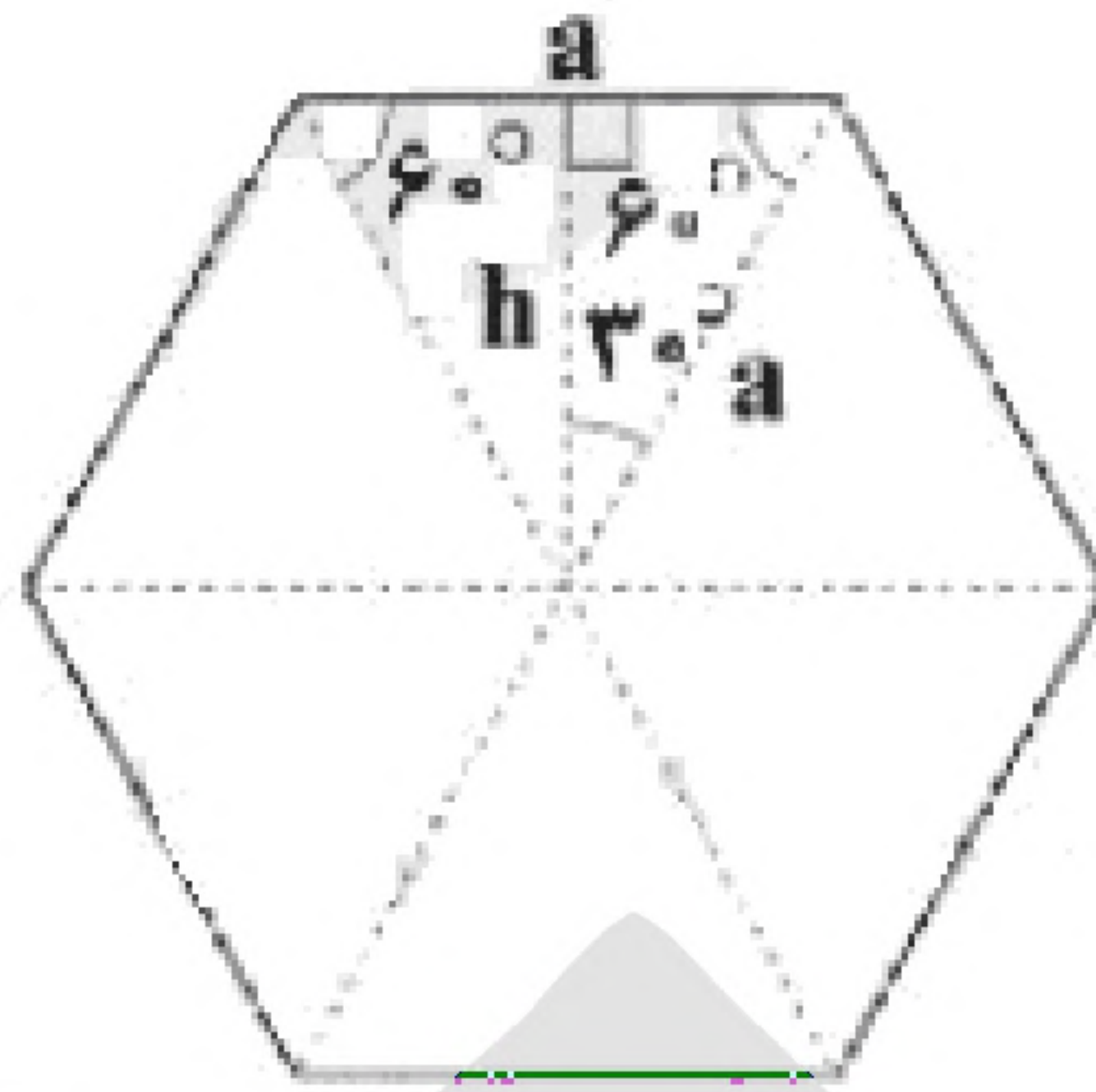
$$\xrightarrow[\text{در } \hat{ADQ}]{\text{تالس}} \frac{AP}{PQ} = \frac{AM}{MD} = 1 \Rightarrow AP = PQ$$

$$AC = AP + PQ + QC = 3 PQ = 3 \times 2 = 6$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که  $QC = PQ$  پس:



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر شش ضلعی منتظم به ضلع  $a$  از ۶ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $a$  تشکیل شده است، بنابراین:



$$\cos 30^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S = 6 \left( \frac{1}{2} h \times a \right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times a = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \xrightarrow{S = 3\sqrt{3}} \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2} = 1 \Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2} \Rightarrow \text{محیط} = 6\sqrt{2}$$

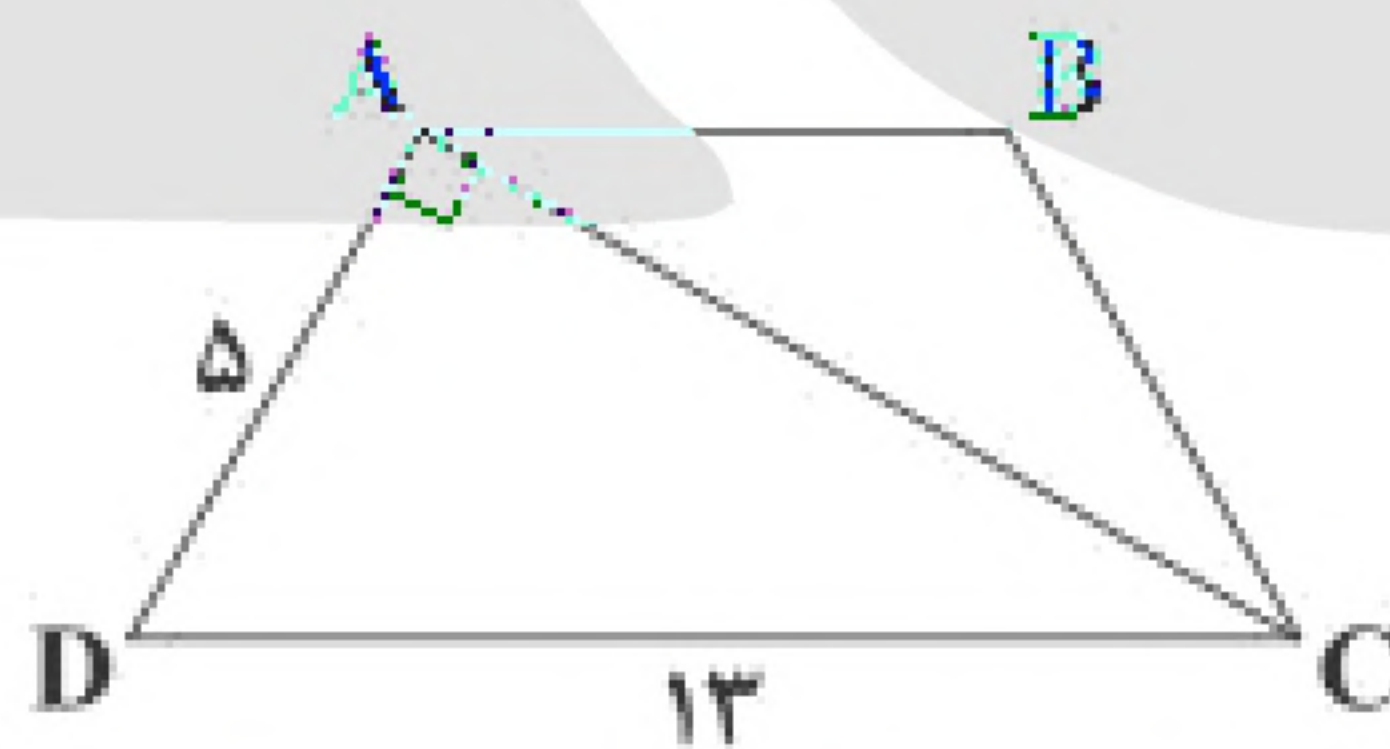
۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد قطرهای } n \text{ ضلعی} = \frac{n(n-3)}{2} = 27$$

$$\Rightarrow n(n-3) = 54 = 9 \times 6 \Rightarrow n = 9$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی} = (n-2) \times 180^\circ = (9-2) \times 180^\circ = 7 \times 180^\circ = 1260^\circ$$

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



$$\widehat{ACD} \text{ در فیثاغورس: } AC^2 = CD^2 - AD^2 = 13^2 - 5^2 = 144 \Rightarrow AC = \sqrt{144} = 12$$

$$BD = AC = 12$$

در دوزنقه‌ی متساوی الساقین قطرها با هم برابر است، در نتیجه:



۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

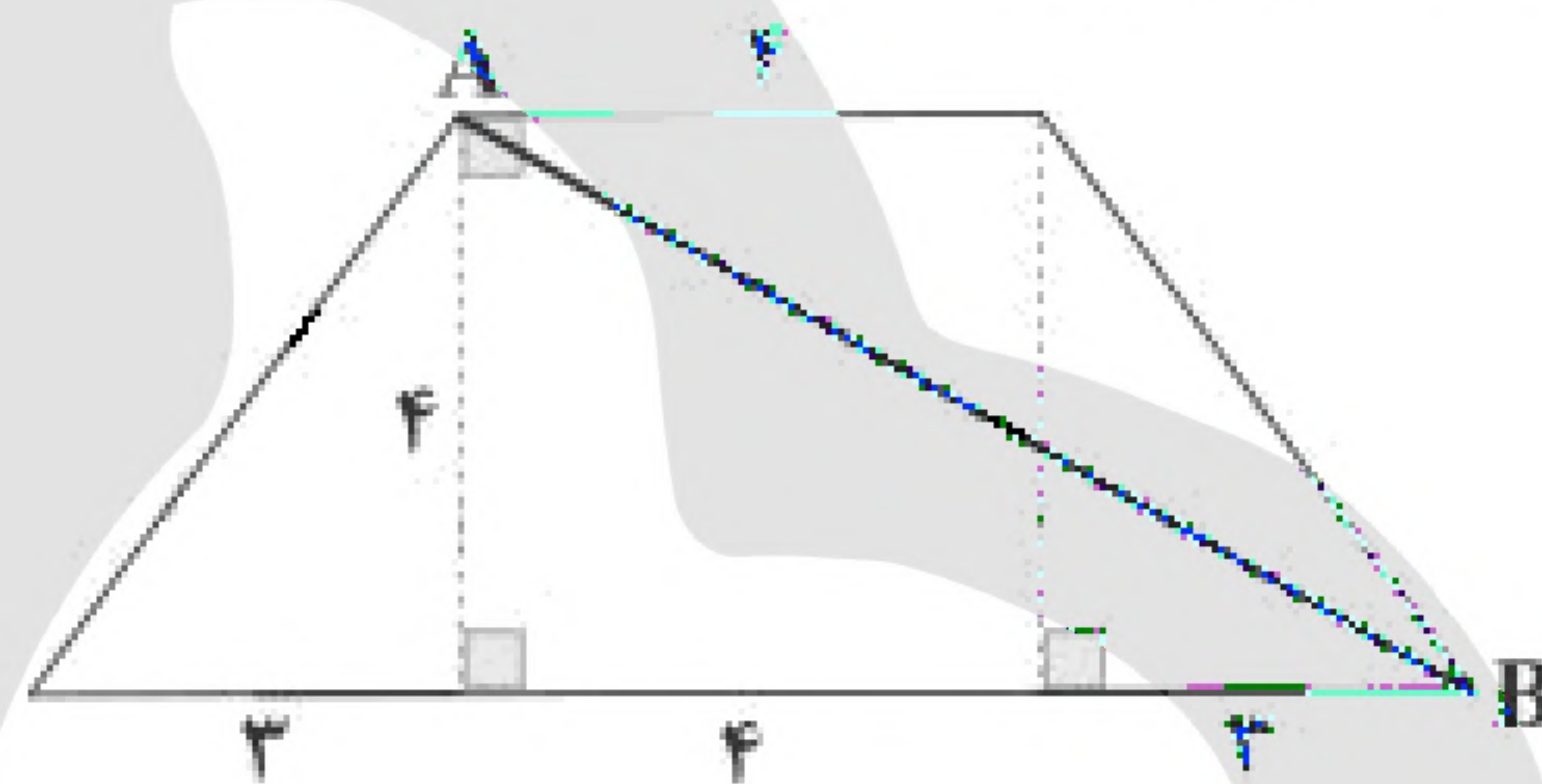
$$h_a + h_b = h_c \quad (*)$$

$$2S = h_a \times 2 = h_b \times 3 = h_c \times c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h_a = \frac{c}{2} h_c \\ h_b = \frac{c}{3} h_c \end{cases} \xrightarrow{(*)} \frac{c}{2} h_c + \frac{c}{3} h_c = h_c \Rightarrow \frac{5}{6} c \frac{h}{c} = \frac{h}{c} \Rightarrow c = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{2}$$

$$\text{محیط} = 2 + 3 + 1\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$$

۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم که اگر وسط‌های یک دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین را به هم وصل کنیم چهارضلعی حاصل لوزی خواهد بود که محیط آن برابر است با مجموع دو قطر دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین. (ب) در دوزنقه‌ی متساوی‌الساقین قطرها با هم برابرند.



$$\text{قطر} = AB = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{16 + 49} = \sqrt{65}$$

$$\xrightarrow{\text{قطرها برابرند}} 2\sqrt{65} = \text{مجموع دو قطر} = \text{محیط چهارضلعی حاصل}$$

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی پیک مساحت چندضلعی شبکه‌ای از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$S = \left(\frac{b}{2} - 1\right) + i$$

مساحت چندضلعی شبکه‌ای کوچکتر - مساحت چندضلعی شبکه‌ای بزرگتر = مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار

$$= S_2 - S_1 = \left(\left(\frac{7}{2} - 1\right) + 7\right) - \left(\left(\frac{7}{2} - 1\right) + 0\right) = 7$$