

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

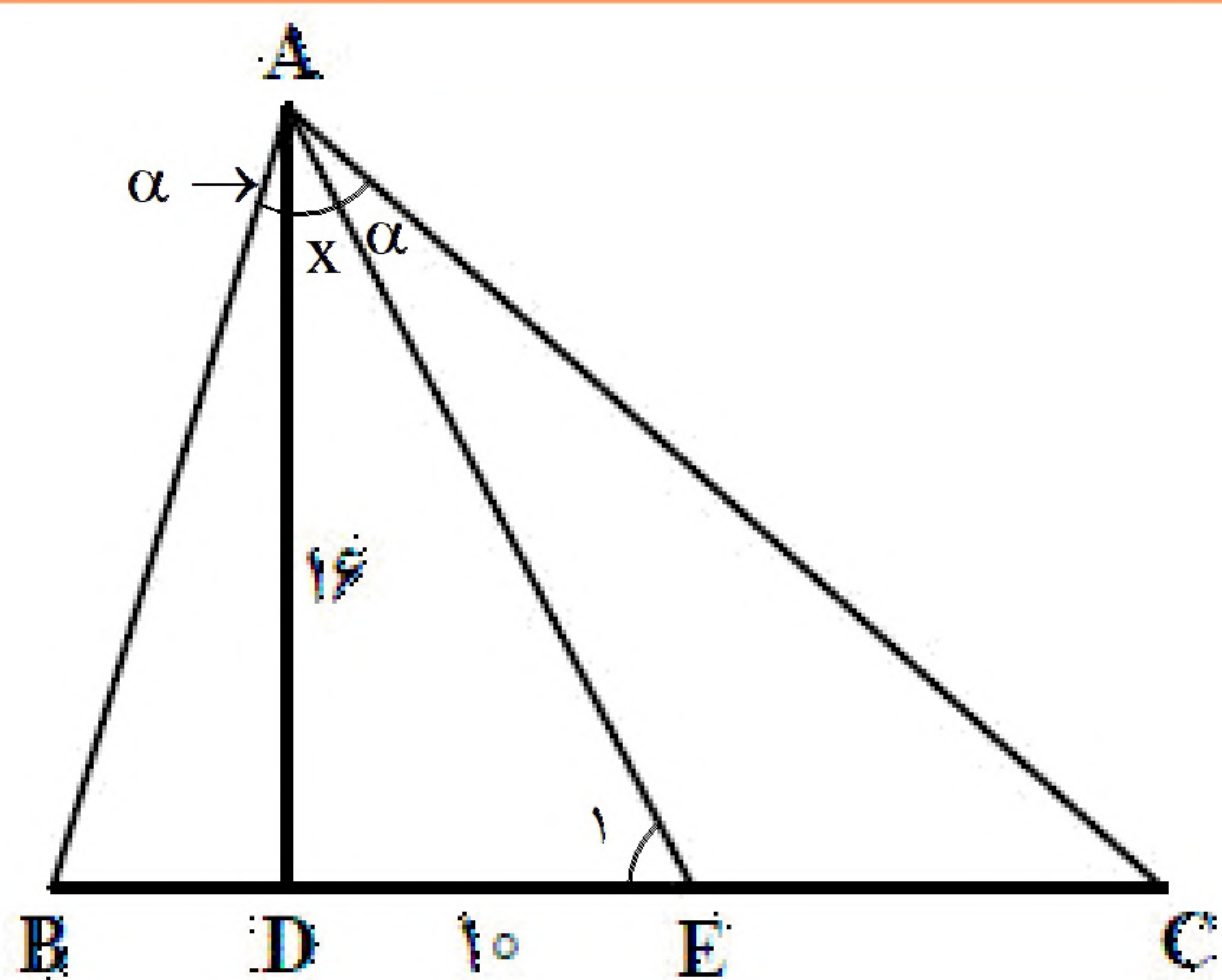
۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = \alpha$ و $\widehat{DAE} = x$ در این صورت داریم:

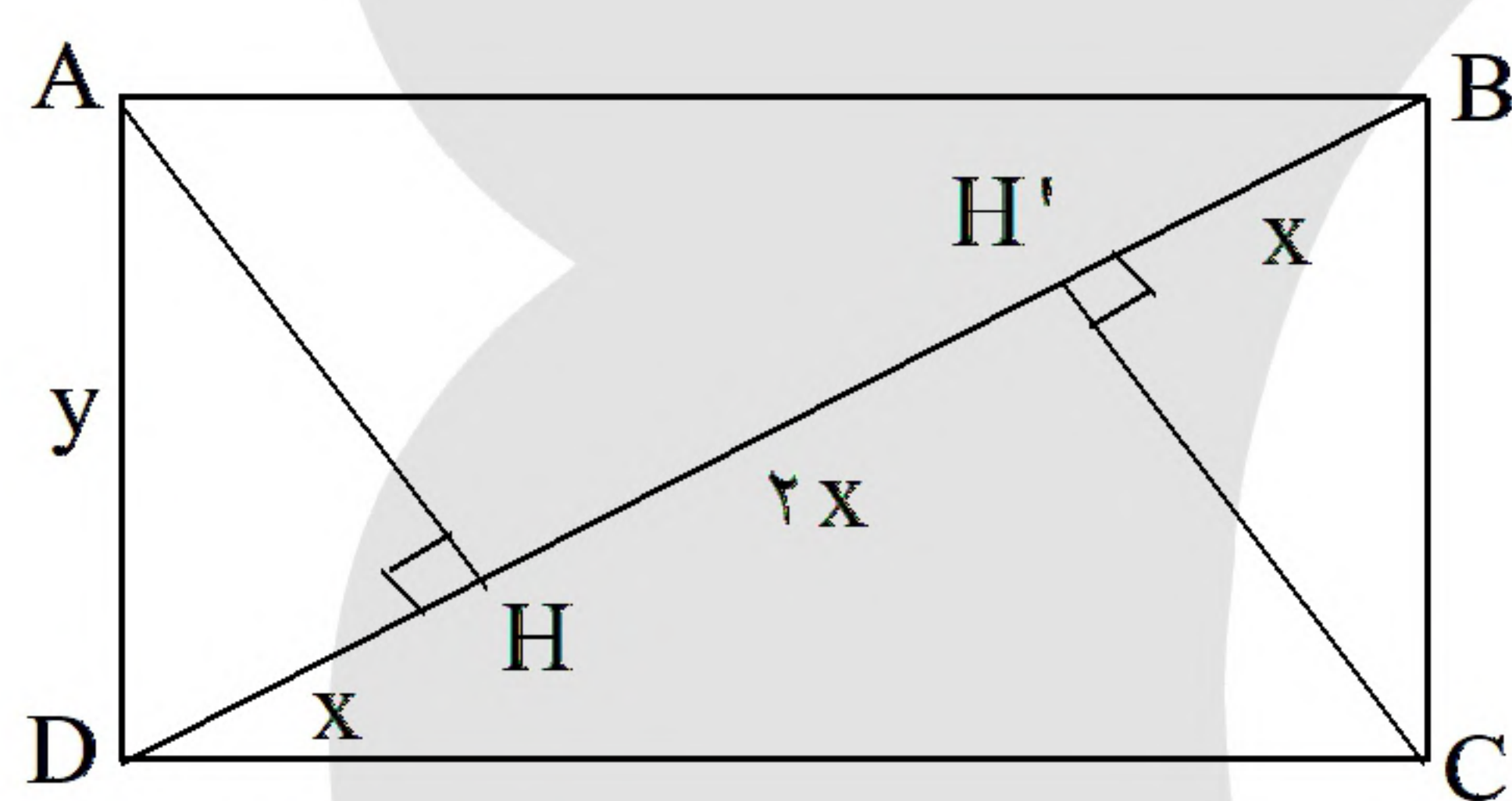
$$\left. \begin{aligned} BA = BE &\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{BAE} = x + \alpha \\ \triangle AEC \text{ مثلث خارجی زاویه } \widehat{E_1} &\Rightarrow \widehat{E_1} = \alpha + \widehat{C} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{C} = x$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{C} &= \widehat{DAE} = x \\ \widehat{E_1} &= \widehat{DAC} = x + \alpha \end{aligned} \right\}$$

بنابراین:

$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{16}{10 + EC} = \frac{10}{16} \Rightarrow 100 + 10EC = 256$$

$$\Rightarrow 10EC = 156 \Rightarrow EC = 15.6$$



۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال $HH' = 2DH = 2BH' = 2x$ در صورتی که AD را برابر y در نظر بگیریم آنگاه با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می‌نویسیم:

$$\triangle ABD : AD^2 = DH \times DB \Rightarrow y^2 = (x)(4x)$$

$$\Rightarrow y = 2x \quad (1)$$

$$\triangle ABD : AB^2 = BD^2 - AD^2 \xrightarrow{\text{از (1)}} AB^2 = (4x)^2 - (2x)^2 = 12x^2 \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}x$$

$$\triangle ADH : AH^2 = AD^2 - DH^2 \xrightarrow{\text{از (1)}} AH^2 = (2x)^2 - (x)^2 = 3x^2 \Rightarrow AH = \sqrt{3}x$$

بنابراین:

$$\frac{\text{مساحت مستطیل}}{\text{مساحت مثلث ADH}} = \frac{AB \times AD}{\frac{1}{2}AH \times DH} = \frac{(2\sqrt{3}x)(2x)}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}x)(x)} = 8$$



۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال

$$\widehat{ABF} = \widehat{CAE} = \widehat{BCD} = x$$

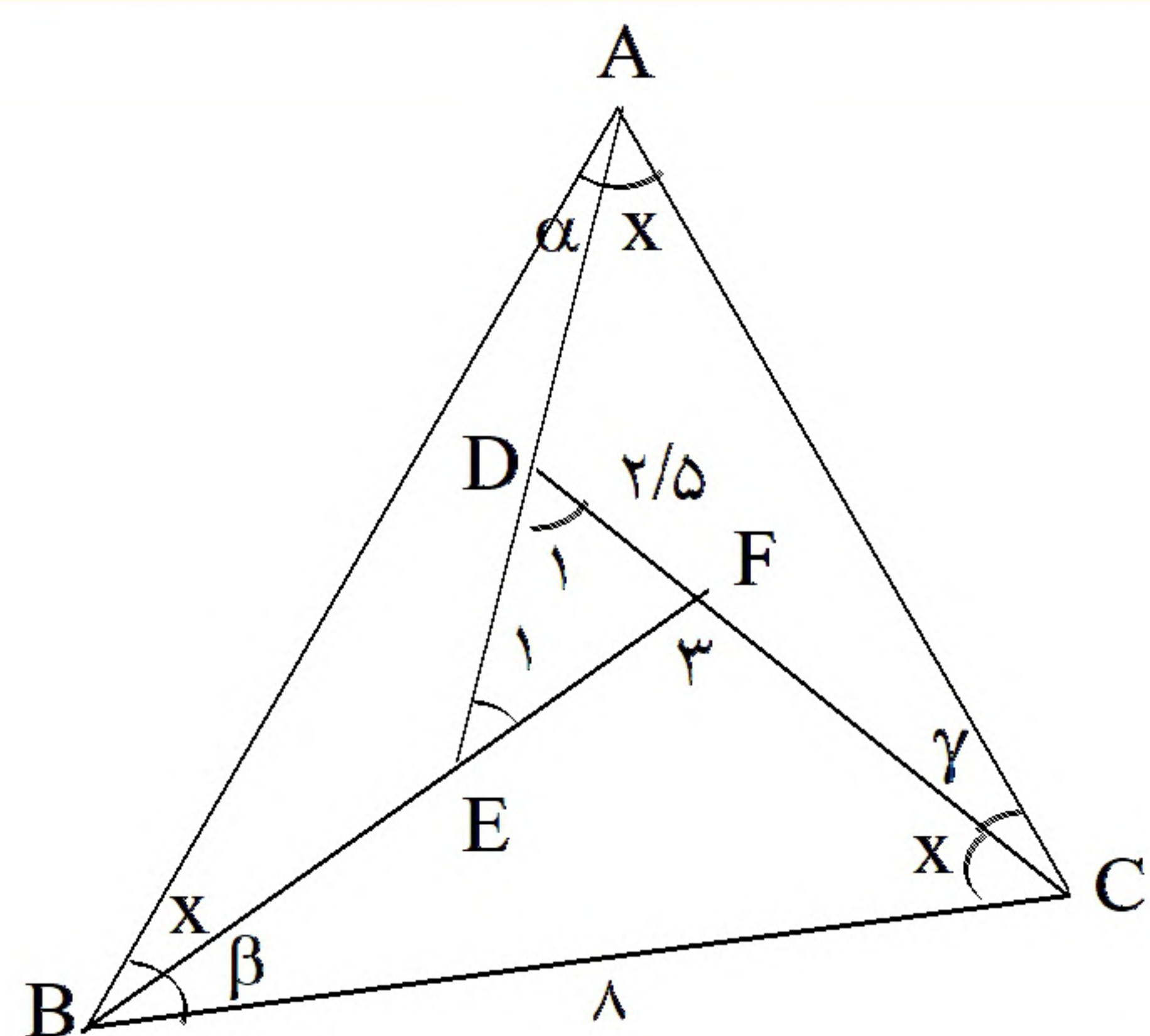
در این صورت داریم:

$$\widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{E_1} = x + \alpha = \widehat{A}$$

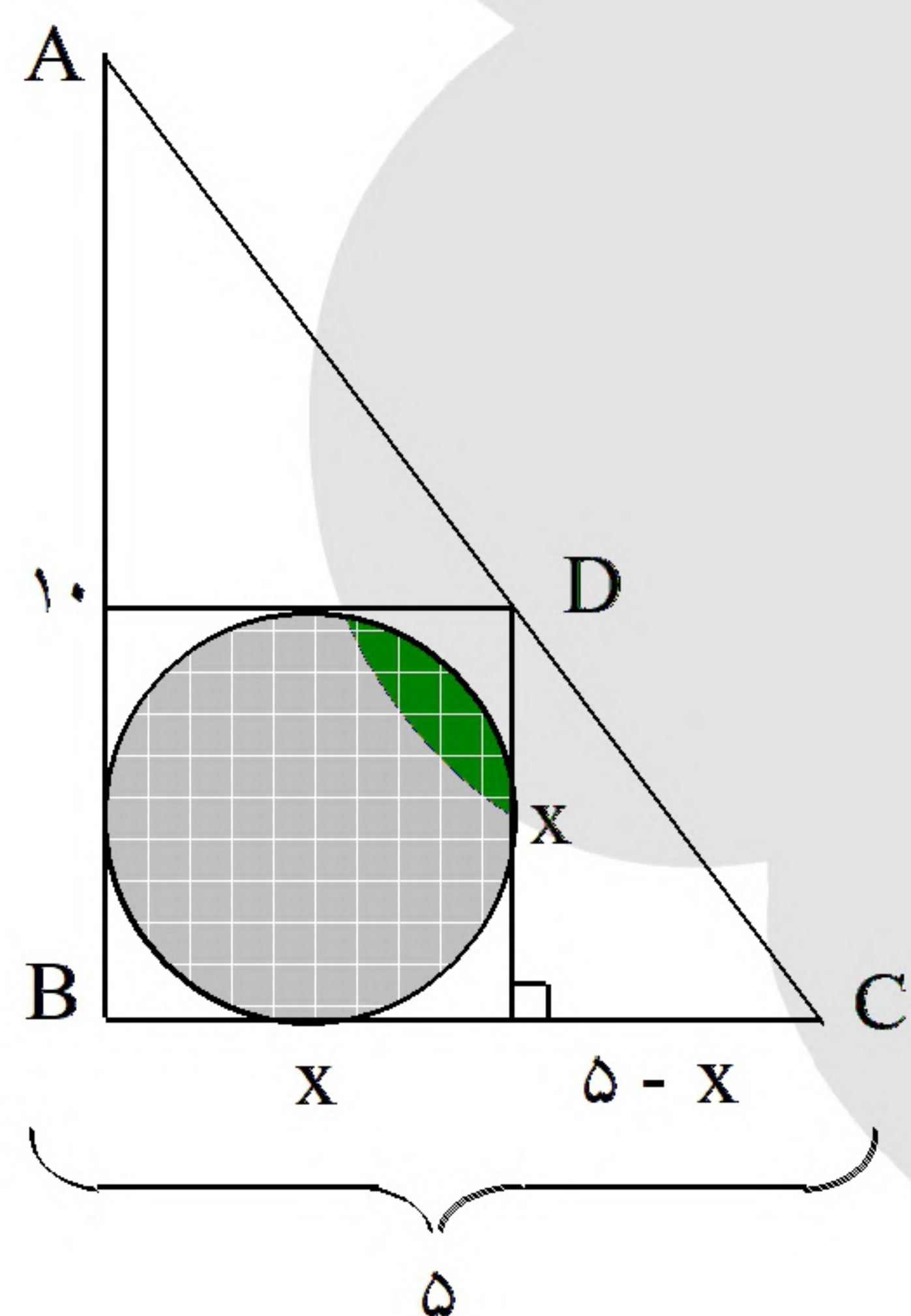
$$\widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{D_1} = x + \gamma = \widehat{C}$$

بنابراین دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ متشابهند، زیرا دارای دو زاویه مساویند.

$$\triangle DEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{DF}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow \frac{2/5}{8} = \frac{3}{AB} \Rightarrow AB = \frac{24}{2/5} = 9/6$$



۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مطابق شکل فرض کنید طول قطر دایره برابر x باشد. در این صورت طبق تعمیم قضیه تالس در مثلث ABC داریم:



$$DE \parallel AB \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{5-x}{5} \Rightarrow 5x = 50 - 10x$$

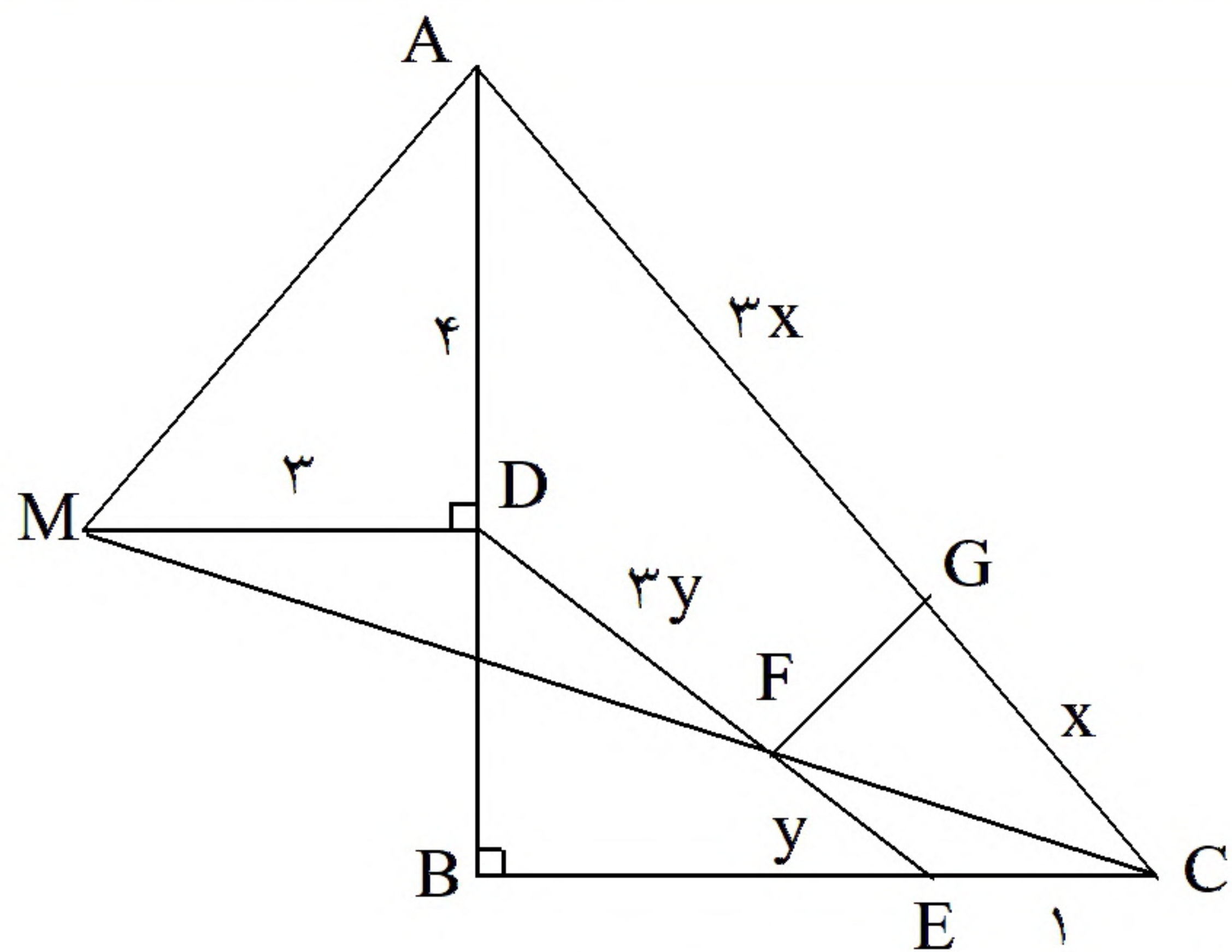
$$\Rightarrow 15x = 50 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$2R = \frac{10}{3} \Rightarrow R = \frac{5}{3} \Rightarrow \text{مساحت دایره} : S = \pi R^2 = \frac{25}{9}\pi$$

اگر شعاع دایره برابر R باشد، آنگاه داریم:



۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



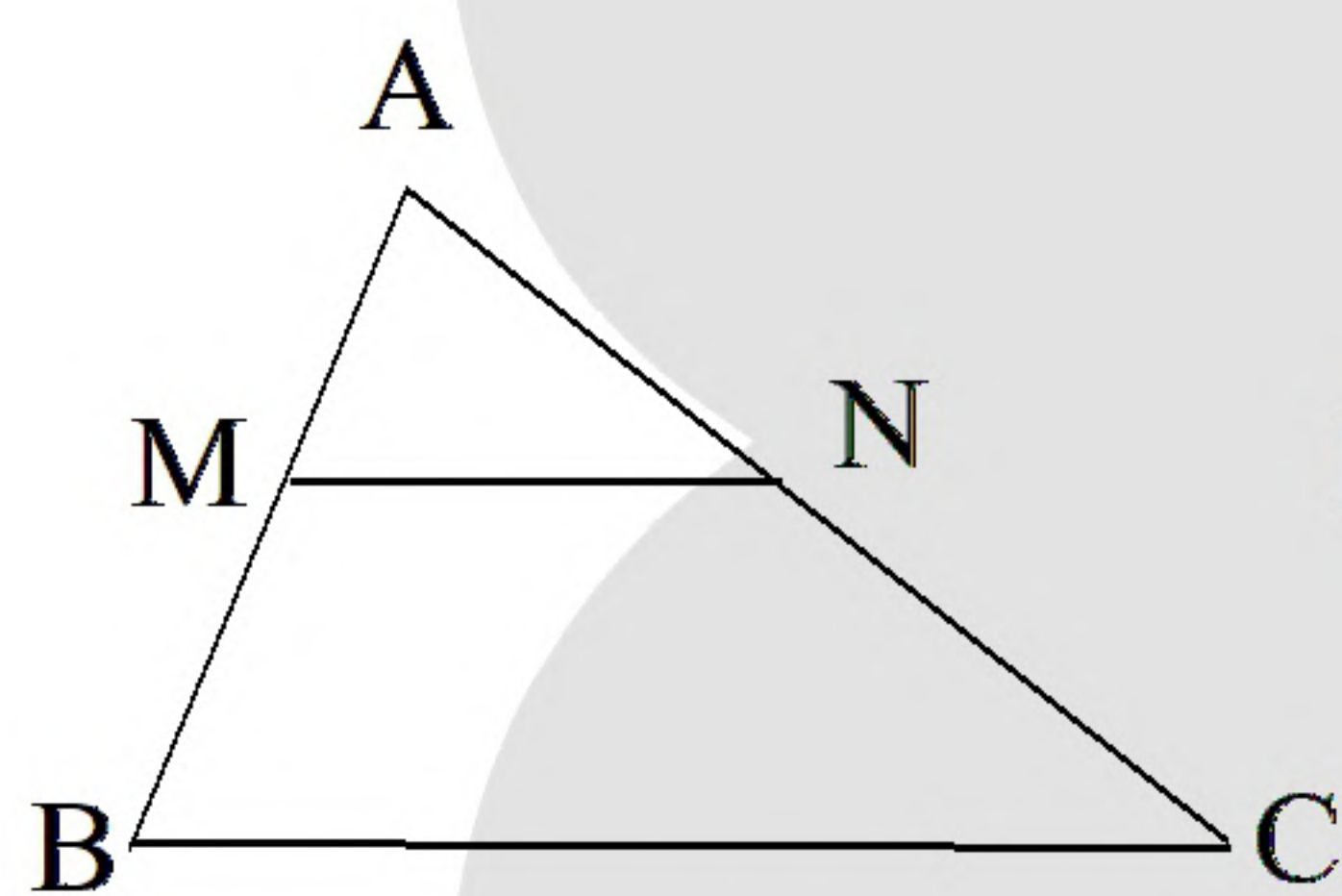
راه حل اول: بنابر فرض $\frac{AC}{CG} = \frac{DE}{EF} = 4$ در نظر می‌گیریم
 اکنون $CG = x$ پس $AG = 3x$ و $EF = y$ پس $DF = 3y$. اکنون
 از C به F وصل کرده امتداد می‌دهیم تا خطی که از D موازی
 BC رسم می‌شود را در نقطه‌ی M قطع کند در این صورت دو
 مثلث MDF و FEC دارای دو زاویه مساویند پس متشابهند.
 بنابراین:

$$\triangle FEC \sim \triangle DMF \Rightarrow \frac{MD}{EC} = \frac{DF}{FE} = \frac{MF}{FC} \xrightarrow[\substack{DF=3x \\ EF=x}]{\substack{DF=3x \\ EF=x}} \frac{MD}{EC} = \frac{MF}{FC} = 3 \xrightarrow{EC=1} \begin{cases} MD=3 \\ \frac{MF}{FC}=3 \end{cases}$$

از طرف دیگر مثلث AMD قائم‌الزاویه است. پس: $AM^2 = AD^2 + MD^2 = 4^2 + 3^2 = 25 \Rightarrow AM = 5$
 در نتیجه:

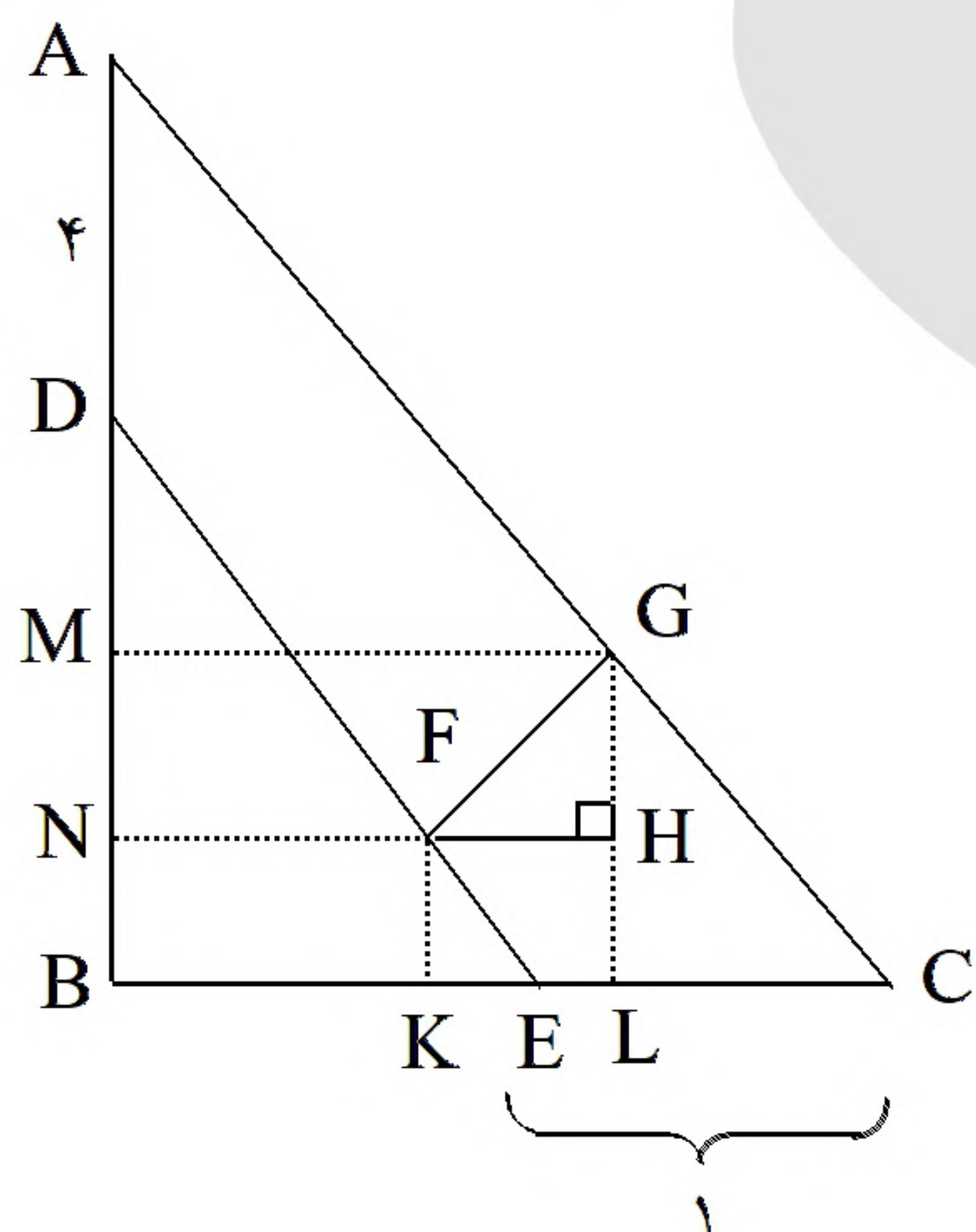
$$\triangle AMC: \frac{AG}{GC} = \frac{MF}{FC} = 3 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} AM \parallel FG \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{FG}{AM} = \frac{CG}{AC} \Rightarrow \frac{FG}{5} = \frac{1}{4} \Rightarrow FG = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$$

نکته: قضیه تالس و تعمیم آن: اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود بر دو ضلع دیگر پاره‌خط‌های متناسب ایجاد می‌کند و برعکس.



$$MN \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

خط فکری: با توجه به نسبت‌های بین اضلاع داده شده مسلماً باید از قضیه تالس در حل سؤال استفاده کنیم ولی FG ضلع هیچ مثلثی نیست. برای ایجاد مثلث با رسم خط اضافه CF به این مقصود می‌رسیم.
 راه حل دوم: مطابق شکل از نقاط F و G خطوطی موازی با اضلاع قائم مثلث ABC رسم می‌کنیم. طبق تعمیم قضیه تالس داریم:



$$\triangle BDE: FK \parallel BD \Rightarrow \frac{FK}{BD} = \frac{EF}{DE} = \frac{1}{4} \Rightarrow FK = \frac{1}{4}BD$$

$$\Rightarrow HL = \frac{1}{4}BD$$

$$\triangle ABC: GL \parallel AB \Rightarrow \frac{GL}{AB} = \frac{CG}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow GL = \frac{1}{4}AB$$

$$GH = GL - HL = \frac{1}{4}(AB - BD) = \frac{1}{4}AD = 1$$

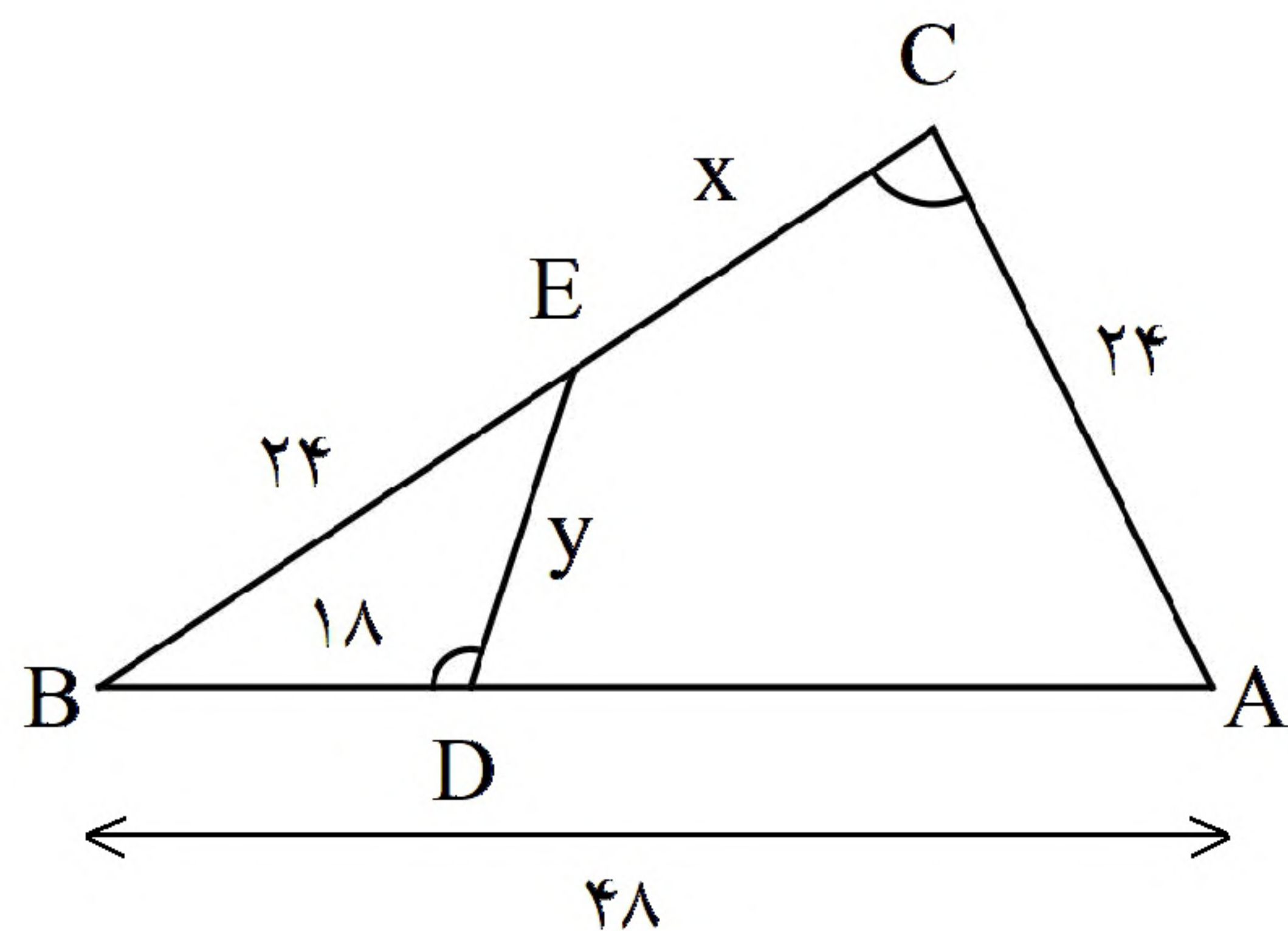
$$\triangle BDE: FN \parallel BE \Rightarrow \frac{FN}{BE} = \frac{DF}{DE} = \frac{3}{4} \Rightarrow FN = \frac{3}{4}BE$$

$$\triangle ABC: GM \parallel BC \Rightarrow \frac{GM}{BC} = \frac{AG}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow GM = \frac{3}{4}BC \Rightarrow NH = \frac{3}{4}BC$$

$$FH = NH - FN = \frac{3}{4}(BC - BE) = \frac{3}{4}EC = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$$



۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث ABC و BDE متشابهند زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} \widehat{ECA} = \widehat{BDE} \\ \widehat{B} = \widehat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BDE$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{18}{48} = \frac{24}{x+24} = \frac{24}{48}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 12 \\ \frac{18}{x+24} = \frac{24}{48} \Rightarrow \frac{18}{x+24} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 12 \end{array} \right.$$

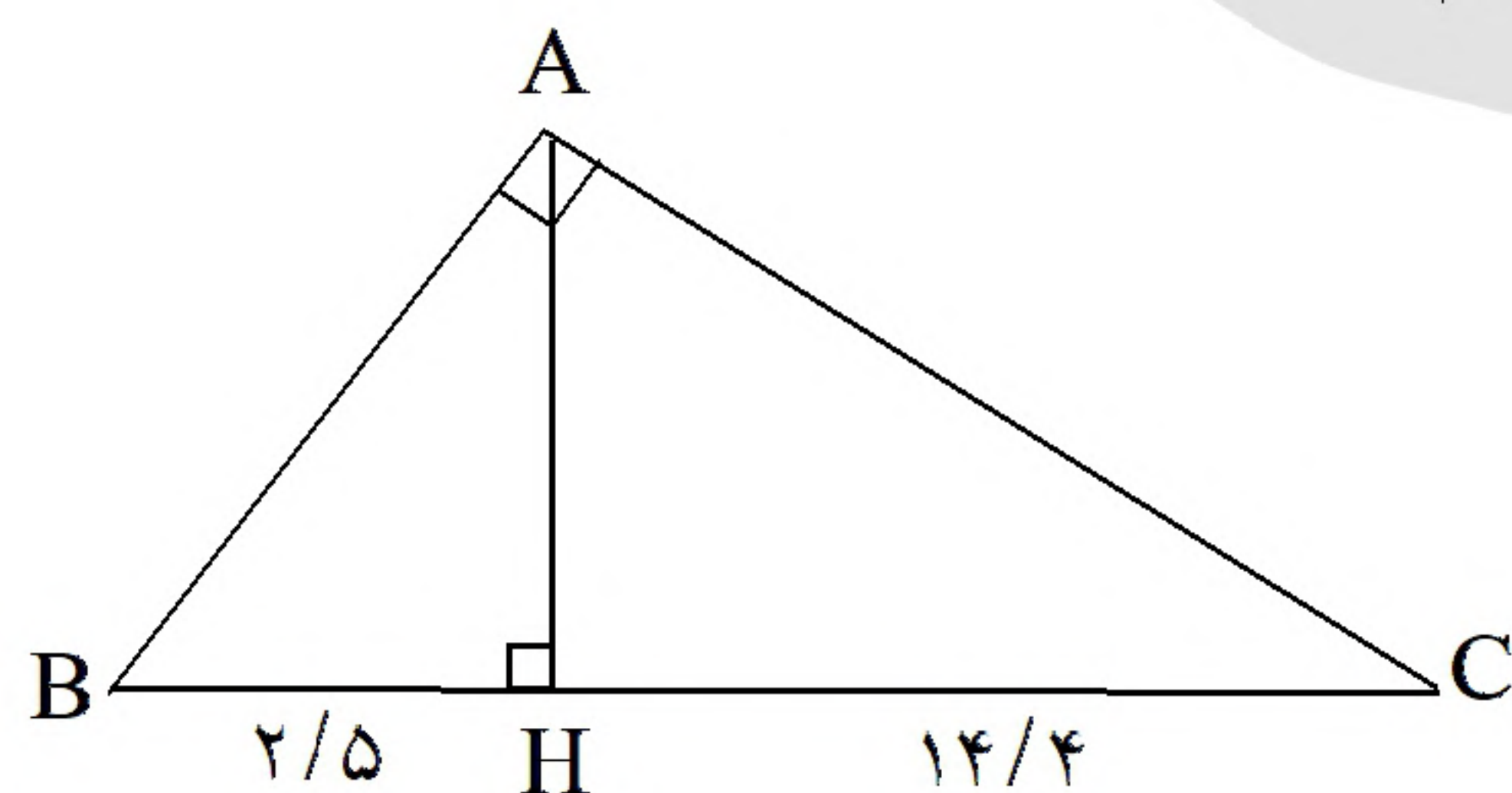
بنابراین مقدار $\frac{x}{y}$ برابر ۱ است.

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون دو مثلث ارتفاع برابر دارند پس نسبت مساحت‌ها با نسبت قاعده‌ها برابر است:

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{BC}{DE} = \frac{12}{5} = 2/4$$

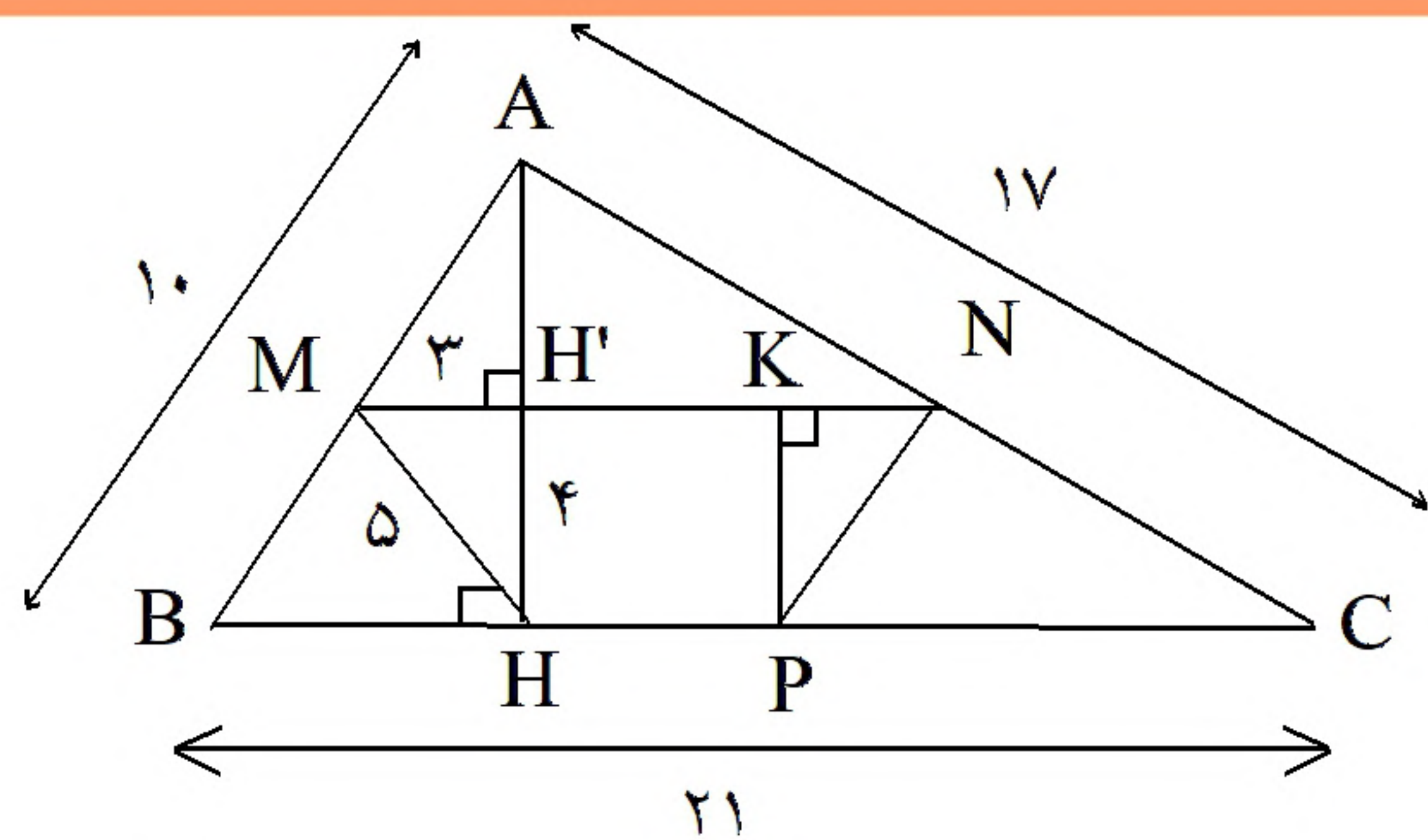
«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه ABC ارتفاع AH روی وتر BC پاره‌خطهایی به طول ۲/۵ و ۱۴/۴ جدا کرده است. با استفاده از رابطه طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 2/5 \times 14/4 = \frac{25}{10} \times \frac{144}{10}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{5 \times 12}{10} = \frac{12}{2} = 6$$



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر فرض سؤال شکل مقابل را خواهیم داشت. M وسط AB و N وسط AC است. پس MN میان خط است پس $MN = \frac{BC}{2} = \frac{21}{2}$ و در ضمن بنابر قضیه تالس ارتفاع AH را نیز نصف می کند پس:

$$HH' = \frac{AH}{2} = 4$$

درضمن در مثلث قائم الزویه ABH پاره خط HM میانه ی وارد

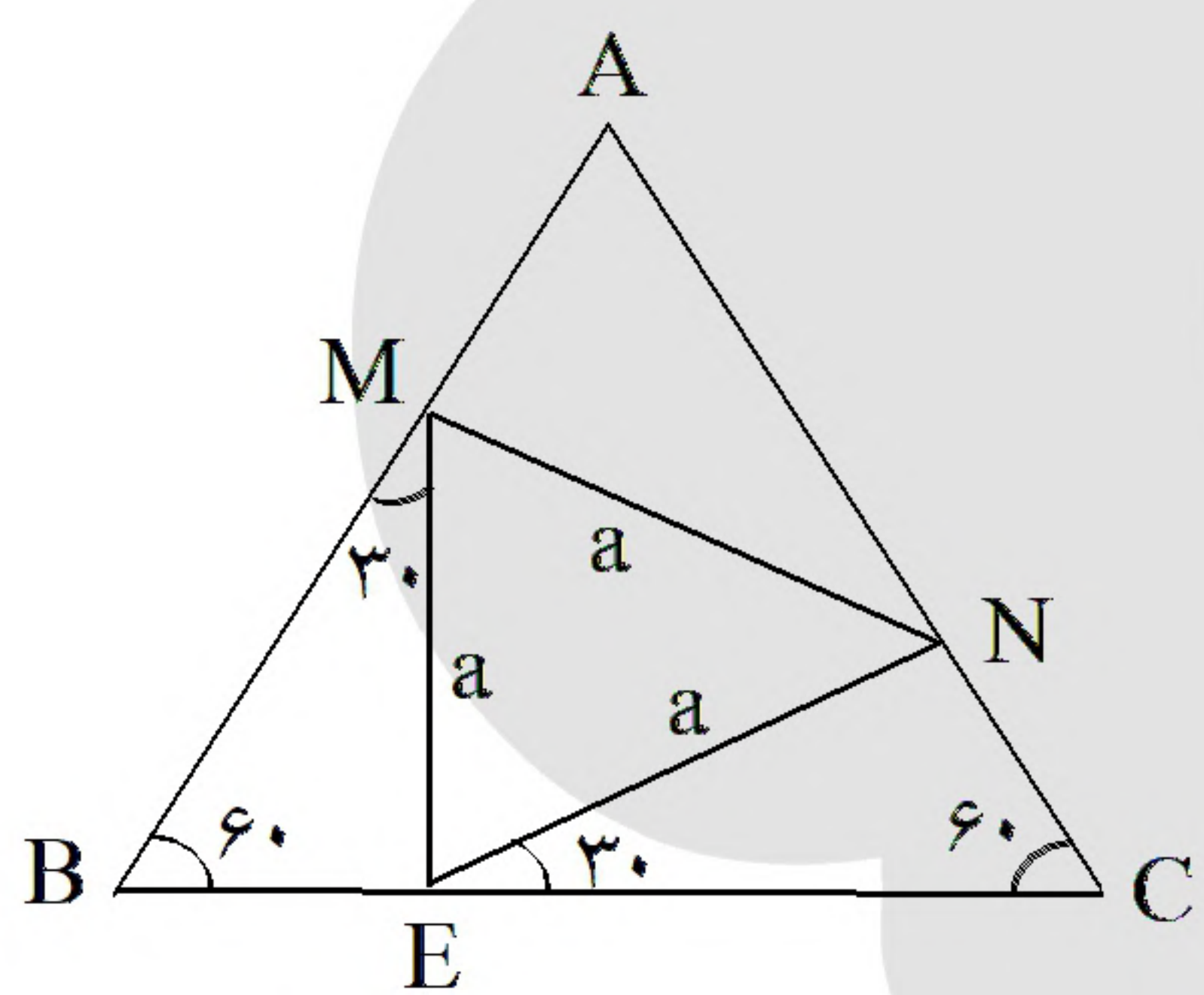
بر وتر است پس:

$$HM = \frac{AB}{2} = 5$$

پس در مثلث قائم الزویه MHH' طول پاره خط MH' برابر ۳ می شود. در صورتی که عمود PK را بر MN وارد کنیم آن گاه $NK = 3$ پس $H'K = \frac{21}{2} - (3 + 3) = \frac{9}{2}$ پس $PH = H'K = \frac{9}{2}$ بنابراین:

$$S_{MHPN} = \frac{1}{2} HH' (MN + HP) = \frac{1}{2} (4) \left(\frac{21}{2} + \frac{9}{2} \right) = 2 \times \frac{30}{2} = 30$$

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض کنیم اضلاع مثلث متساوی الاضلاع MNE بر اضلاع مثلث متساوی الاضلاع ABC عمود باشد. اگر طول اضلاع مثلث MNE برابر a باشد، داریم:



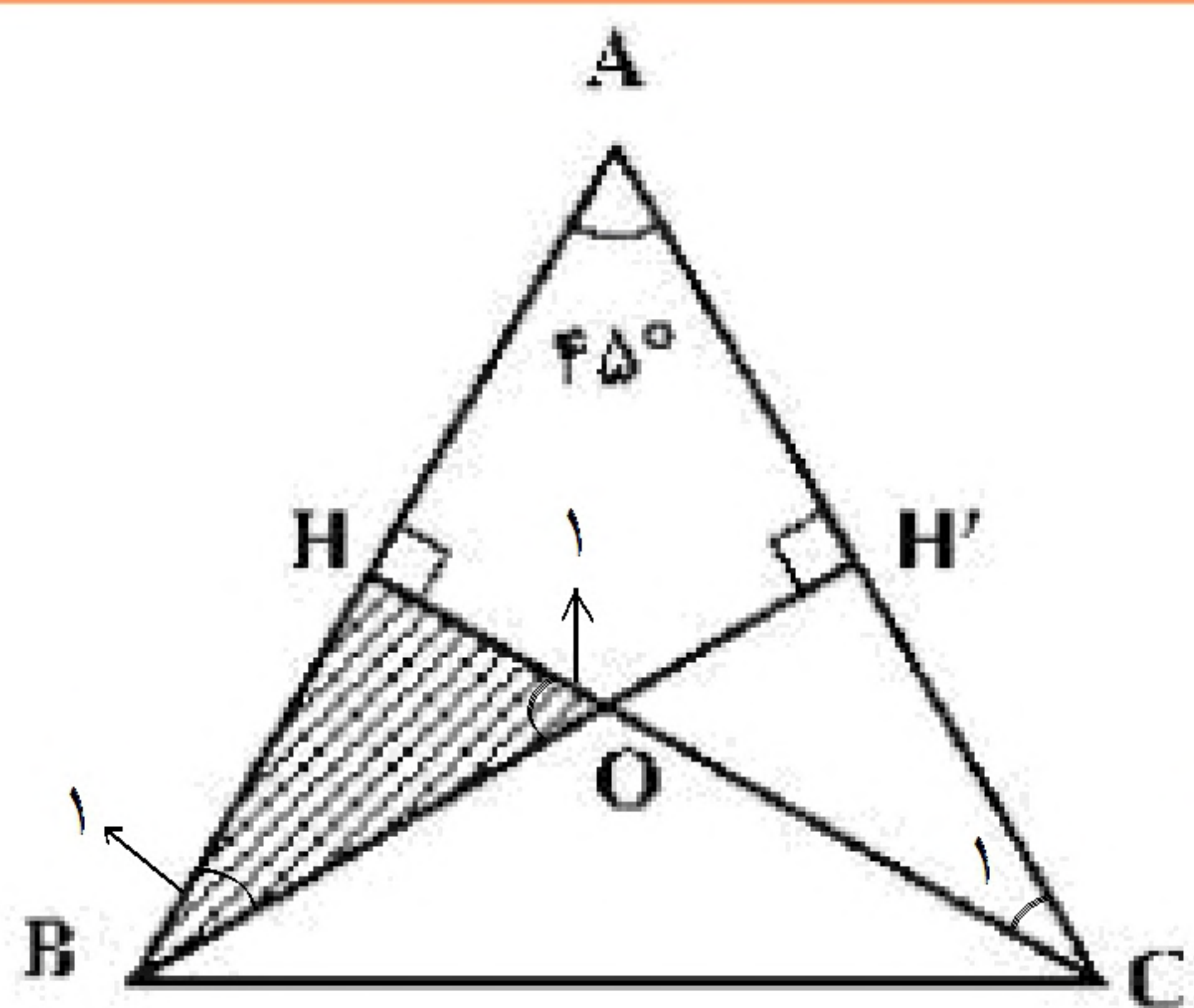
$$\triangle BME : \hat{B} = 60^\circ \Rightarrow ME = \frac{\sqrt{3}}{2} BM \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} BM$$

$$\Rightarrow BM = \frac{2a}{\sqrt{3}} \quad (1)$$

$$\triangle MNE : \hat{M} = 30^\circ \Rightarrow BE = \frac{BM}{2} \xrightarrow{\text{از ۱}} BE = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

به همین ترتیب معلوم می شود $EC = \frac{2a}{\sqrt{3}}$ پس $BC = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$ بنابراین:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MNE}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} BC^2}{\frac{\sqrt{3}}{4} ME^2} = \frac{BC^2}{ME^2} = \frac{3a^2}{a^2} = 3$$



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

در صورت سؤال مشخص نشده ساق بعدی مثلث متساوی الساقین ABC کدام است. فرض کنیم: $AB = AC = ۸$. در این صورت مثلث‌های قائم‌الزاویه ACH و ABH' متساوی الساقین هم خواهند بود. بنابراین:

$$\triangle AHC : AC^2 = AH^2 + CH^2 \xrightarrow{AH=CH} ۸^2 = ۲AH^2$$

$$\Rightarrow AH^2 = ۳۲ \Rightarrow AH = ۴\sqrt{۲}$$

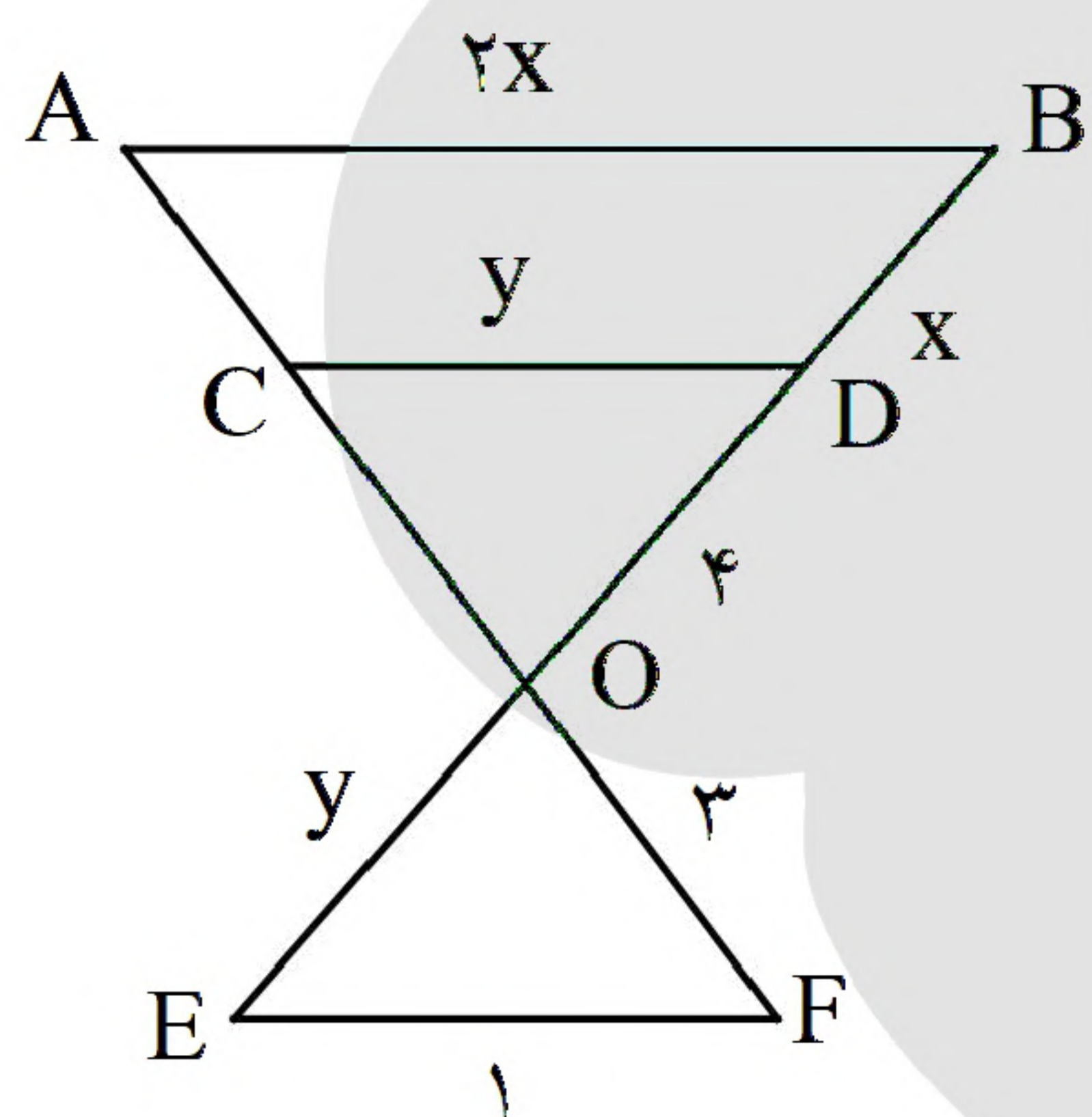
$$BH = AB - AH \Rightarrow BH = ۸ - ۴\sqrt{۲}$$

در ضمن در مثلث قائم‌الزاویه OBH چون $\hat{B}_1 = ۴۵^\circ$ پس $\hat{O}_1 = ۴۵^\circ$ در نتیجه $OH = BH = ۸ - ۴\sqrt{۲}$ داریم:

$$S_{OBH} = \frac{1}{2} BH \times OH = \frac{1}{2} (۸ - ۴\sqrt{۲})^2 = \frac{۱۶}{۲} (۲ - \sqrt{۲})^2 = ۸(۶ - ۴\sqrt{۲})$$

$$= ۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲}) = \frac{۱۶(۳ - ۲\sqrt{۲})(۳ + ۲\sqrt{۲})}{۳ + ۲\sqrt{۲}} = \frac{۱۶}{۳ + ۲\sqrt{۲}}$$

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:



$$\triangle OAB : CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۴+x} = \frac{y}{2x}$$

$$\Rightarrow ۸x = ۴y + xy \quad (۱)$$

$$CD \parallel EF \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle OCD \sim \triangle OEF$$

$$\frac{OD}{OE} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{۴}{y} = \frac{y}{۱} \Rightarrow y^2 = ۴ \Rightarrow y = ۲ \quad (۲)$$

$$(۲), (۱) \Rightarrow ۸x = ۸ + ۲x \Rightarrow ۶x = ۸ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳}$$

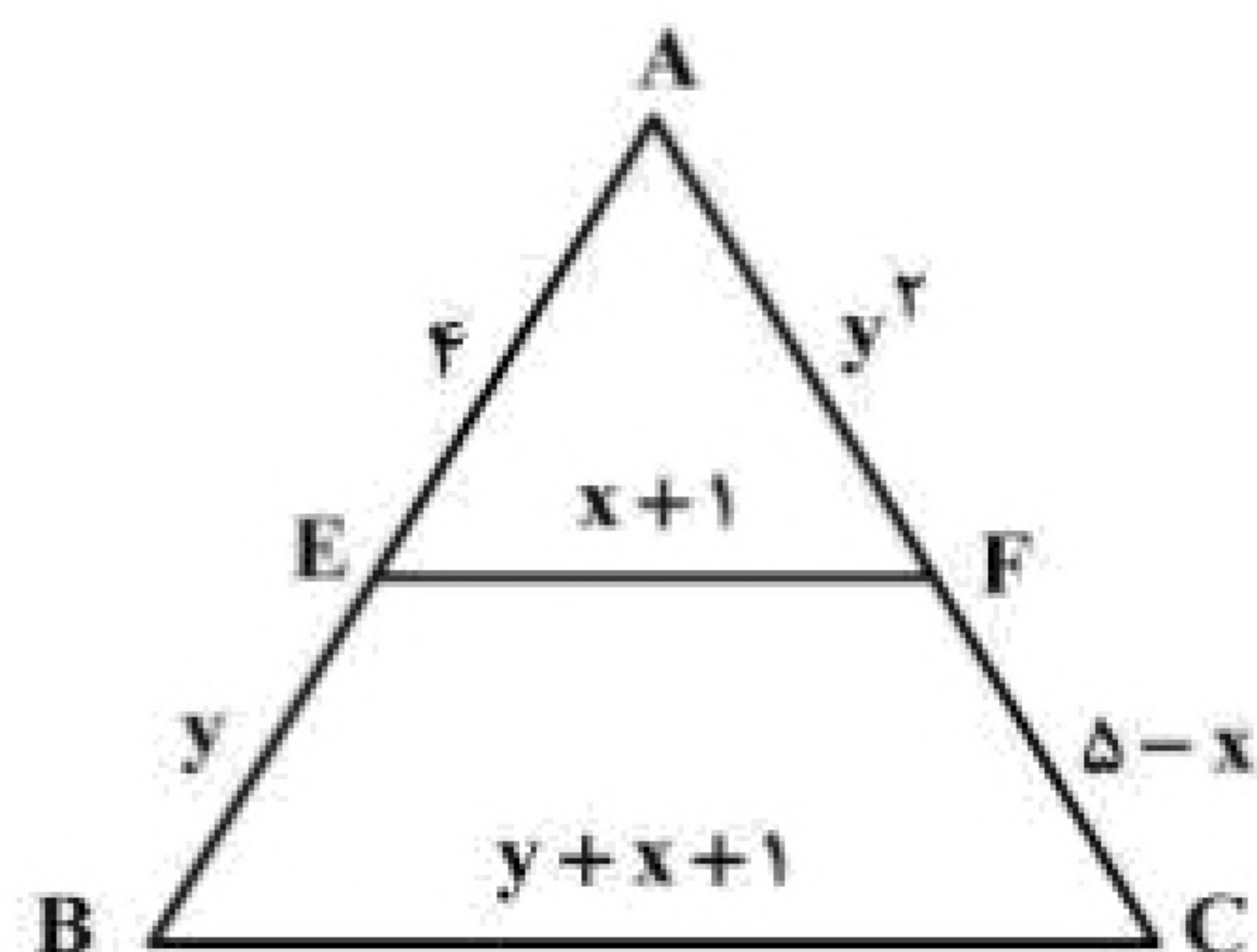
بنابراین:

$$CD \parallel EF \Rightarrow \triangle OCD \sim \triangle OEF \Rightarrow \frac{OC}{OF} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{OC}{۳} = \frac{y}{۱} \xrightarrow{y=۲} OC = ۶$$

$$\triangle OAB : CD \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{AC} = \frac{OD}{BD} \Rightarrow \frac{۶}{AC} = \frac{۴}{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow \frac{۶}{AC} = ۳ \Rightarrow AC = ۲$$



۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:



$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \Rightarrow y^3 = 20 - 4x \quad (1)$$

$$EF \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1}$$

$$4y + 4x + 4 = 4x + 4 + xy + y$$

$$\Rightarrow 4y = y(x+1) \Rightarrow x+1 = 4 \Rightarrow x = 3$$

$$y^3 = 20 - 12 \Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$$

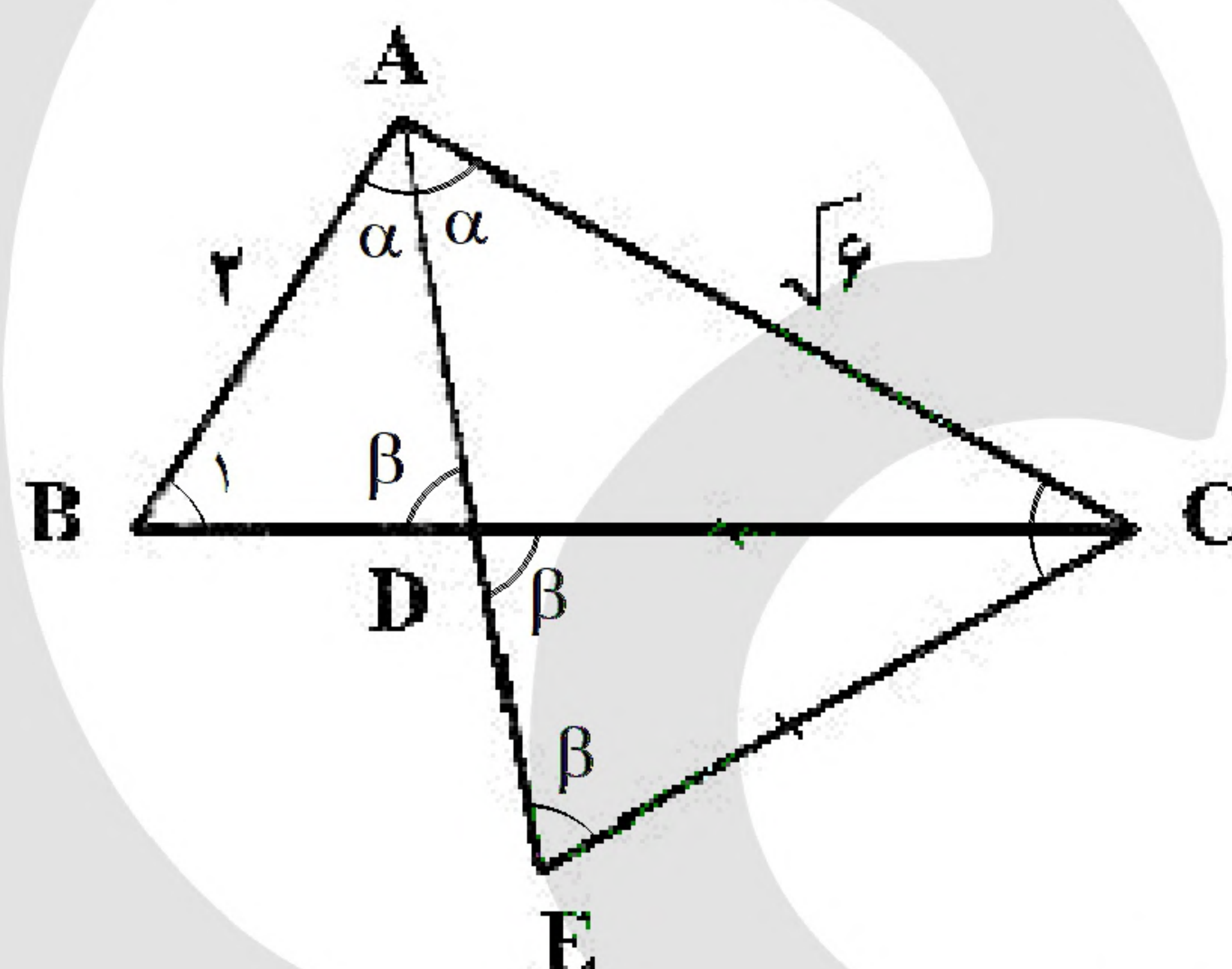
$$y - 2x = 2 - 6 = -4$$

حال از تساوی ۱ نتیجه می‌گیریم.

بنابراین:

پس گزینه ۱ درست است.

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



با توجه به شکل دو مثلث ABD و AEC متشابهند چون دو زاویه برابر دارند.

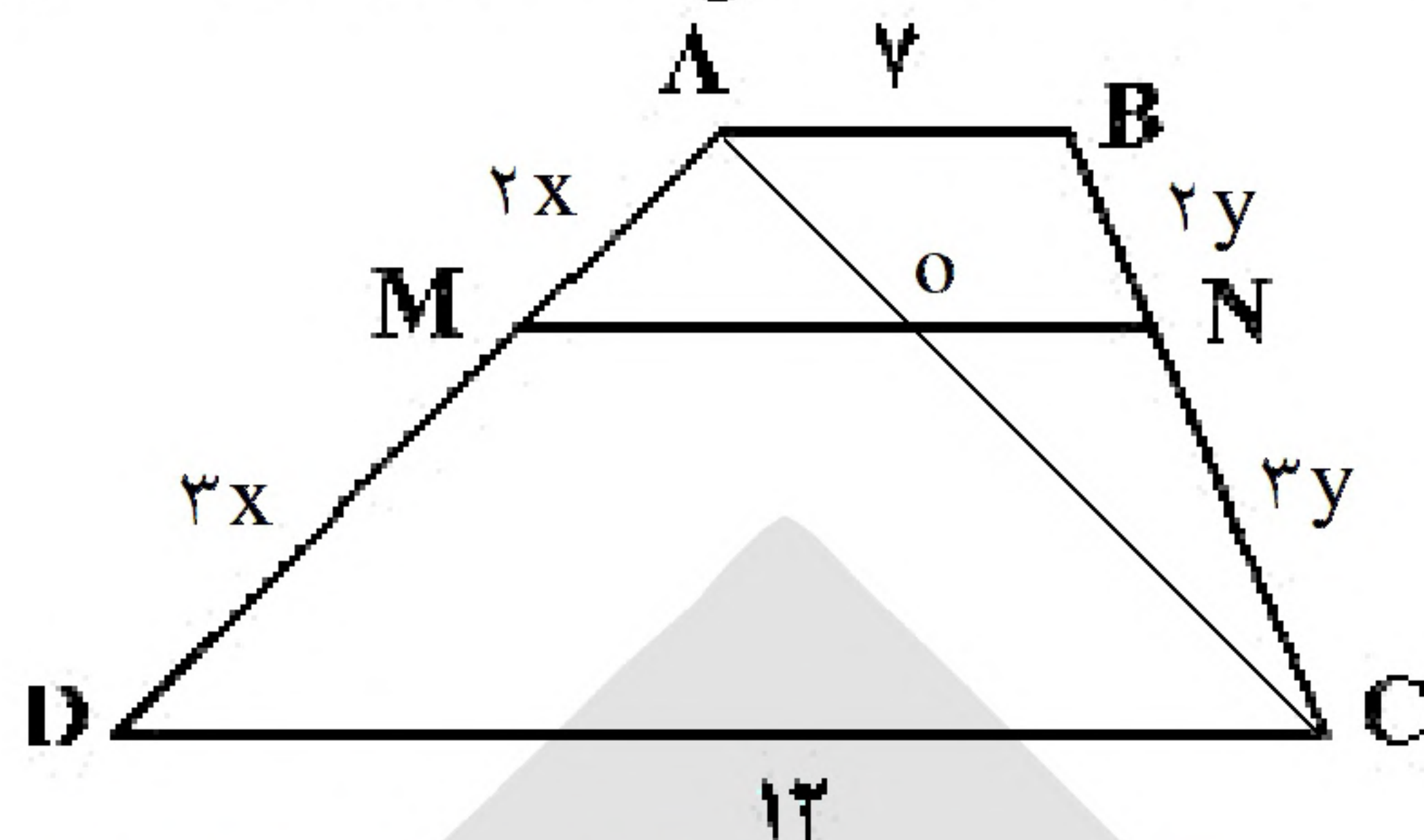
$$(\widehat{BAD} = \widehat{EAC} = \alpha \text{ و } \widehat{BDA} = \widehat{AEC} = \beta)$$

$$\triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بنابر فرض $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ در نظر می‌گیریم $MA = 2x$ و $MD = 3x$. پس بنابر قضیه‌ی

تالس در دوزنقه نتیجه می‌گیریم $BN = 2y$, $CN = 3y$. حال قطر AC را رسم می‌کنیم تا MN را در نقطه‌ی O قطع کند. بنابر قضیه تالس می‌نویسیم:



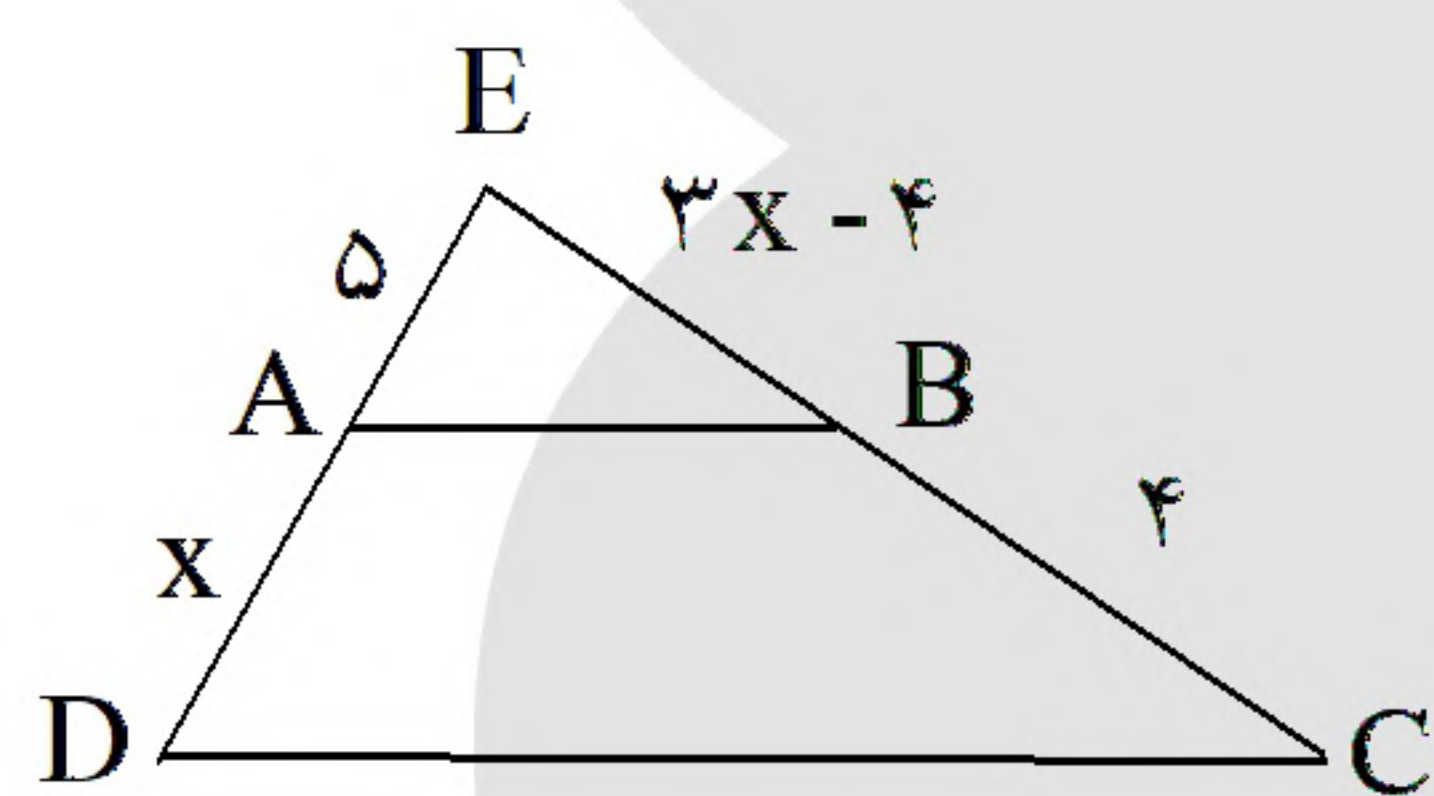
$$\triangle ADC : OM \parallel DC \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{OM}{DC} \Rightarrow \frac{2x}{5x} = \frac{OM}{12} \Rightarrow OM = \frac{24}{5}$$

$$\triangle ABC : ON \parallel AB \Rightarrow \frac{CN}{CB} = \frac{ON}{AB} \Rightarrow \frac{3y}{5y} = \frac{ON}{7} \Rightarrow ON = \frac{21}{5}$$

$$MN = OM + ON = \frac{24}{5} + \frac{21}{5} = \frac{45}{5} = 9$$

بنابراین:

۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به کمک رابطه‌ی تالس x را به دست می‌آوریم.



$$AB \parallel DC \Rightarrow \frac{EA}{AD} = \frac{EB}{BC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{3x-4}{4} \Rightarrow 3x^2 - 4x - 20 = 0$$

به کمک دستور b' این معادله را حل می‌کنیم.

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{3} = \frac{2 \pm 8}{3} \Rightarrow x = \frac{10}{3} \text{ یا } x = -2$$

مسئله $x = -2$ قابل قبول نیست. پس با $x = \frac{10}{3}$ مسئله را حل می‌کنیم.

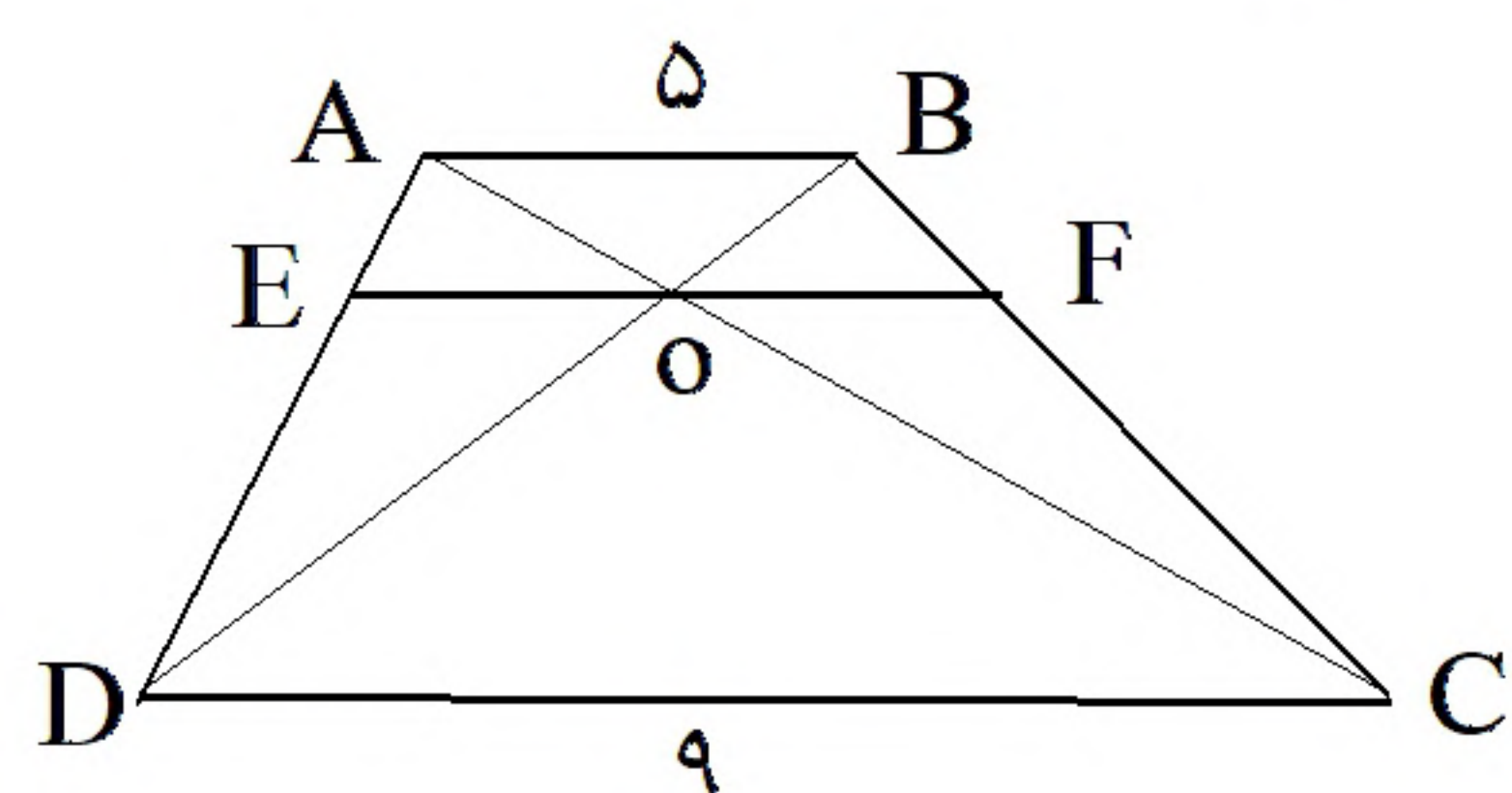
$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle ABE \sim \triangle CDE \Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{EDC}} = \left(\frac{EA}{ED}\right)^2 = \left(\frac{5}{5+x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABE}}{S_{EDC}} = \left(\frac{5}{5 + \frac{10}{3}}\right)^2 = \frac{25}{\frac{25 \times 25}{9}} = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{تفصیل از مخرج}} \frac{S_{ABE}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{16}{9} S_{ABE}$$



۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دو مثلث OAB و ODC متشابه‌اند زیرا $AB \parallel DC$ است.



$$\triangle OAB \sim \triangle ODC \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow[\text{در مخرج ترکیب}]{\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD} = \frac{5}{14}}$$

بنابراین:

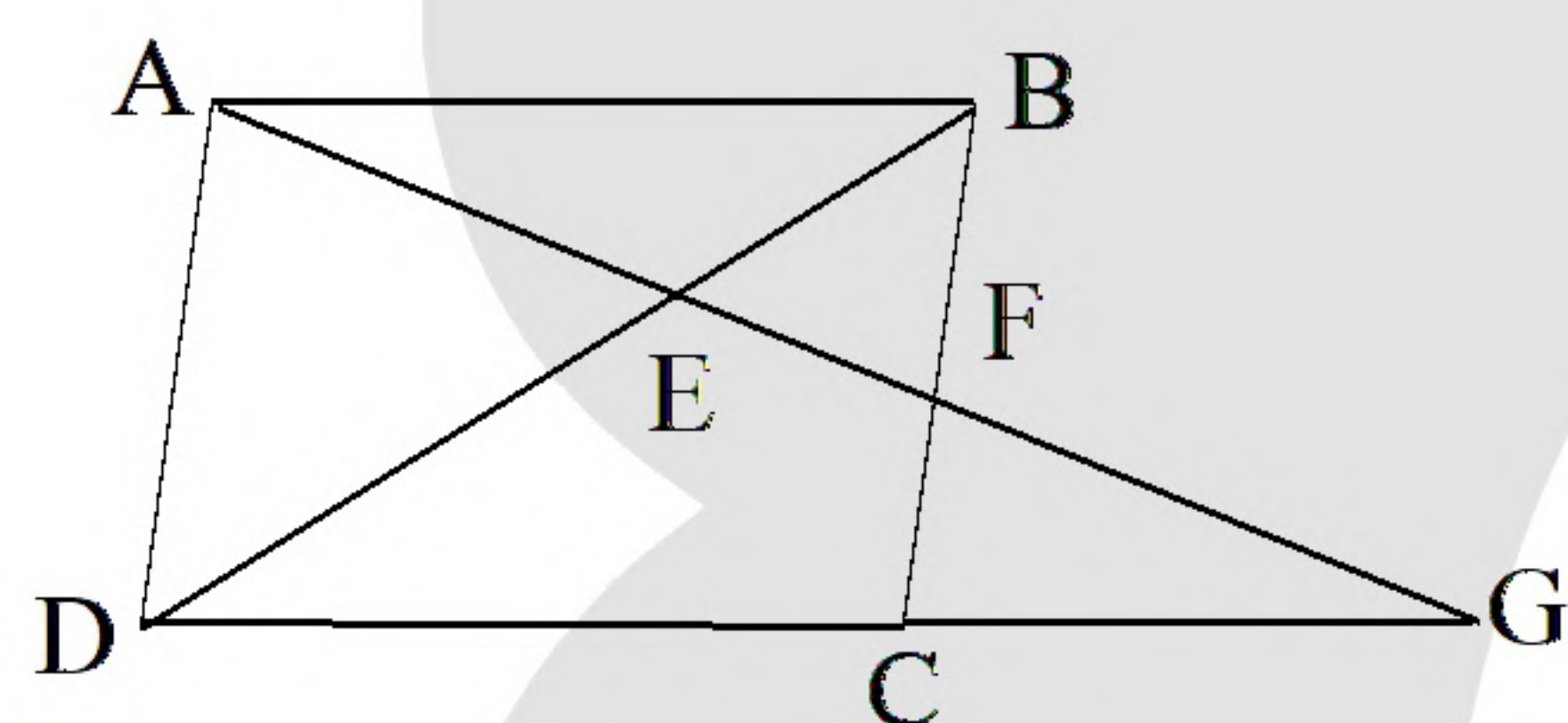
$$\triangle ADC : OE \parallel DC \Rightarrow \frac{OE}{DC} = \frac{OA}{AC} \Rightarrow \frac{OE}{9} = \frac{5}{14} \Rightarrow OE = \frac{45}{14}$$

$$\triangle BDC : OF \parallel DC \Rightarrow \frac{OF}{DC} = \frac{OB}{BD} \Rightarrow \frac{OF}{9} = \frac{5}{14} \Rightarrow OF = \frac{45}{14}$$

$$EF = OE + OF = \frac{90}{14} = \frac{45}{7}$$

پس:

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه‌ی اساسی تشابه می‌نویسیم.



$$AD \parallel BF \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BEF \Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{DE}{BE} \quad (1)$$

$$AB \parallel DG \Rightarrow \triangle AEB \sim \triangle DEG \Rightarrow \frac{DE}{EB} = \frac{EG}{AE} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EF} = \frac{EG}{AE} \Rightarrow AE^2 = EF \times EG \quad \text{از ۱, ۲}$$

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. وتر این مثلث $2x+3$ است. پس بنابر قضیه‌ی فیثاغورس می‌نویسیم:

$$(2x+3)^2 = (2x+1)^2 + (x+1)^2$$

$$4x^2 + 9 + 12x = 4x^2 + 1 + 4x + x^2 + 1 + 2x \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 7, x = -1$$

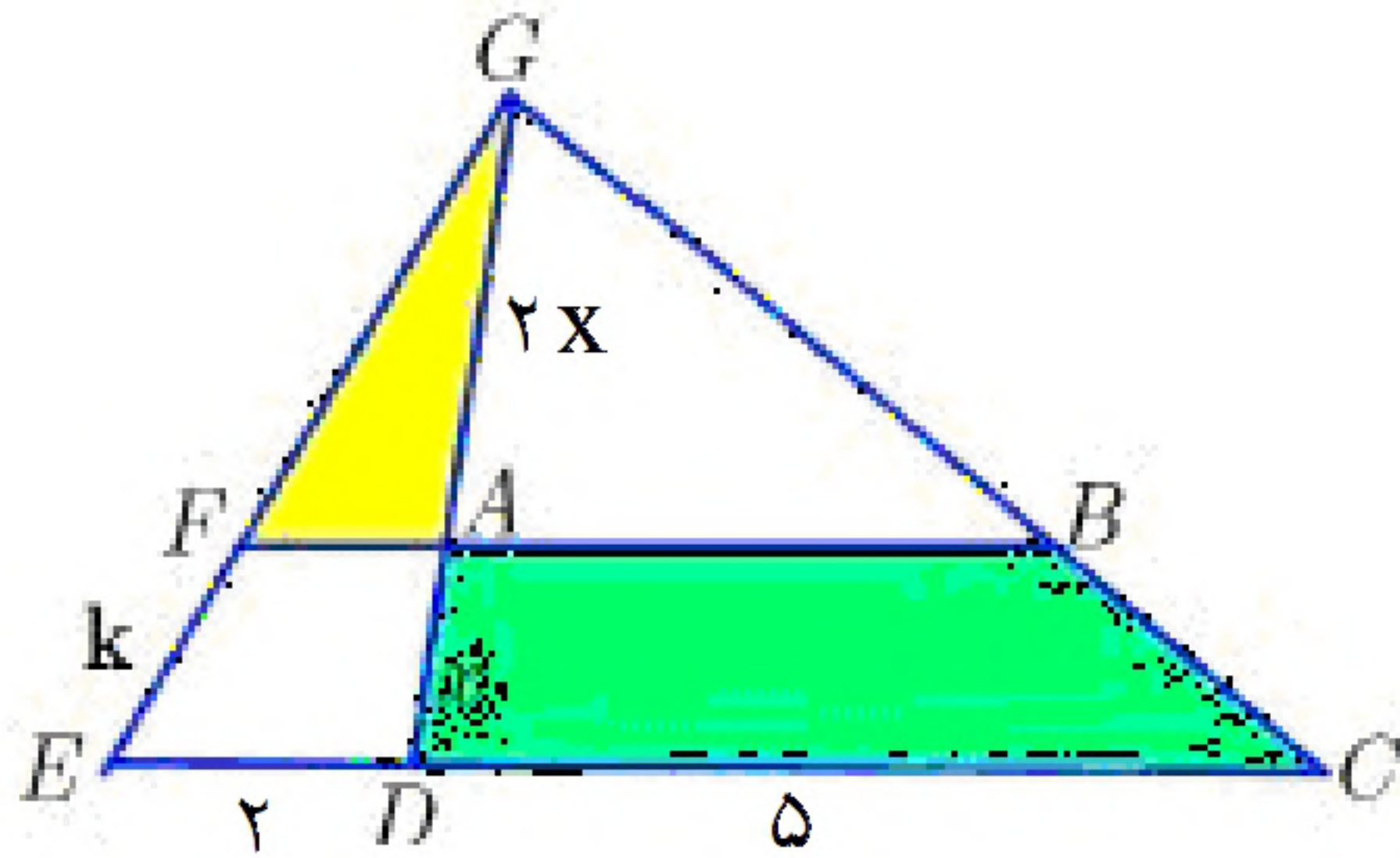
مقدار $x = -1$ قابل قبول نیست چون ضلع $x+1$ به ازای آن صفر می‌شود. به ازای $x = 7$ اندازه‌ی اضلاع مثلث

$$S = \frac{1}{2}(8)(15) = 60$$

برابر ۱۷ و ۱۵ و ۸ هستند. بنابراین:



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. فرض کنیم $DA = x$ باشد پس بنابر فرض $DG = ۳AD$ نتیجه می گیریم $AG = ۲x$. داریم:



$$AF \parallel ED \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFG \sim \triangle GED$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{GED}} = \left(\frac{AG}{GD}\right)^2 = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^2 = \frac{۴}{۹} \quad (۱)$$

در ضمن دو مثلث GEC و AED دارای ارتفاع مشترک از رأس G هستند پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایشان است.

$$\frac{S_{GED}}{S_{GEC}} = \frac{ED}{EC} = \frac{۲}{۷} \Rightarrow S_{GED} = \frac{۲}{۷} S_{GEC} \quad (۲)$$

حال از ۱ و ۲ نتیجه می گیریم $S_{AFG} = \frac{۸}{۶۳} S_{GEC}$.
از طرف دیگر:

$$AB \parallel DC \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle AGB \sim \triangle GDC \Rightarrow \frac{S_{AGB}}{S_{GDC}} = \left(\frac{AG}{GD}\right)^2 = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^2 = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow[\text{از صورت}]{\text{تفضیل}} \frac{S_{ABCD}}{S_{GDC}} = \frac{۵}{۹} \quad (۳)$$

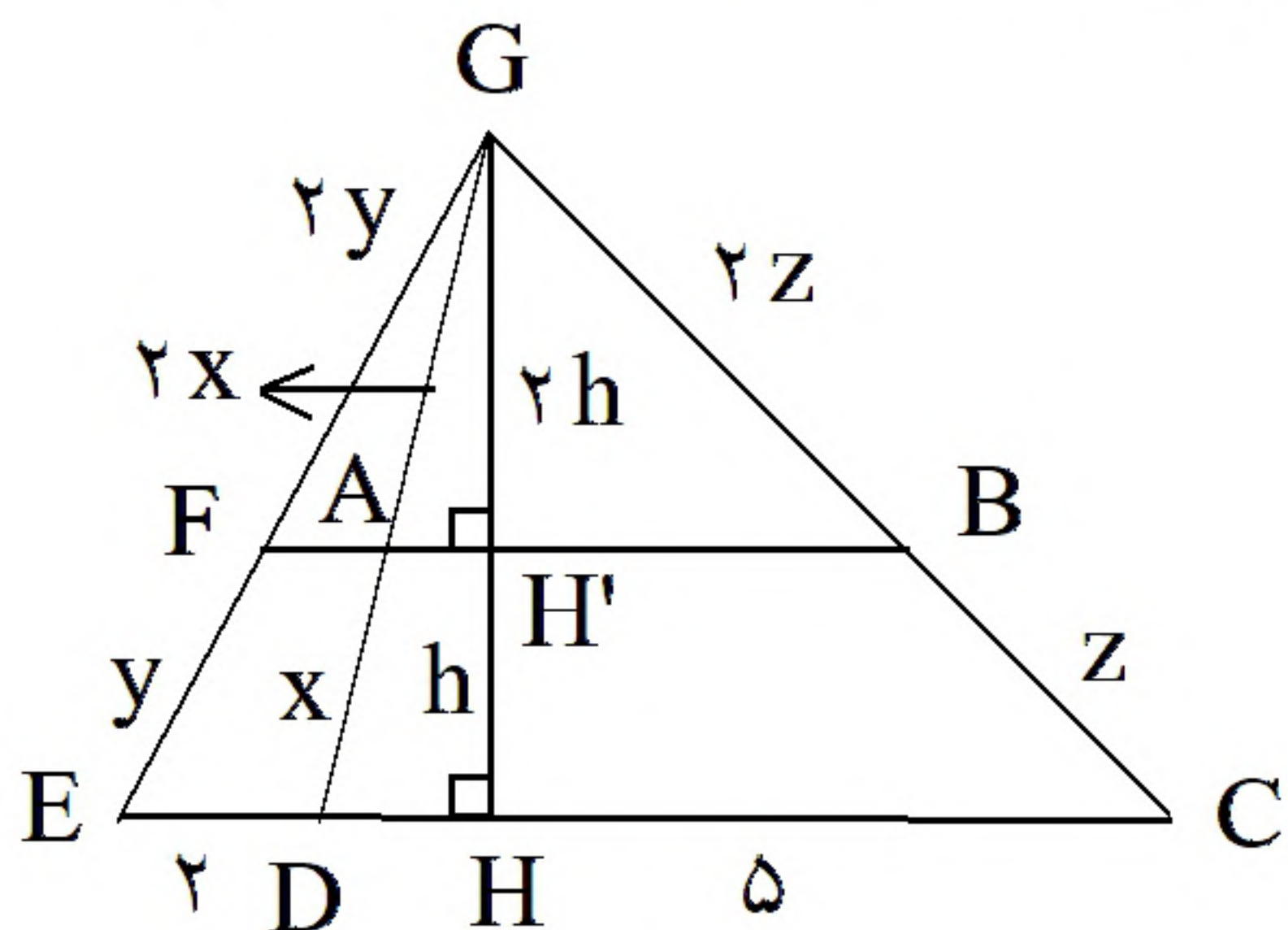
در ضمن دو مثلث GEC و GDC دارای ارتفاع مشترک از رأس G هستند پس:

$$\frac{S_{GDC}}{S_{GEC}} = \frac{DC}{EC} = \frac{۵}{۷} \quad (۴)$$

حال از تساوی‌های ۳ و ۴ نتیجه می گیریم $S_{ABCD} = \frac{۲۵}{۶۳} S_{GEC}$. بنابراین:

$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{۸}{۶۳} S_{GEC}}{\frac{۲۵}{۶۳} S_{GEC}} = \frac{۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{۸}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۳۲\%$$

راه حل دوم: با فرض $AD = x$ نتیجه می گیریم $AG = ۲x$ و با استفاده از تالس $\frac{GB}{BC} = \frac{FG}{FE} = \frac{۲x}{x} = ۲$ به همین علت اندازه‌های روی شکل را خواهیم داشت. با رسم ارتفاع GH نیز معلوم می شود $GH' = ۲HH'$ داریم:



$$\triangle GED : AF \parallel ED \Rightarrow \frac{AF}{ED} = \frac{GF}{GE} \Rightarrow \frac{AF}{۲} = \frac{۲y}{۳y} \Rightarrow AF = \frac{۴}{۳}$$

$$\triangle GDC : AB \parallel DC \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{GB}{GC} \Rightarrow \frac{AB}{۵} = \frac{۲z}{۳z} \Rightarrow AB = \frac{۱۰}{۳}$$

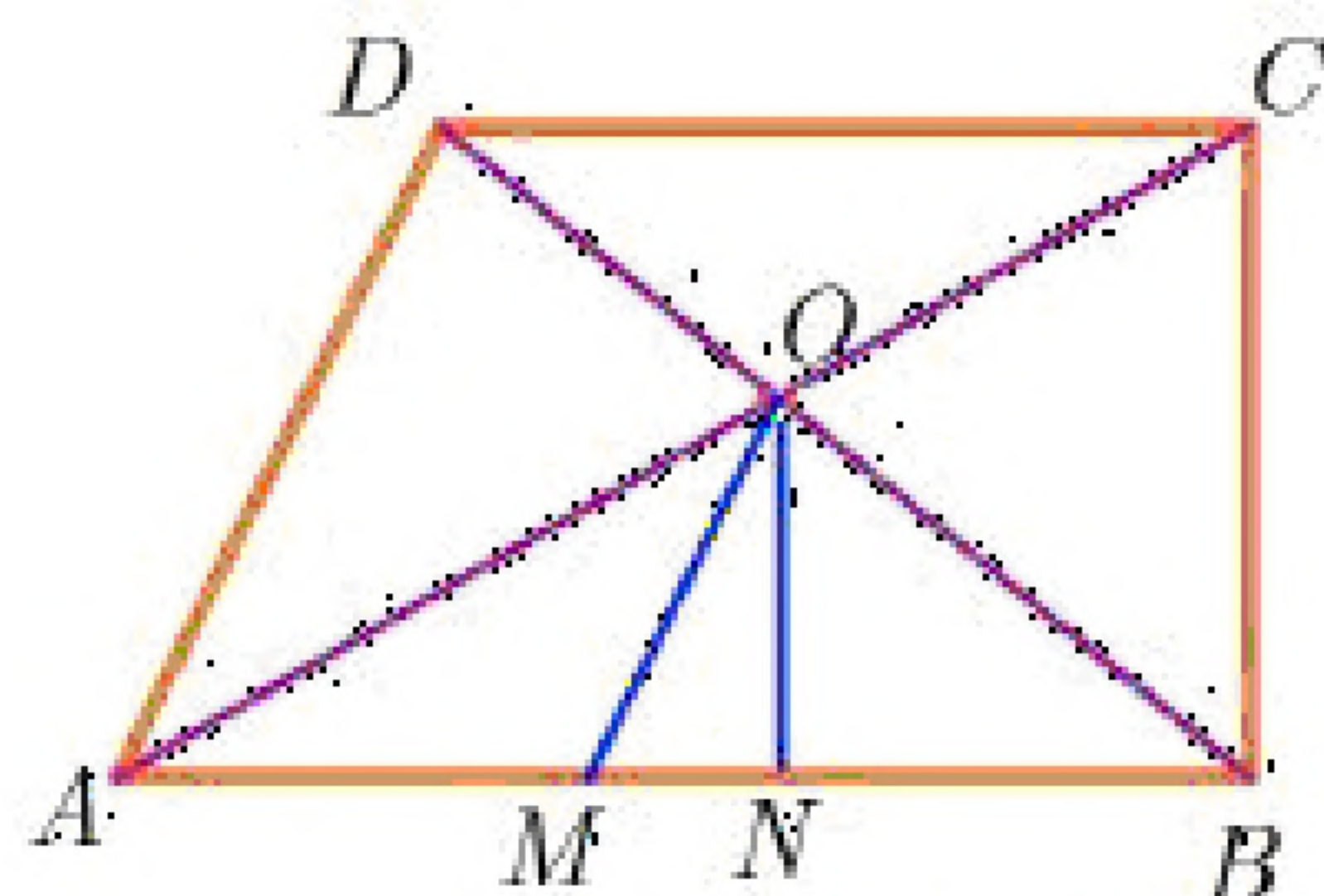
$$\frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{2}(۲h)(AF)}{\frac{1}{2}h(AB + DC)} = \frac{۲ \times \frac{۴}{۳}}{\frac{۱۰}{۳} + ۵} = \frac{۸}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{AFG}}{S_{ABCD}} = \frac{۸}{۲۵} \times ۱۰۰ = ۳۲\%$$

بنابراین:



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با دو بار استفاده از قضیه تالس می‌نویسیم:



$$ABC : ON \parallel BC \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{OA}{OC} \quad (۱)$$

$$\triangle ABC : OM \parallel AD \Rightarrow \frac{BM}{AM} = \frac{OB}{OD} \quad (۲)$$

$$DC \parallel AB \xrightarrow[\text{تشابه}]{\text{قضیه اساسی}} \triangle ODC \sim \triangle OAB \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \quad (۳)$$

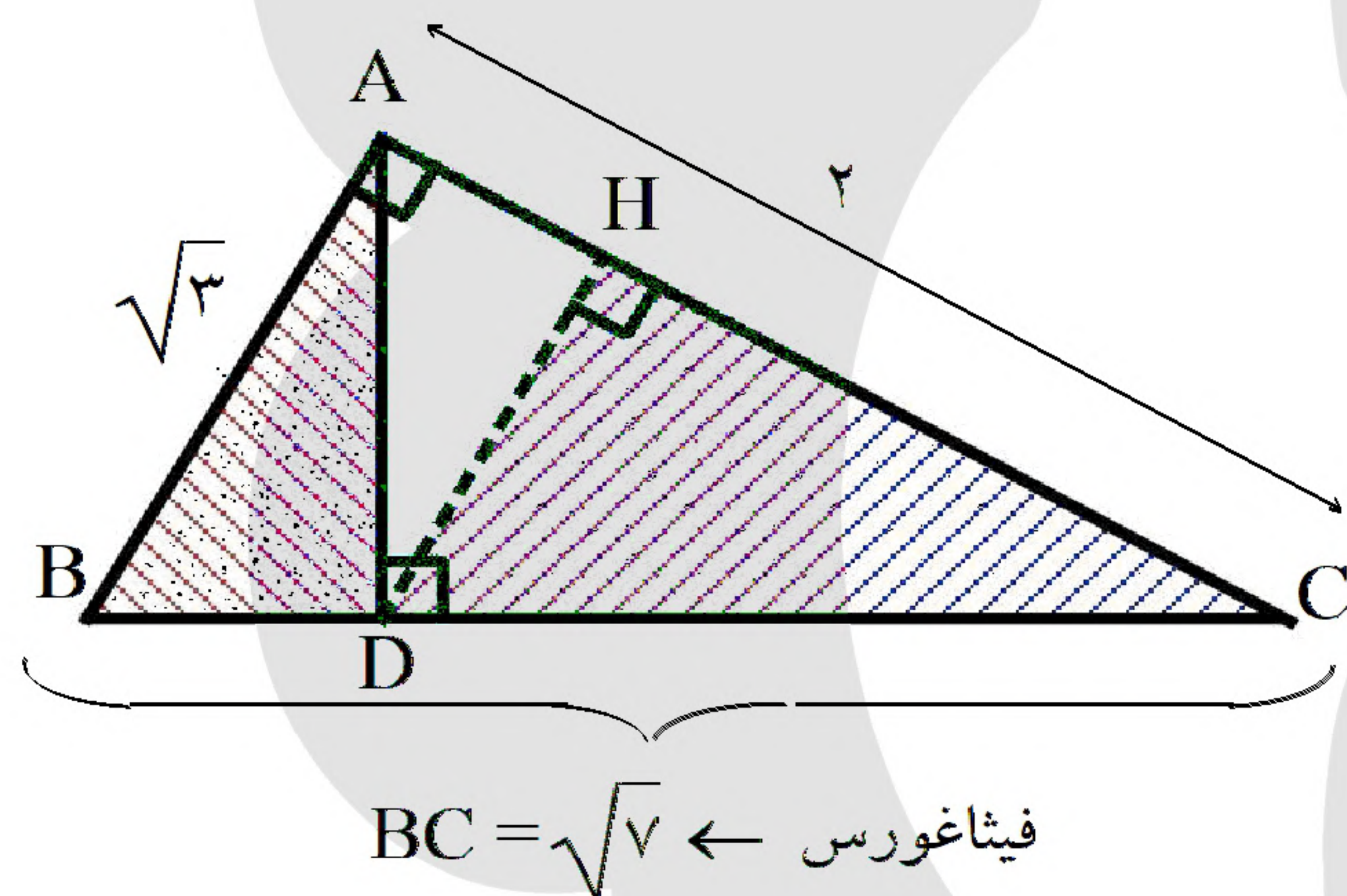
از طرف دیگر:

بنابراین:

$$۱, ۲, ۳ \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{BM}{AM} \xrightarrow[\text{صورت}]{\text{ترکیب در}} \frac{AB}{NB} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow AM = NB \Rightarrow \frac{AM}{BN} = ۱$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

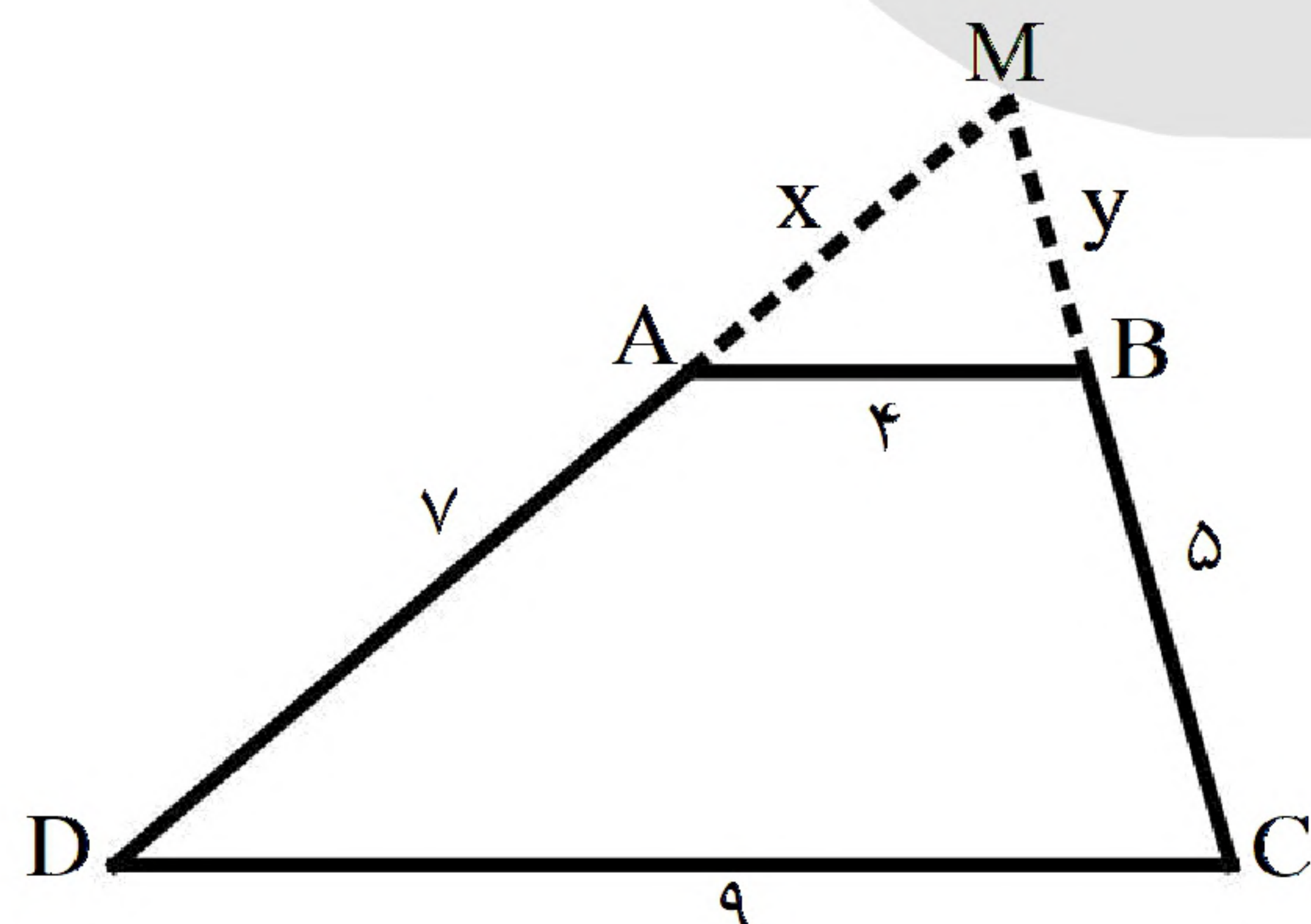
$$AC^2 = DC \times BC \Rightarrow ۴ = DC \times \sqrt{۷} \Rightarrow DC = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$



$$\frac{S_{DHC}}{S_{ABD}} = \left(\frac{DC}{AB} \right)^2 = \left(\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{\sqrt{۳}} \right)^2 = \frac{۱۶}{۲۱}$$

فیثاغورس $\leftarrow BC = \sqrt{۷}$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\frac{x}{x+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9x = 4x + 28$$

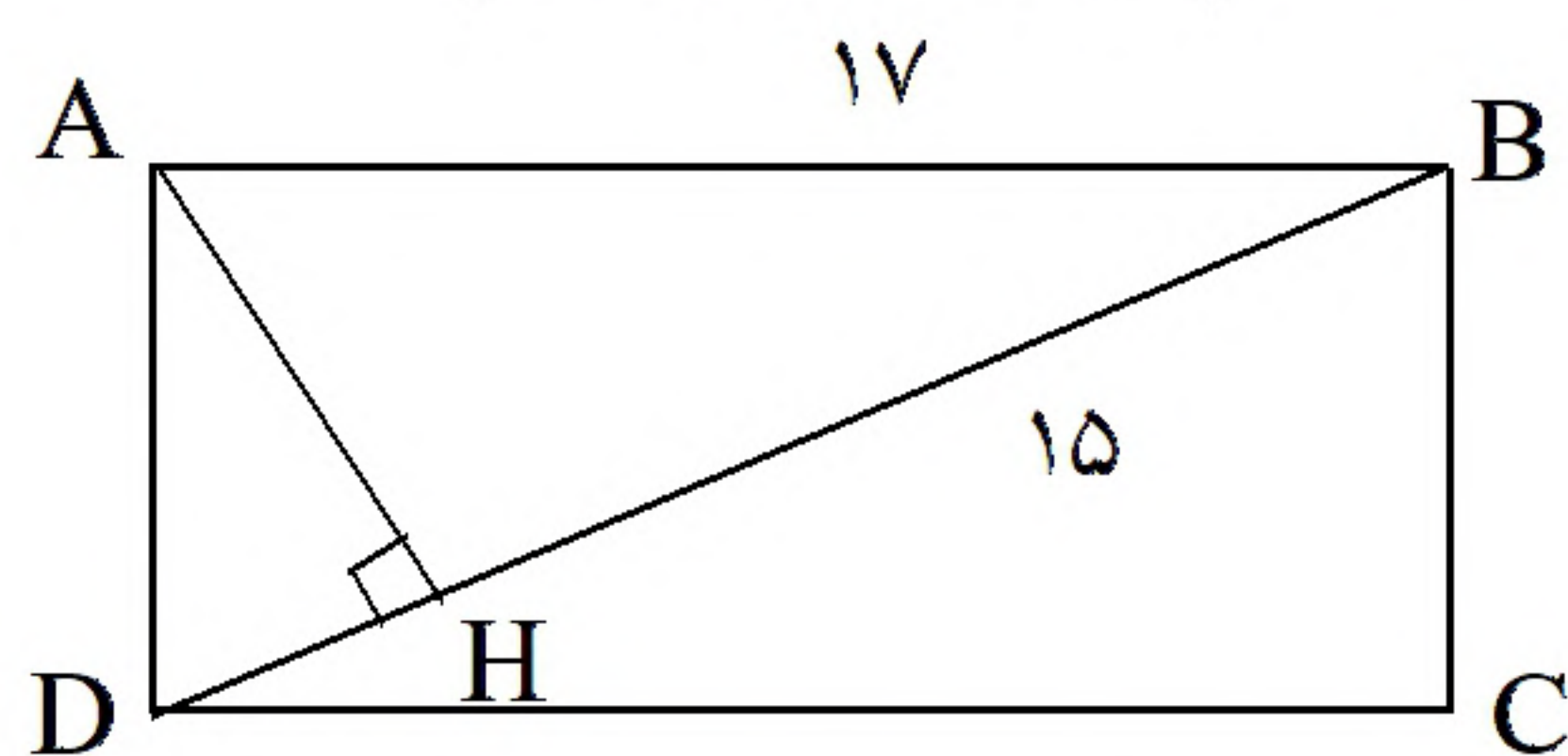
$$\Rightarrow 5x = 28 \Rightarrow x = \frac{28}{5} = ۵\frac{۳}{۵}$$

$$\frac{y}{5+y} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9y = 4y + 20 \Rightarrow 5y = 20 \Rightarrow y = ۴$$

$$p = \text{محیط مثلث MAB} = ۴ + \frac{۵}{۶} + ۴ = ۱۳\frac{۵}{۶}$$



۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABD بنابر رابطه‌ی طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:



$$AB^2 = BH \times BD \Rightarrow 17^2 = 15 \times BD \Rightarrow BD = \frac{17 \times 17}{15}$$

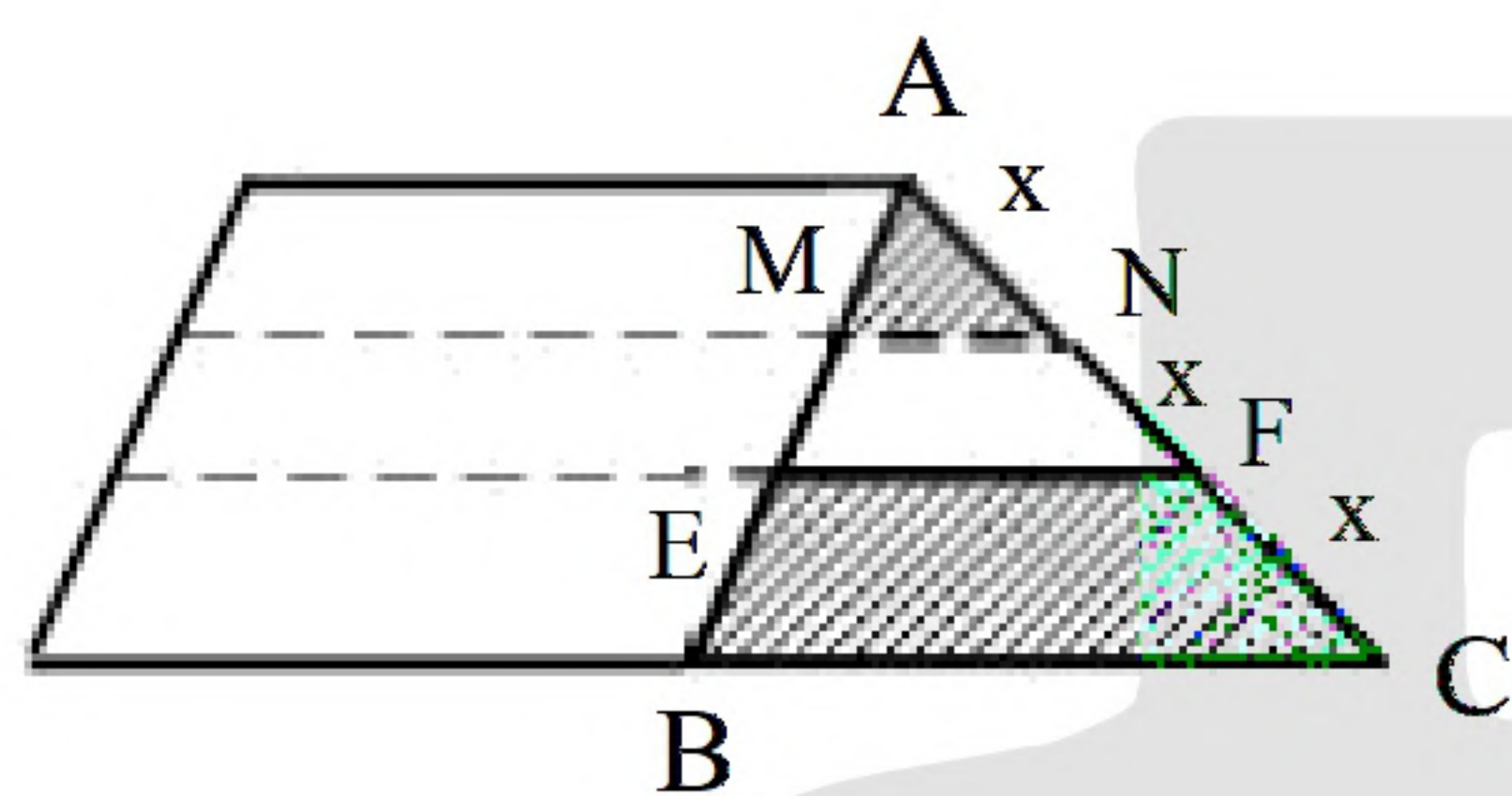
$$BD - 19 = \frac{17 \times 17}{15} - 19 = \frac{17 \times 17 - 15 \times 19}{15} = \frac{4}{15}$$

بنابراین:

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل می‌توان نوشت:

قضیه اساسی تشابه

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}$$



$$= \left(\frac{x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad (1)$$

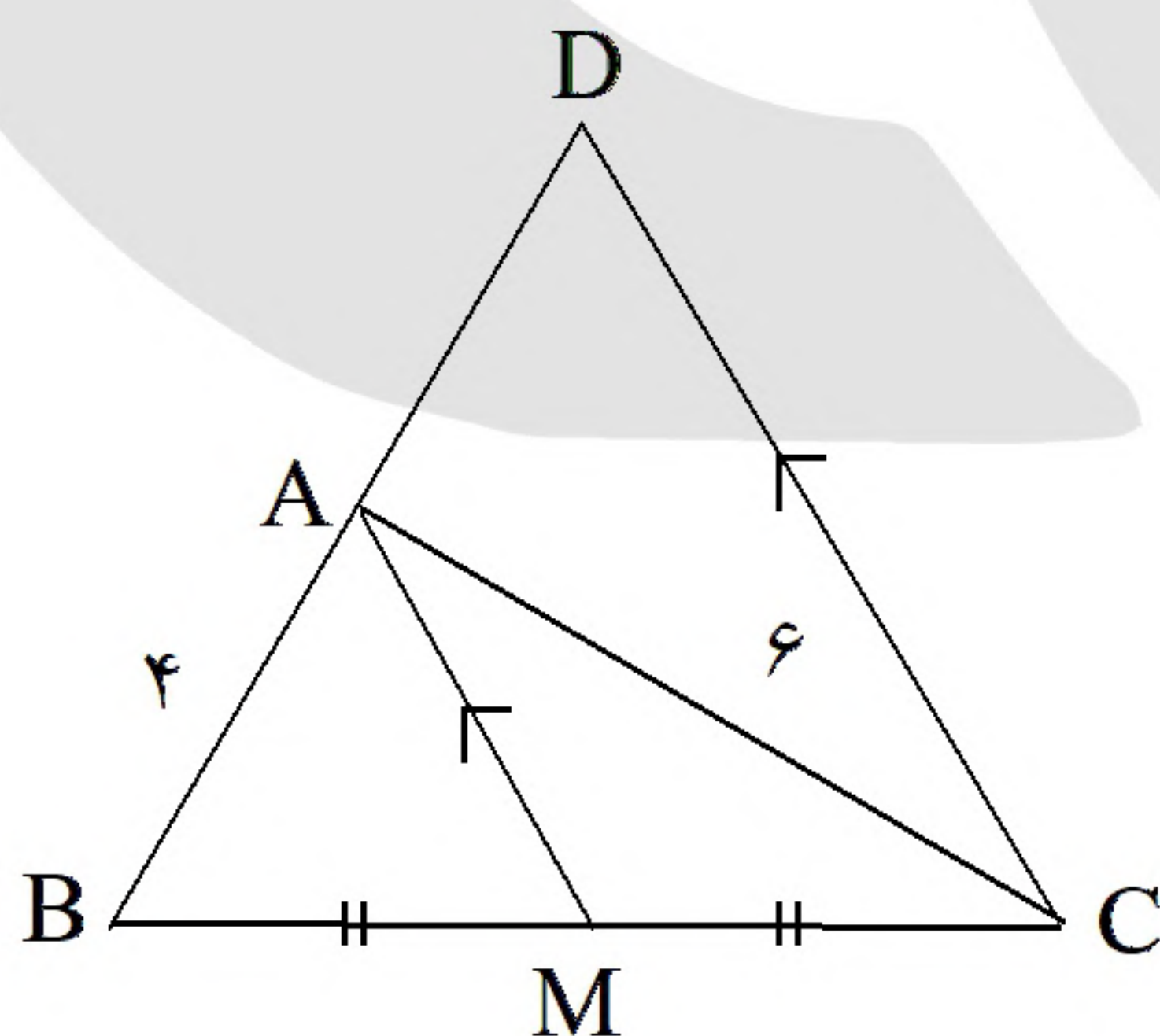
$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{تفصیل از صورت}} \frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}} = \frac{5}{9} \quad (2)$$

از تقسیم تساوی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{5}{9}} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}} = \frac{1}{5}$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



بنابر فرض سوال شکل مقابل را خواهیم داشت:

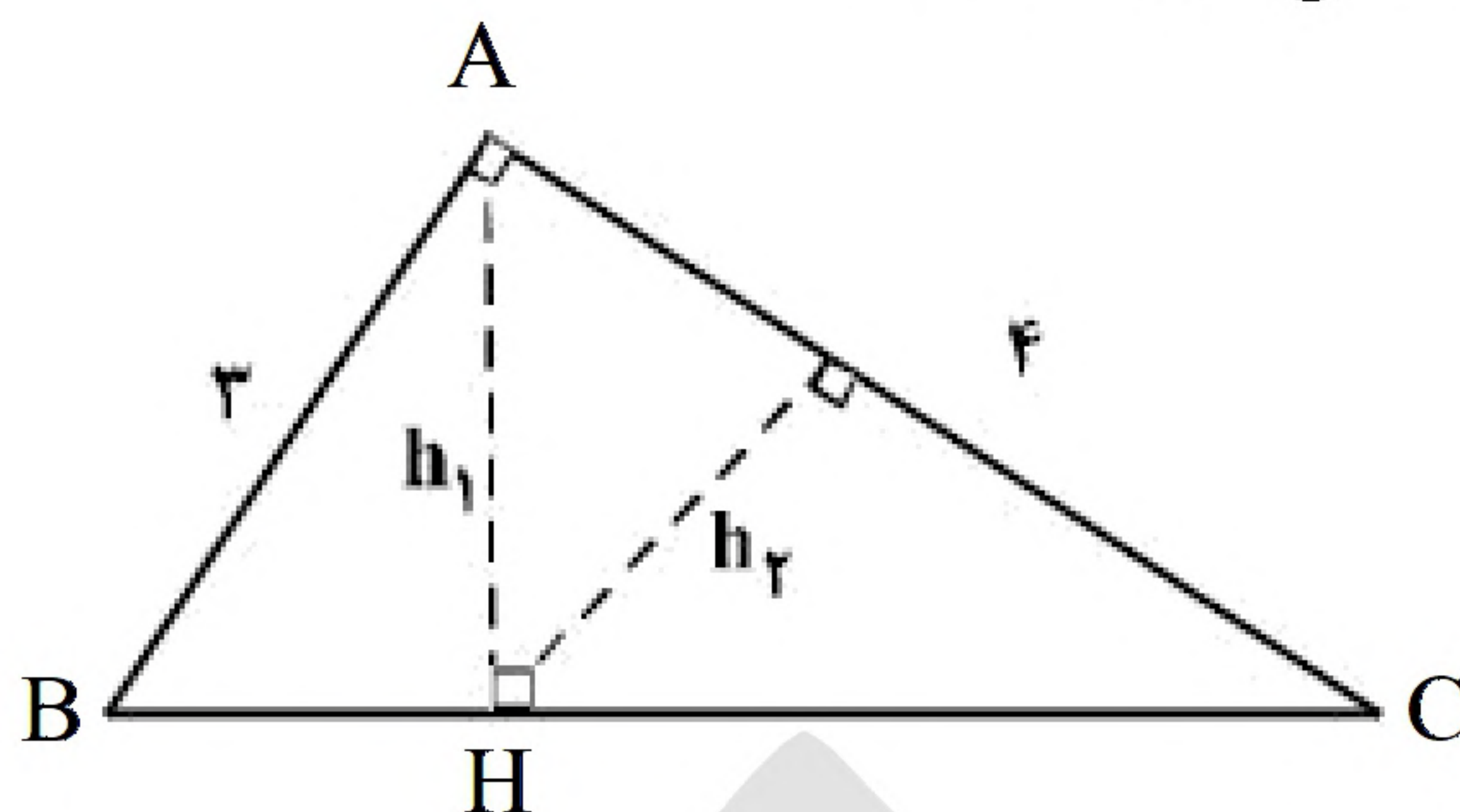
$$AM \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AD} \xrightarrow{BM=MC} 1 = \frac{4}{AD} \Rightarrow AD = 4$$

$$BD = AB + AD = 4 + 4 = 8$$

بنابراین:

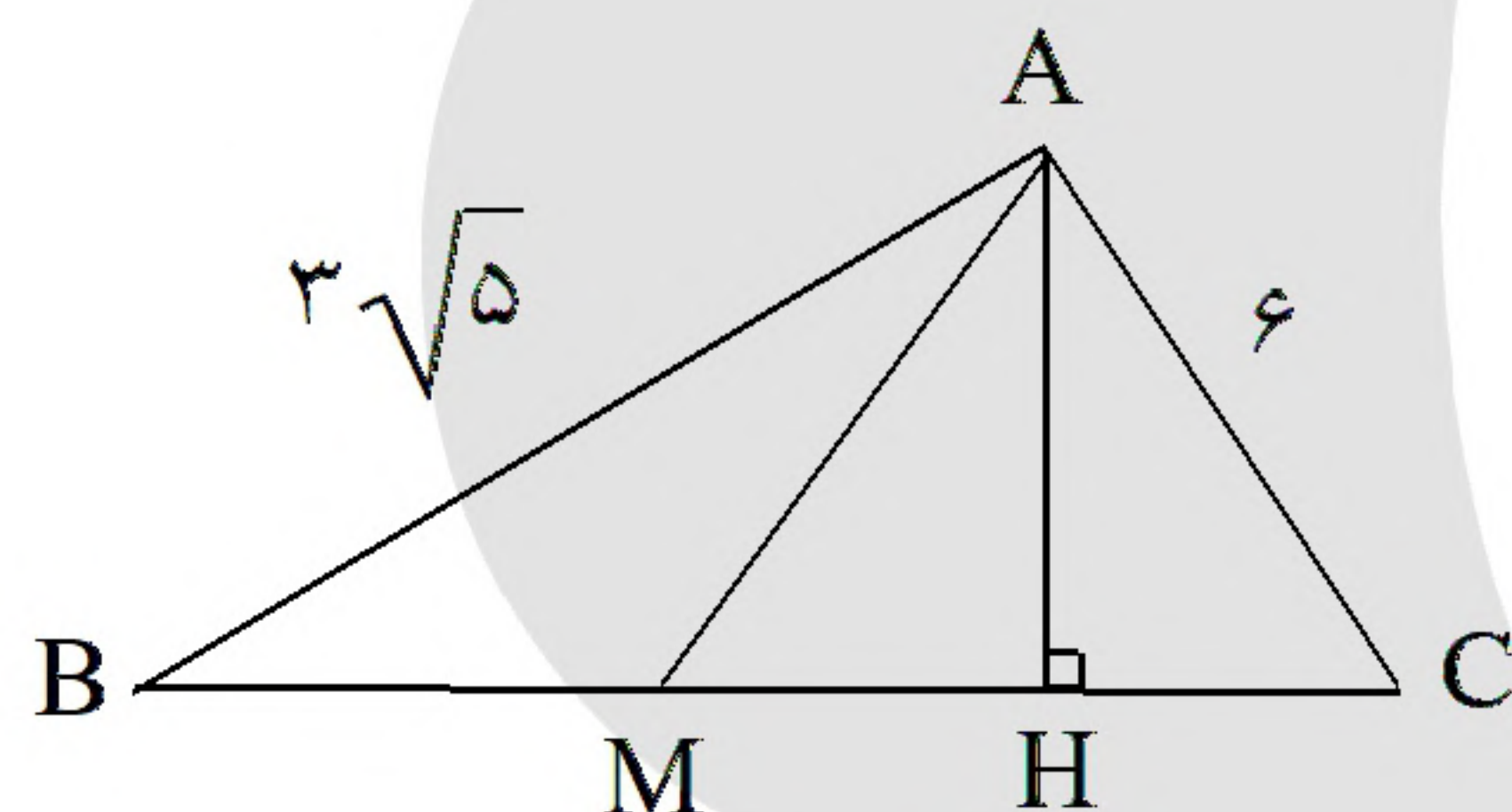


۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو مثلث قائم الزاویه ی ABC و AHC با داشتن دو زاویه مساوی متشابه اند. بنابراین نسبت ارتفاع های آنها برابر نسبت اضلاع نظیرشان است.



$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \\ \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{(ز.ز)} \triangle ABC \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{AC}{BC} \xrightarrow{BC = \sqrt{16+9} = 5} \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه می نویسیم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 45 + 36 = 81 \Rightarrow BC = 9$$

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow 36 = CH \times 9 \Rightarrow CH = 4$$

$$MH = MC - CH = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \frac{\frac{1}{2}AH \times BC}{\frac{1}{2}AH \times MH} = \frac{BC}{MH} = \frac{9}{\frac{1}{2}} = 18$$

بنابراین: