

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



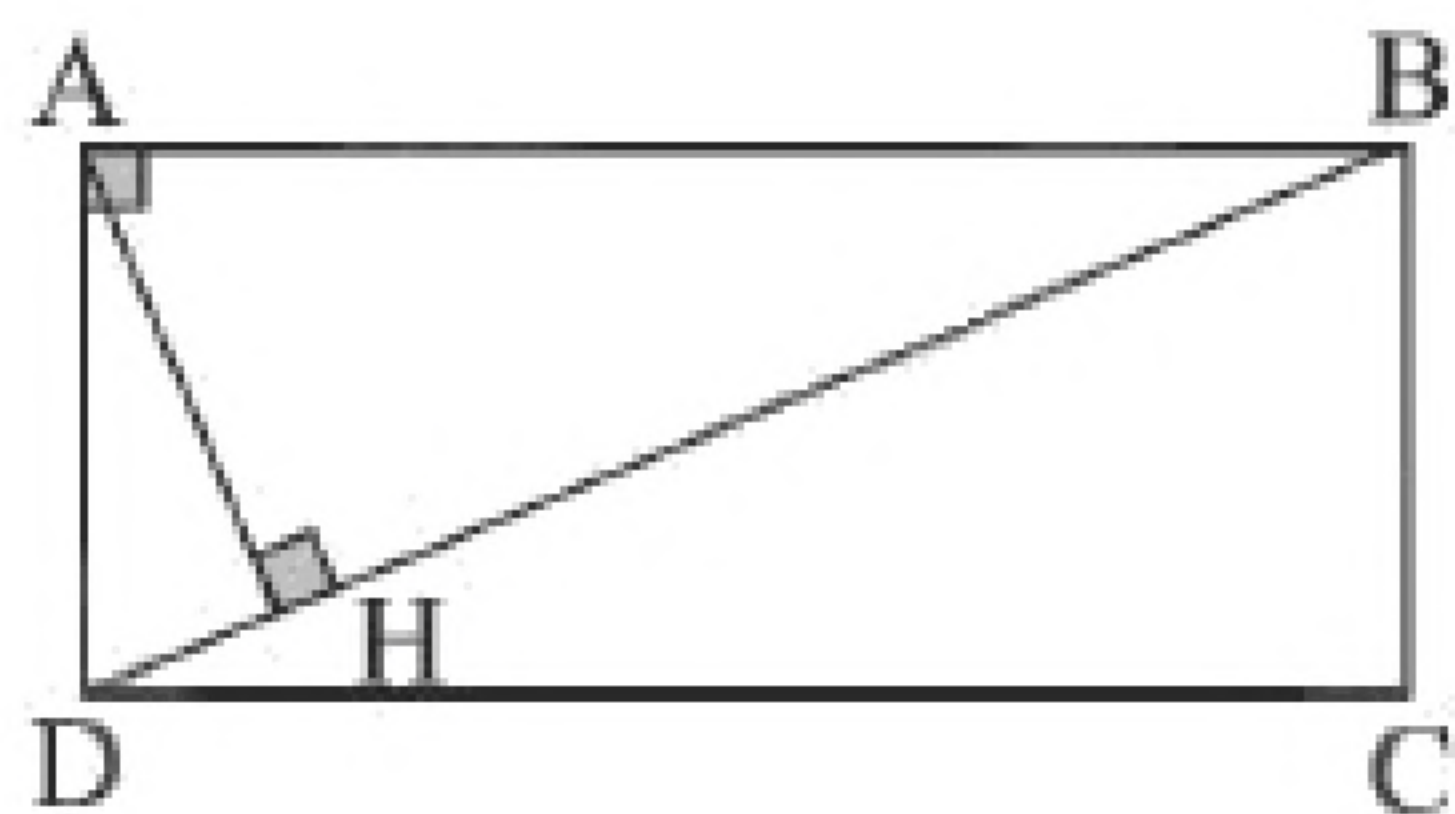


۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABD$ ، داریم:

$$AH^2 = BH \times DH = 14/4 \times 2/5$$

$$\Rightarrow AH = \frac{12 \times 5}{10} = 6$$



۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} = \hat{D} \\ \hat{AOB} = \hat{COD} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \sim \triangle OCD$$

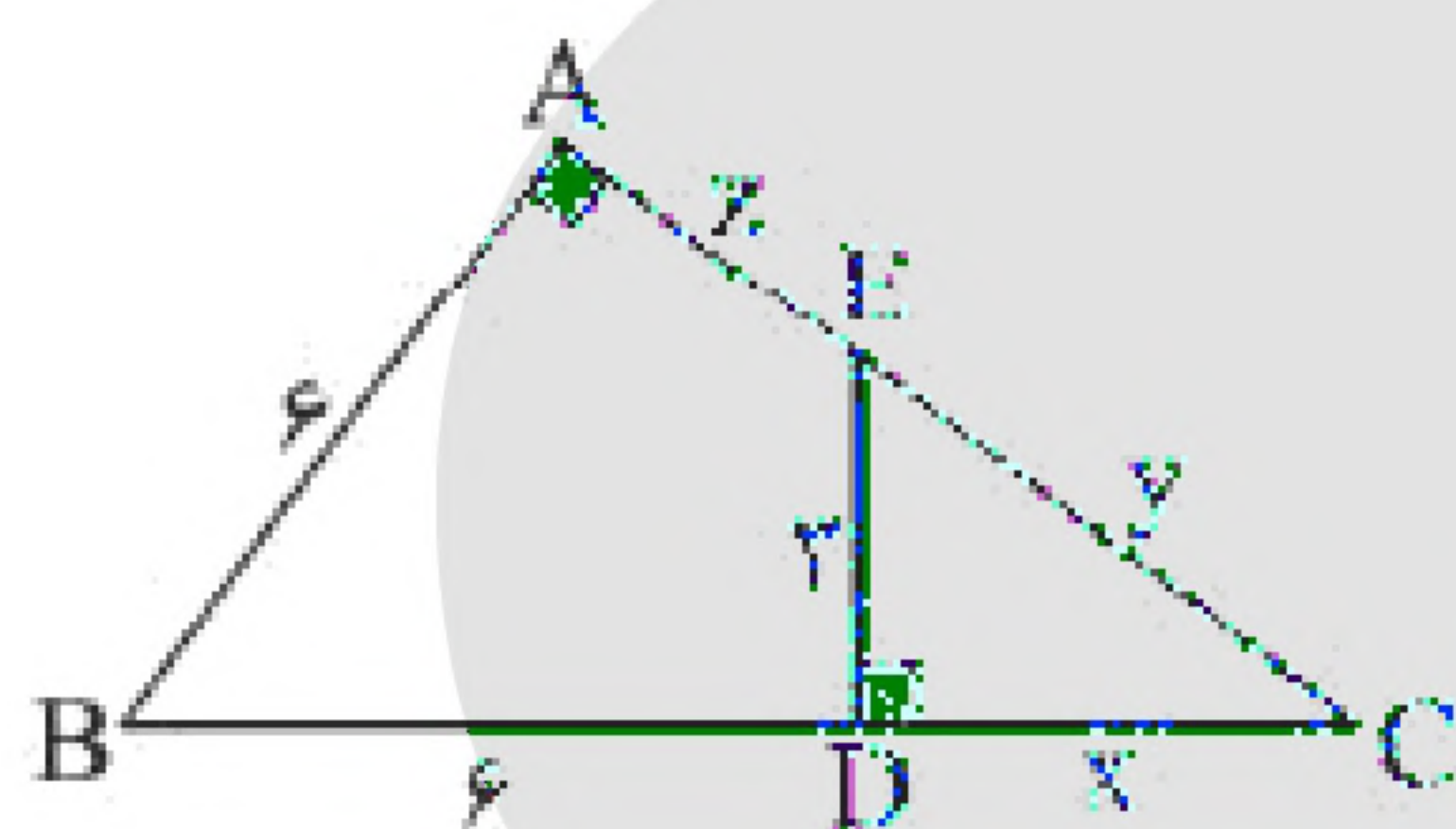
اگر نسبت تشابه این دو مثلث را k بنامیم، داریم:

$$k = \frac{OF}{OF} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{\triangle OCD}} = k^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 18 \times \frac{1}{9} = 2$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right\} \xrightarrow{ZZ} \triangle CDE \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{6} = \frac{y}{6+x} \Rightarrow 2y = 6+x \Rightarrow x = 2y-6 \\ \frac{2}{6} = \frac{x}{y+z} \Rightarrow 2x = y+z \end{cases}$$

از طرفی طبق قضیه فیثاغورس در $\triangle CDE$ ، داریم:

$$y^2 = x^2 + 9 \xrightarrow{x=2y-6} y^2 = (2y-6)^2 + 9 \Rightarrow 4y^2 - 24y + 36 + 9 = y^2$$

$$\Rightarrow 3y^2 - 24y + 45 = 0 \Rightarrow y^2 - 8y + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=3 \text{ ق ق غ} \\ y=5 \end{cases}$$

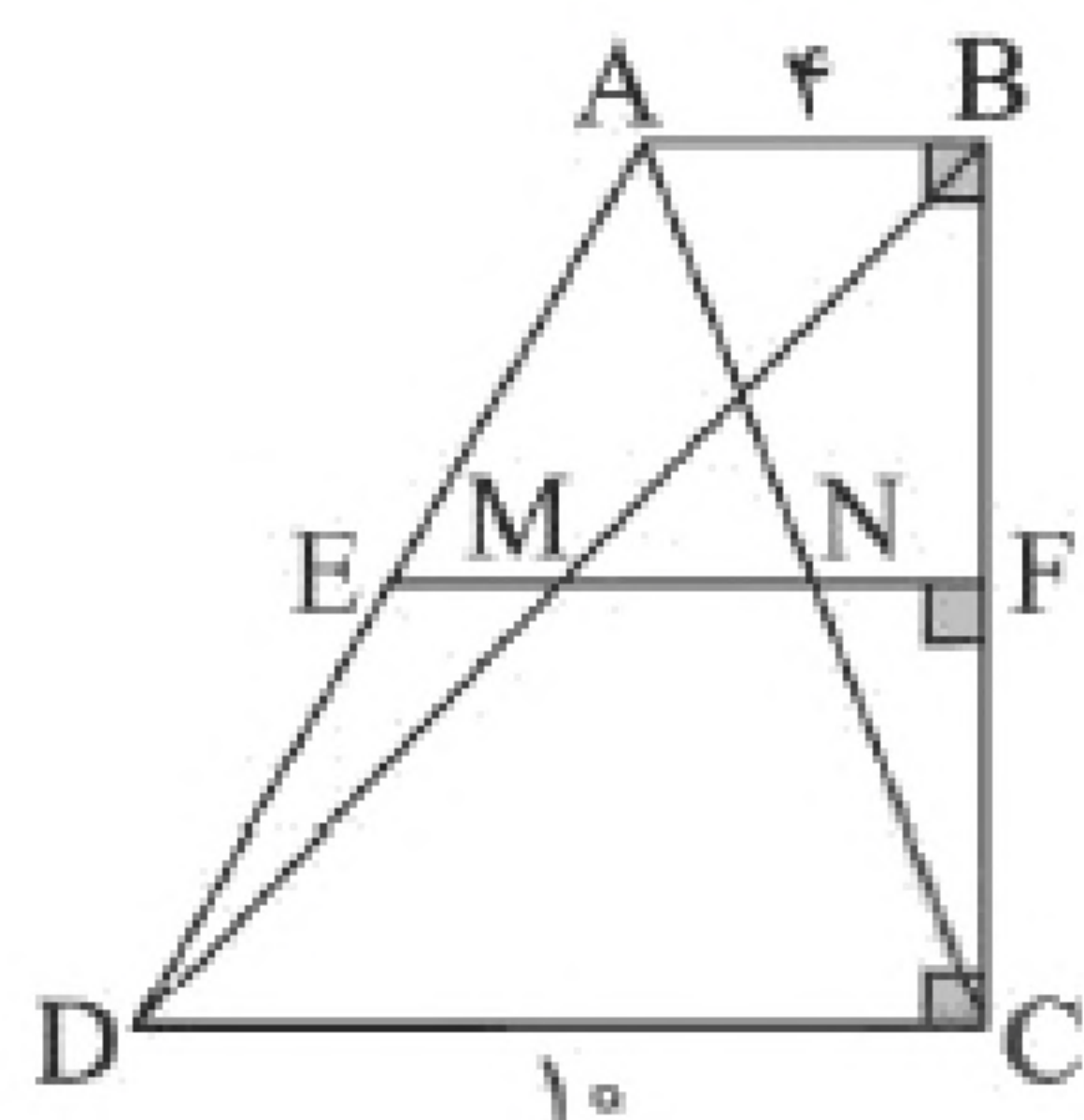
$$x = 2y - 6 = 10 - 6 = 4$$

$$2x = y + z \Rightarrow 8 = 5 + z \Rightarrow z = 3$$

$$ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = 6 + 8 + 10 = 24$$



۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$\left. \begin{array}{l} AB \perp BC \\ DC \perp BC \\ EF \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel DC \parallel EF$$

طبق قضیه تالس در مثل $\triangle ACD$ ، داریم:

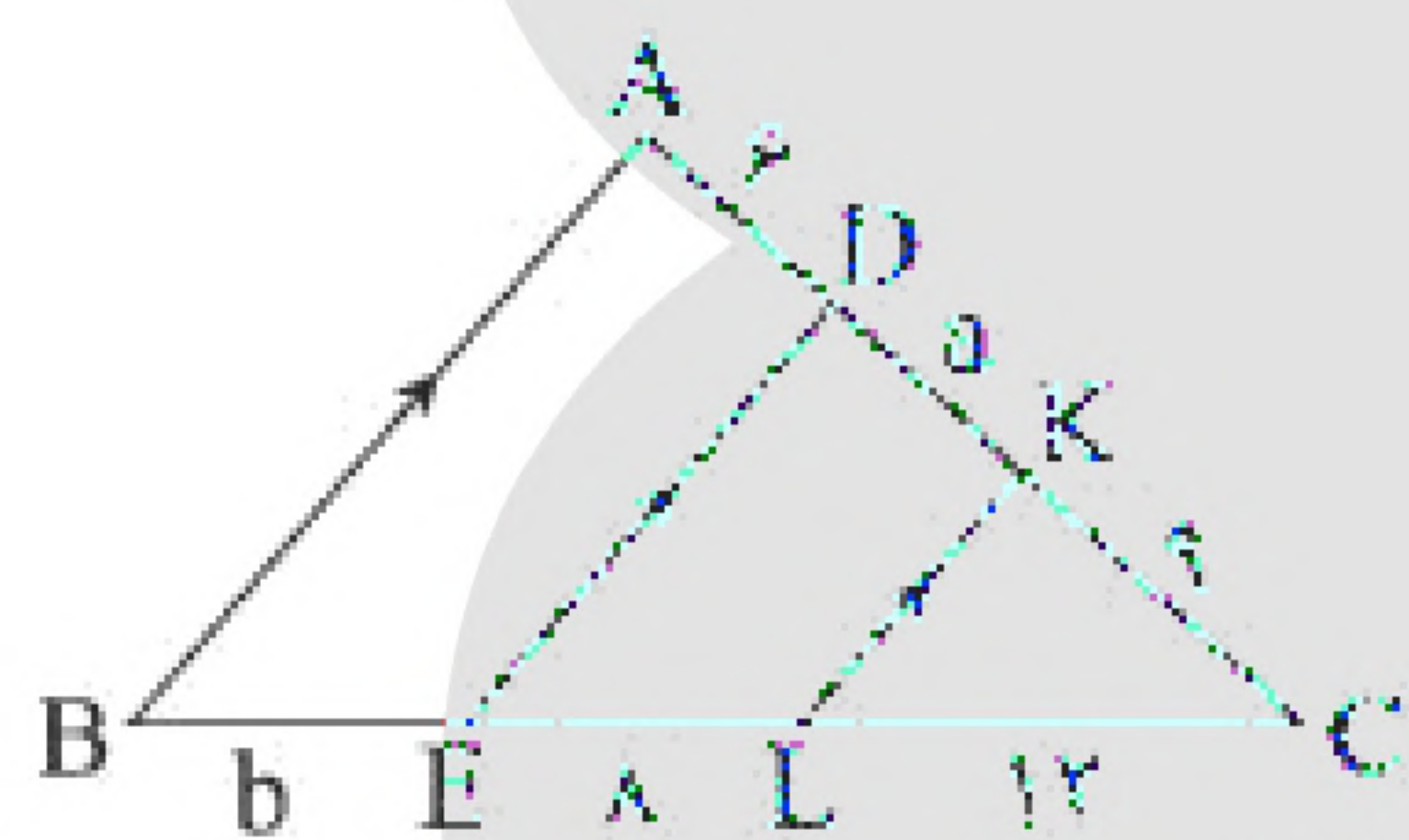
$$\frac{EN}{DC} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow \frac{EN}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow EN = 5$$

همچنین طبق قضیه تالس در مثل $\triangle ABD$ ، داریم:

$$\frac{EM}{AB} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{EM}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow EM = 2$$

$$MN = EN - EM = 5 - 2 = 3$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



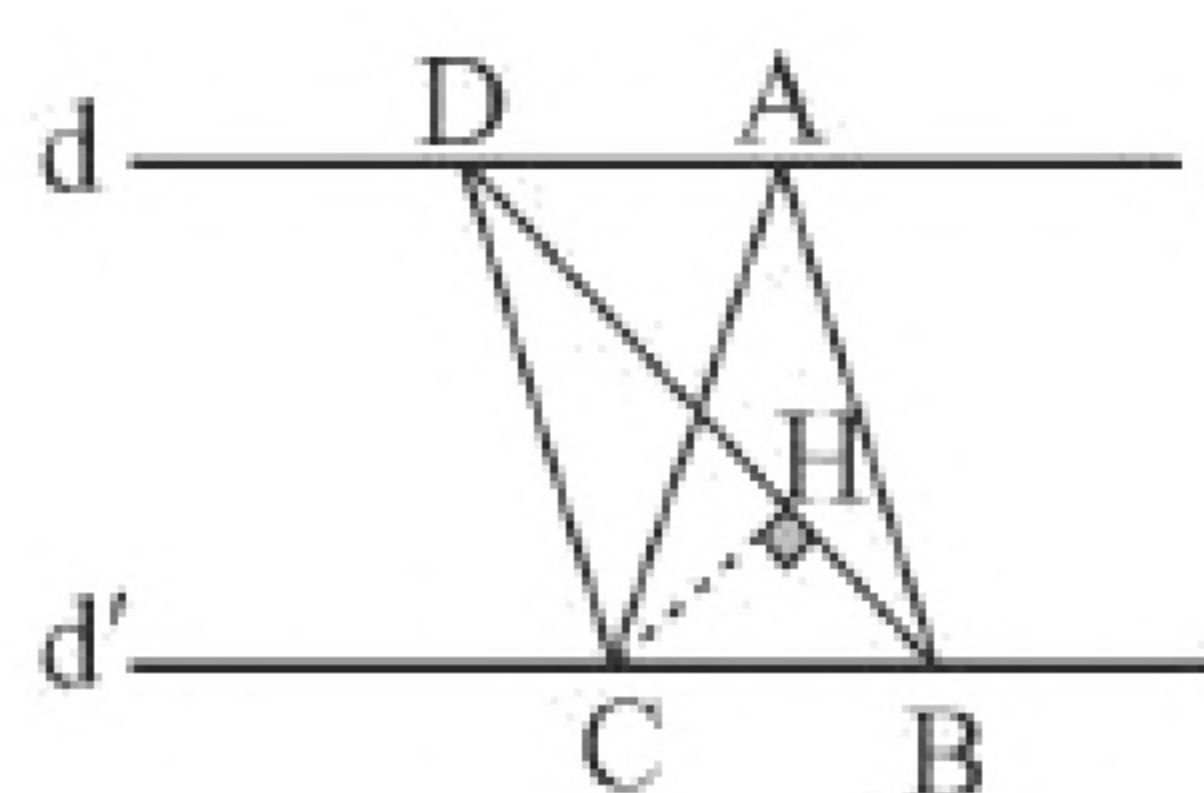
$$\triangle DEC : KL \parallel DE \Rightarrow \frac{CK}{KD} = \frac{CL}{LE}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{a} = \frac{12}{8} \Rightarrow a = 6$$

$$\triangle ABC : AB \parallel DE \Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \Rightarrow \frac{15}{6} = \frac{20}{b} \Rightarrow b = 8$$

$$b - a = 8 - 6 = 2$$

۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



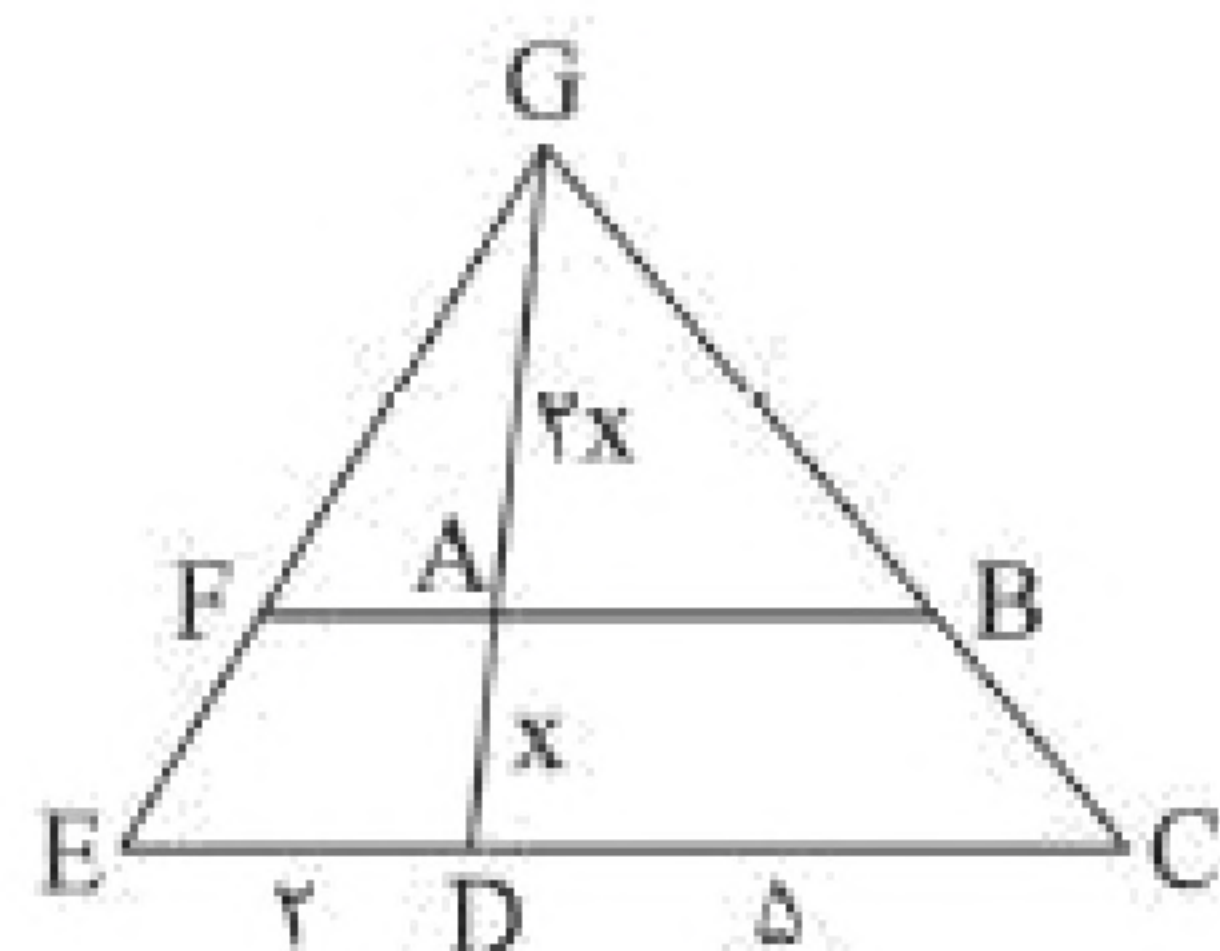
مثلث‌های $\triangle ABC$ و $\triangle DBC$ ، دارای ارتفاع (فاصله‌ی دو خط d و d') و قاعده‌ی برابر (BC) می‌باشند، پس هم‌مساحتند.

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABC} = 12$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} CH \times BD \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times 4 \times BD \Rightarrow BD = 6$$



۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



با فرض $DA = x$ و با توجه به $DG = 3AD$ ، داریم: $AG = 2x$ ، بنابراین:

$$\begin{aligned} AF \parallel ED &\xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AFG \sim \triangle GED \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle AFG}}{S_{\triangle GED}} &= \left(\frac{AG}{GD}\right)^2 = \left(\frac{2x}{3x}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad (1) \end{aligned}$$

دو مثلث $\triangle GED$ و $\triangle GEC$ دارای ارتفاع مشترک از رأس G هستند، پس نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت قاعده‌هایشان است.

$$\frac{S_{\triangle GED}}{S_{\triangle GEC}} = \frac{ED}{EC} = \frac{2}{5} \Rightarrow S_{\triangle GED} = \frac{2}{5} S_{\triangle GEC} \quad (2)$$

حال از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} S_{\triangle AFG} &= \frac{4}{9} S_{\triangle GED} = \frac{4}{9} \left(\frac{2}{5} S_{\triangle GEC} \right) = \frac{8}{45} S_{\triangle GEC} \\ \xrightarrow{S_{\triangle AFG} = 8} 8 &= \frac{8}{45} S_{\triangle GEC} \Rightarrow S_{\triangle GEC} = 45 \end{aligned}$$

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
ابتدا x را پیدا می‌کنیم:

$$EF \parallel CB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FB} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} EF \parallel CB &\xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \triangle AEF \sim \triangle ABC \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} &= \left(\frac{AF}{AB}\right)^2 = \left(\frac{x}{x+4}\right)^2 = \left(\frac{6}{10}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}} &= \frac{100}{36} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{100 - 36}{36} \\ \Rightarrow \frac{S_{\triangle EFCB}}{S_{\triangle AEF}} &= \frac{64}{36} = \frac{16}{9} \end{aligned}$$

دقت کنید محاسبه y در این سؤال لازم نیست و دو فرض $EF = 2y - 1$ و $BC = x + 2$ اضافه هستند!

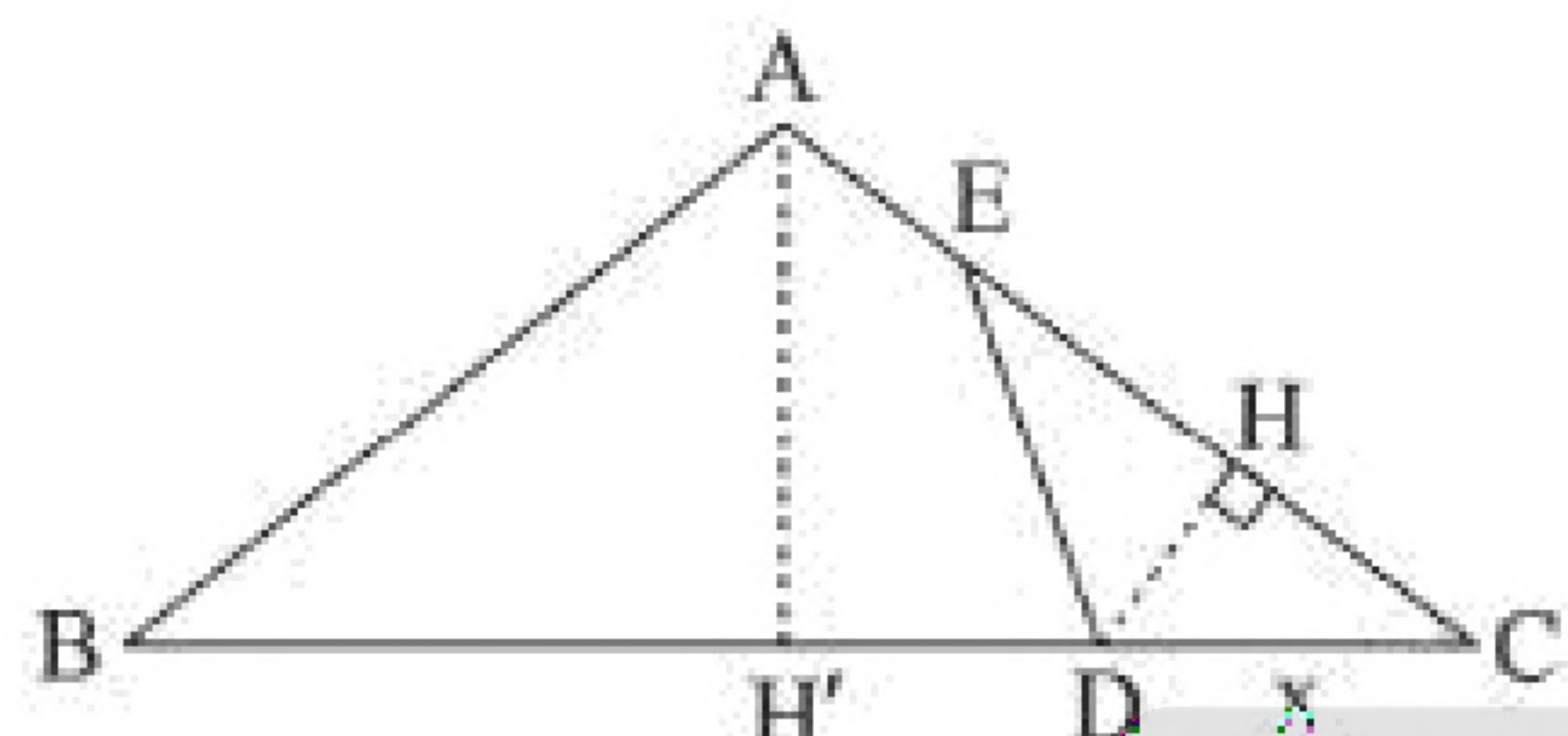


۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle EDC$ متشابه هستند زیرا دارای دو زاویه مساوی با هم هستند.

$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{EDC} \\ \widehat{C} = \widehat{C} \end{cases} \xrightarrow{(ز ز)} \triangle ABC \sim \triangle EDC \quad (۱)$$

در ضمن فاصله نقطه D از EC ، ارتفاع DH و فاصله نقطه A از BC ، ارتفاع AH' است و می‌دانیم در دو مثلث متشابه، نسبت دو ارتفاع برابر با نسبت تشابه است. با فرض $DC = x$ داریم:



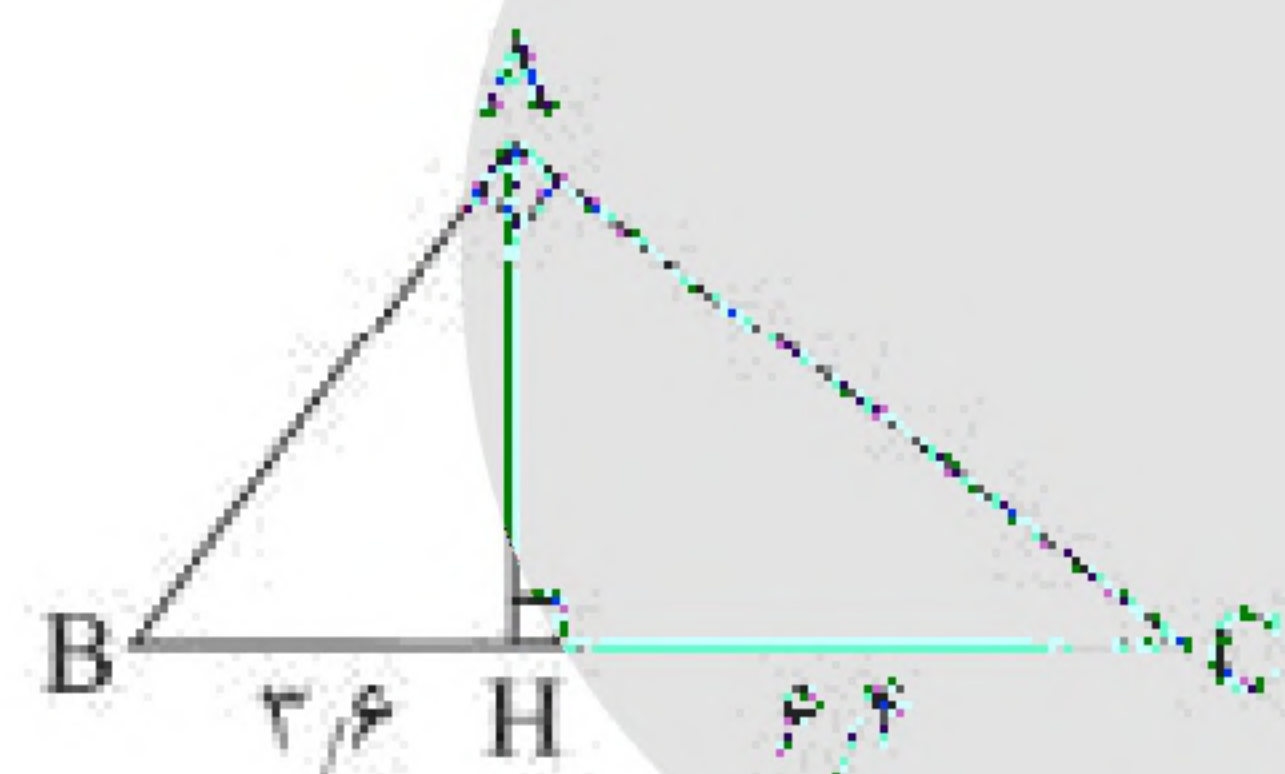
$$\xrightarrow{(۱)} \frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{۱۴}{۲۵+x} = \frac{x}{۱۶} \Rightarrow ۲۵x + x^2 = ۱۴ \times ۱۶$$

$$x^2 + ۲۵ - ۷ \times ۳۲ = ۰ \Rightarrow (x + ۳۲)(x - ۷) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳۲ \\ x = ۷ \end{cases} \quad \text{غ ق ق غ}$$

بنابراین:

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{DH}{AH'} = \frac{CE}{BC} = \frac{۱۴}{۲۵+۷} = \frac{۱۴}{۳۲} = \frac{۷}{۱۶}$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



در شکل، AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه ABC است. با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AB^2 = BH \times BC = ۳/۶ \times ۱۰ = ۳۶ \Rightarrow AB = ۶$$

$$AC^2 = CH \times BC = ۶/۴ \times ۱۰ = ۶۴ \Rightarrow AC = ۸$$

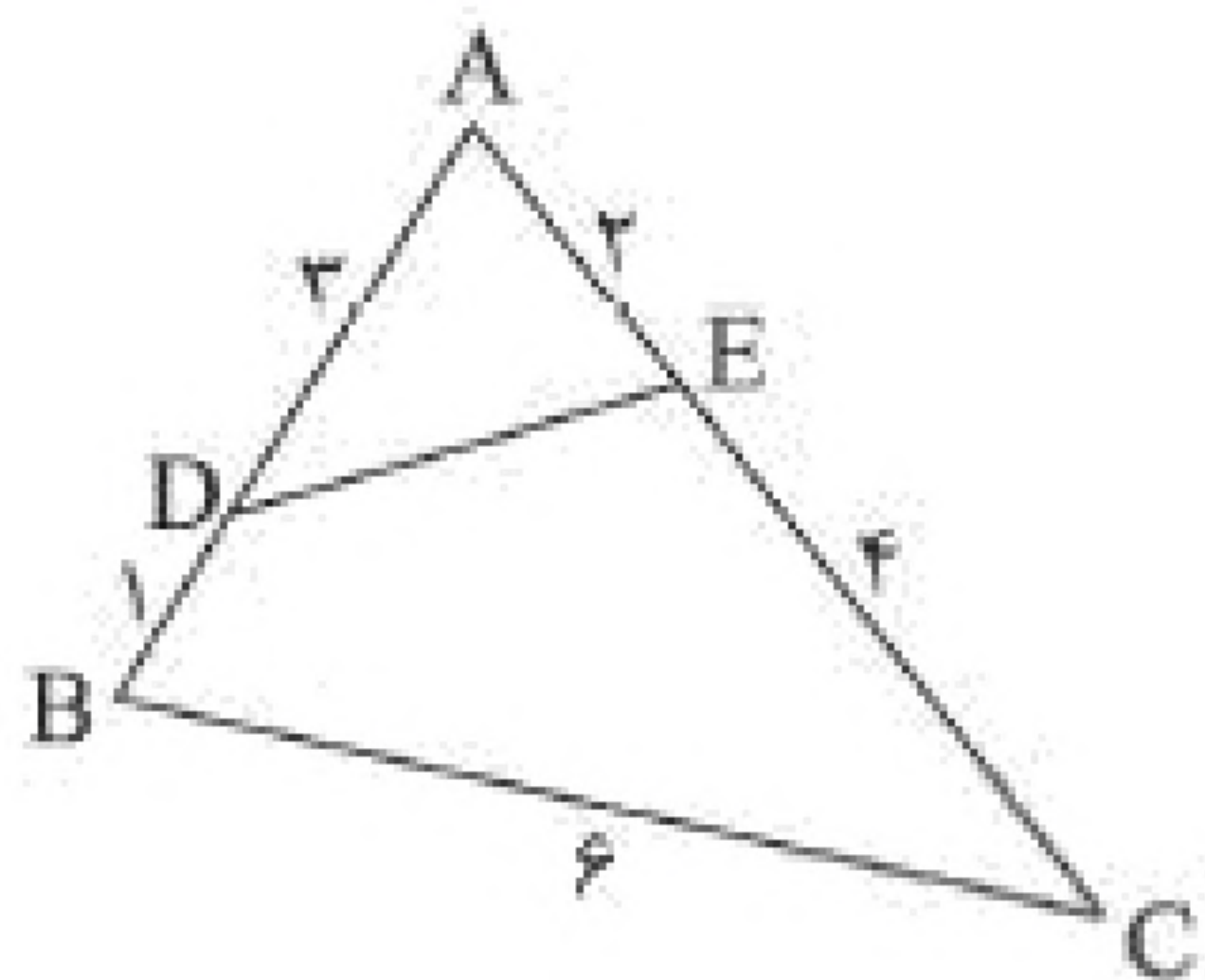
$$AH^2 = BH \times CH = ۳/۶ \times ۶/۴ = \frac{۳۶}{۱۰} \times \frac{۶۴}{۱۰} \Rightarrow AH = \frac{۶ \times ۸}{۱۰} = \frac{۲۴}{۵}$$

بنابراین:

$$\frac{\text{محیط مثلث}}{\text{ارتفاع وارد بر وتر}} = \frac{AB + AC + BC}{AH} = \frac{۶ + ۸ + ۱۰}{\frac{۲۴}{۵}} = \frac{۲۴}{\frac{۲۴}{۵}} = ۵$$



۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



توجه کنید $\frac{AD}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ و $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ، بنابراین:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} \\ \hat{A} = \hat{A} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویه بین مساوی}} \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

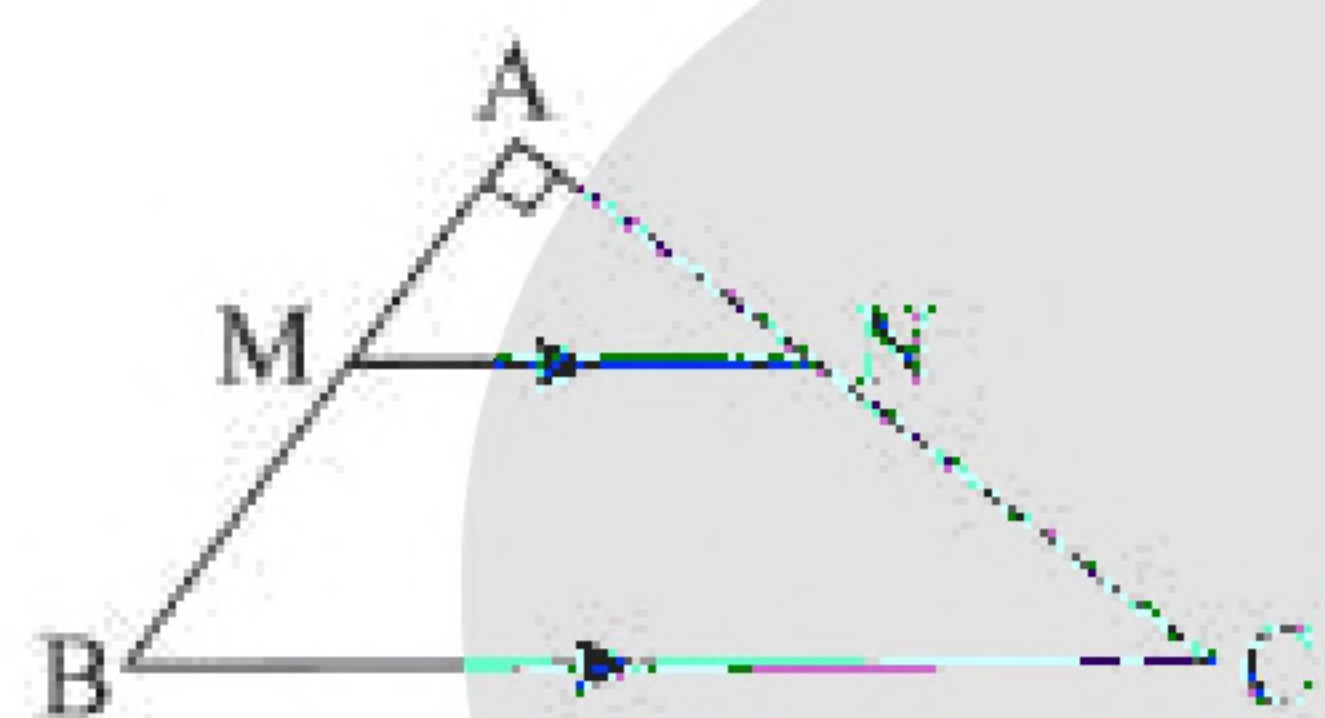
$$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{DE}{6} \Rightarrow DE = 3$$

در نتیجه:

$$BDEC \text{ محیط چهارضلعی} = BD + DE + EC + CB = 1 + 3 + 4 + 6 = 14$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

$$AN = \frac{16}{5} \Rightarrow NC = AC - AN = 8 - \frac{16}{5} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{24}{5}} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

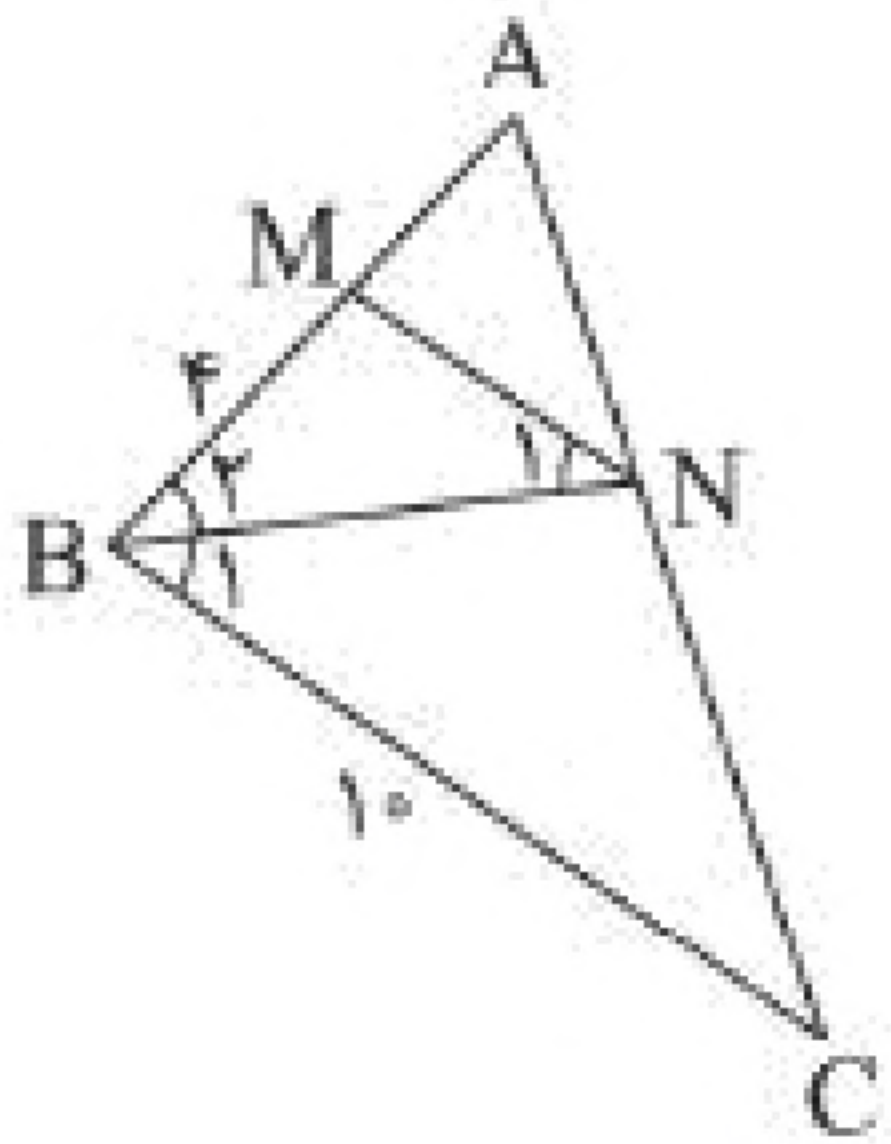
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{2}{5} = \frac{MN}{10} \Rightarrow MN = 4$$

به کمک فیثاغورس داریم:

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

نقطه N از اضلاع AB و BC به یک فاصله است، پس N روی نیمساز زاویه B واقع است یعنی BN نیمساز زاویه B است، بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ است. از طرف دیگر چهارضلعی BMNC دوزنقه است، پس $MN \parallel BC$ است بنابراین:



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{MN} \parallel \text{BC} \\ \text{مورب BN} \end{array} \right. \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{N}_1 \xrightarrow{\hat{B}_1 = \hat{B}_2} \hat{N}_1 = \hat{B}_2 \Rightarrow \text{MN} = \text{BM} = r$$

$$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{تعميم قضيه تالس}} \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل از صورت}} \frac{AB - AM}{AB} = \frac{5 - 2}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow AB = \frac{20}{3}$$

۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

به کمک تالس جزء به جزء داریم:

$$\left. \begin{aligned} \text{DA} \parallel \text{EB} &\Rightarrow \frac{\text{OD}}{\text{DE}} = \frac{\text{OA}}{\text{AB}} \\ \text{EB} \parallel \text{FC} &\Rightarrow \frac{\text{OE}}{\text{EF}} = \frac{\text{OB}}{\text{BC}} \\ \text{EA} \parallel \text{FB} &\Rightarrow \frac{\text{OE}}{\text{EF}} = \frac{\text{OA}}{\text{AB}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{OD}}{\text{DE}} = \frac{\text{OE}}{\text{EF}} = \frac{\text{OA}}{\text{AB}} = \frac{\text{OB}}{\text{BC}} \quad (1)$$

$$\sphericalangle \text{OA} = \sphericalangle \text{EF} = \sphericalangle \Rightarrow \text{OA} = \text{EF} = \sphericalangle, \text{BC} = \sphericalangle \quad (\sphericalangle)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{OD}{DE} = \frac{OE}{\frac{1}{2}AB} = \frac{\frac{1}{2}AB}{\frac{1}{2}AB + AB} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(3)} \frac{\gamma}{AB} = \frac{\gamma + AB}{\gamma} \Rightarrow \lambda = \gamma AB + (AB)^\gamma \Rightarrow (AB)^\gamma + \gamma AB - \lambda = 0$$

$$\Rightarrow (AB + 4)(AB - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} AB = -4 \\ AB = 2 \end{cases}$$

با توجه به $AB = 2$ و رابطه (۳) داریم:

$$\frac{OD}{DE} = \frac{OE}{\text{?}} = \frac{\text{?}}{\text{?}} \Rightarrow OE = \text{?}, OD = DE$$

D وسط OE قرار دارد پس:

$$\begin{aligned} \text{OD} &= \text{DE} = 1 \\ \text{AB} + \text{DE} &= 2 + 1 = 3 \end{aligned}$$



۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

میانگین هندسی دو عدد $2x + 3$ و ۲ برابر ۴ است پس:

$$4^2 = (2)(2x + 3) \Rightarrow 8 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

بنابراین $4x^2 = 4\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 25$ و $x^2 - \frac{9}{4} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$ است، در نتیجه واسطه هندسی بین ۴ و ۲۵ مساوی $\sqrt{4 \times 25} = 10$ است.

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با استفاده از ویژگی‌های تناسب می‌نویسیم:

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{c}{3} \Rightarrow \frac{a+b+c}{4+5+3} = \frac{b}{5} \Rightarrow \frac{5}{12}(a+b+c)$$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{3a+3}{2b+1} = \frac{6a+3}{4b+1} \Rightarrow 12ab + 3a + 12b + 3 = 12ab + 6a + 6b + 3$$

$$\Rightarrow 6b = 3a \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{6}{3} = 2$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

چون هر کدام واسطه هندسی دوتای دیگر است بنابراین:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 = bc \\ b^2 = ac \\ c^2 = ab \end{array} \right\} \xrightarrow{+} a^2 + b^2 + c^2 = bc + ac + ab$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2bc - 2ac - 2ab = 0$$

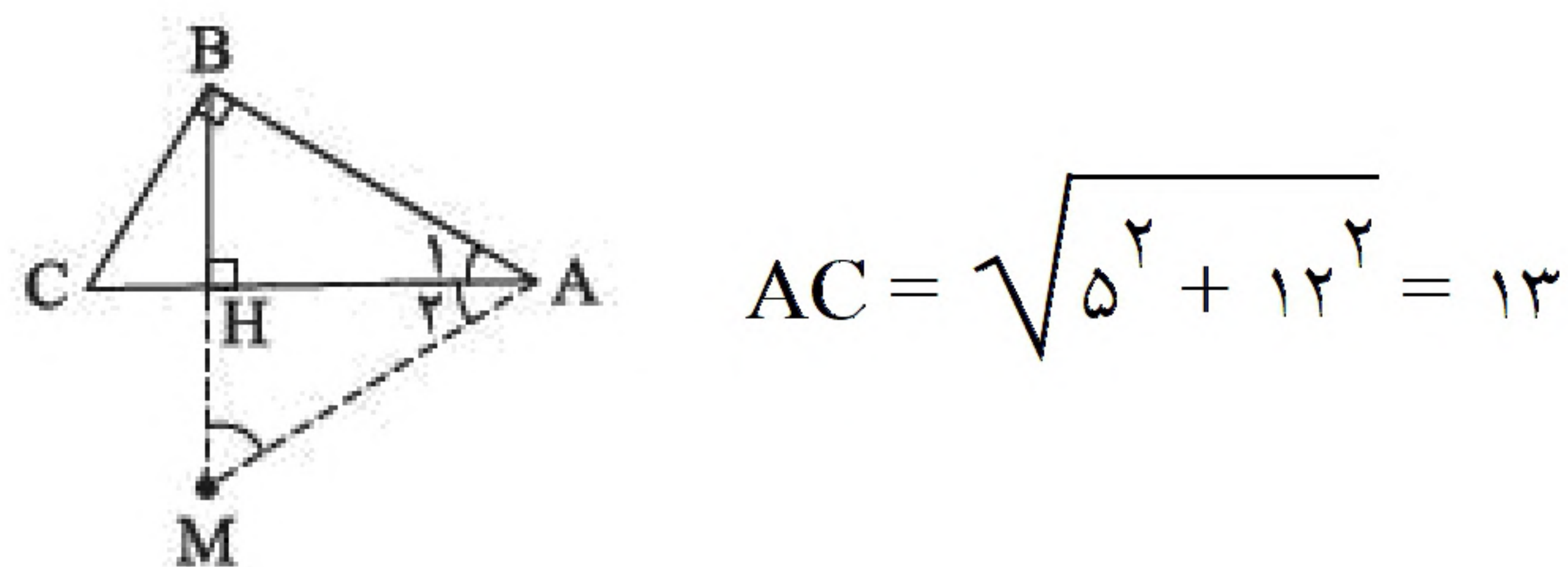
$$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a = b = c$$

بنابراین مثلث، متساوی‌الاضلاع است.



۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق قضیه فیثاغورس:



از طرفی به کمک روابط طولی در مثلث قائم الزاویه ABC داریم:

$$AB^2 = AH \times AC \Rightarrow 12^2 = AH \times 13 \Rightarrow AH = \frac{144}{13}$$

تشابه دو مثلث ABH و AMH به دو صورت می تواند اتفاق بیفتد:

حالت (۱):

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Rightarrow \frac{MH}{BH} = \frac{AH}{AH} = 1 \Rightarrow MH = BH$$

حالت (۲):

$$\hat{A}_1 = \hat{M} \Rightarrow \frac{MH}{AH} = \frac{AH}{BH} \Rightarrow MH = AH^2 \times \frac{1}{BH}$$

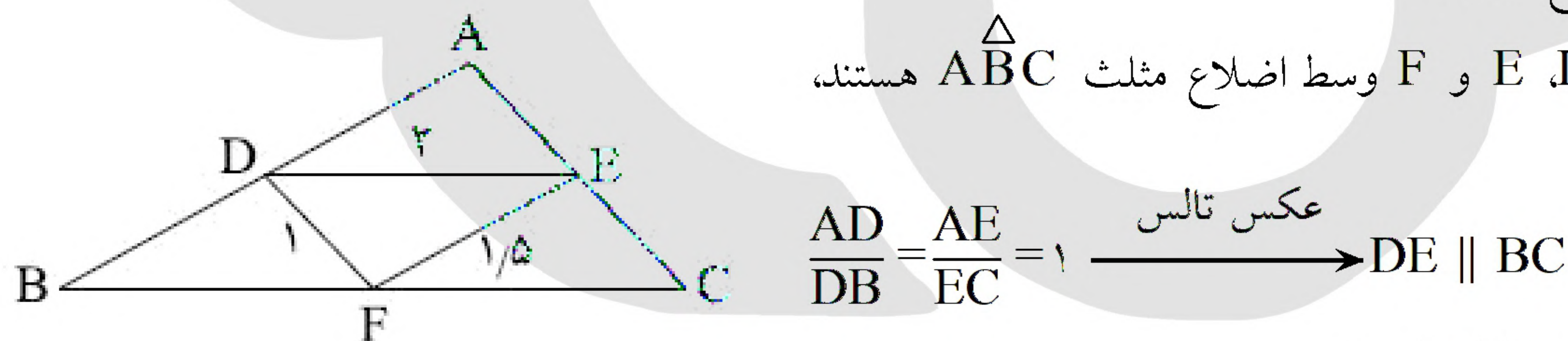
می دانیم:

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow BH \times 13 = 12 \times 5 \Rightarrow BH = \frac{60}{13}$$

$$\frac{\text{حالت دوم}}{\text{حالت اول}} = \frac{\frac{AH^2}{BH}}{\frac{BH}{1}} = \left(\frac{AH}{BH}\right)^2 = \left(\frac{\frac{144}{13}}{\frac{60}{13}}\right)^2 = \left(\frac{144}{60}\right)^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به اینکه D, E و F وسط اضلاع مثلث ABC هستند، بنابراین:



با نوشتن تالس جزء به کل داریم:

$$DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow BC = 2DE$$

به همین شیوه، $AB = 2EF$ و $AC = 2DF$ است.

بنابراین:

$$\triangle ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = 2(EF + DF + DE)$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = 2\left(\frac{1}{5} + 1 + 2\right) = 9$$



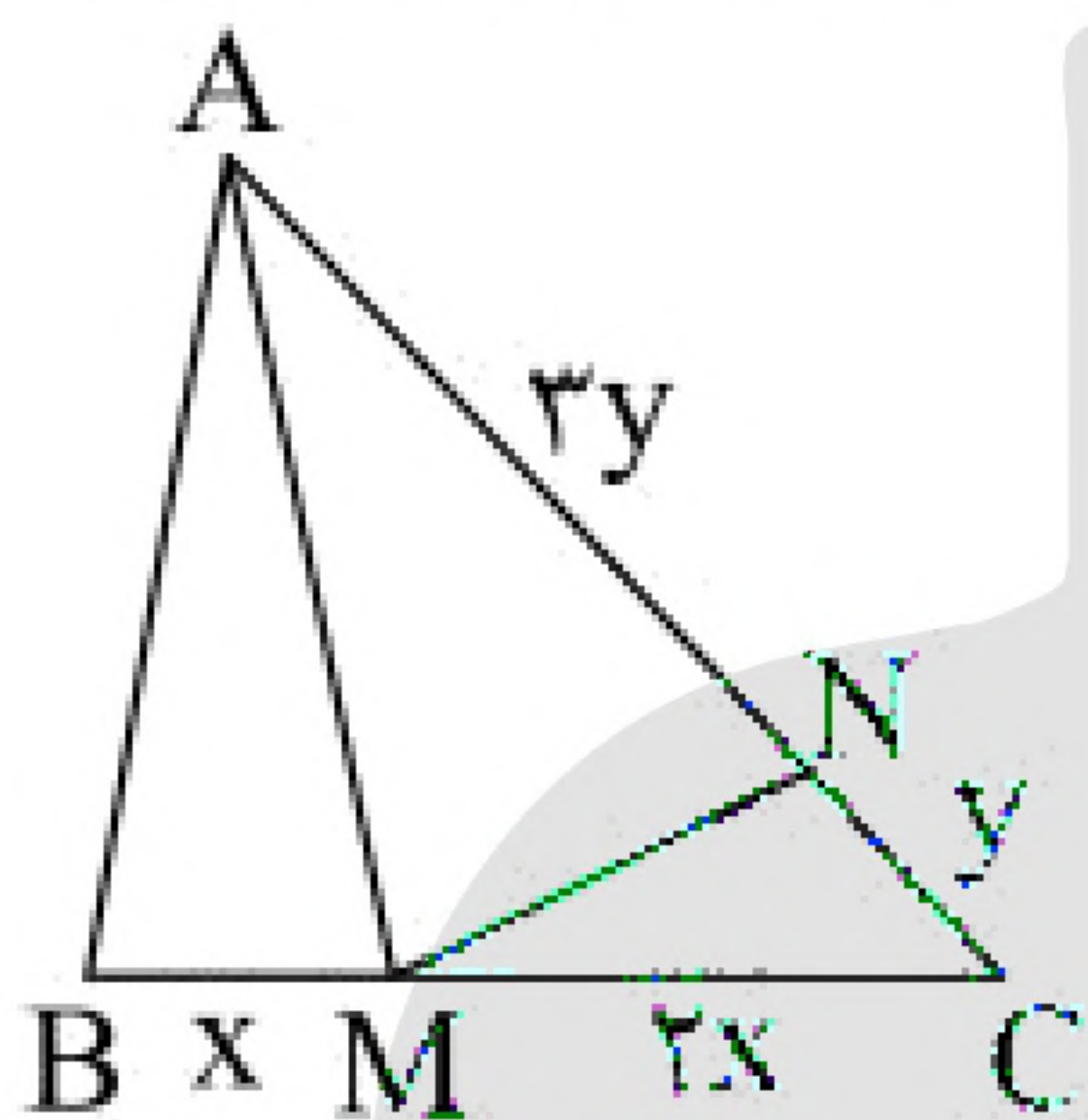
۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با دو بار استفاده از قضیه تالس داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AFC : BE \parallel CF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \\ \triangle AFD : CE \parallel DF \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \times AD$$

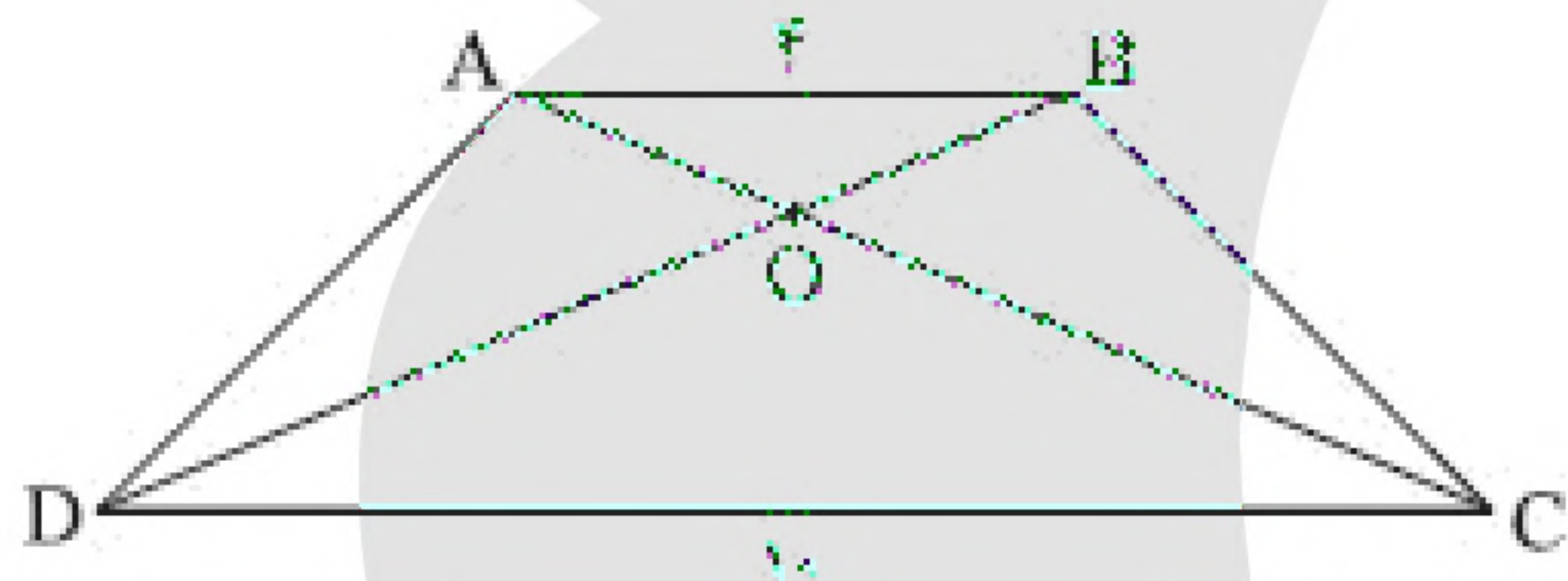
بنابراین، AC واسطه هندسی بین AB و AD است.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نسبت مساحت‌های مثلث‌های هم‌ارتفاع، برابر است با نسبت قاعده‌های نظیر آن ارتفاع



$$\left. \begin{array}{l} \frac{S_{\triangle AMC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MC}{BC} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \\ \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle AMC}} = \frac{AN}{AC} = \frac{3y}{4y} = \frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

۲۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



می‌دانیم طبق قضیه پروانه (شبه پروانه) در دوزنقه مساحت دو مثلث AOD و BOC با هم برابر هستند.

$$S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = S_1 \quad (1)$$

همچنین دو مثلث AOB و DOC متشابه‌اند پس نسبت مساحت‌ها برابر با مربع نسبت طول اضلاع است. پس:

$$\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle DOC}} = \left(\frac{AB}{DC}\right)^2 = \left(\frac{4}{10}\right)^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow S_{\triangle AOB} = \frac{4}{25} S_{\triangle DOC} \quad (2)$$

همچنین در دوزنقه، $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC} = \sqrt{S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle DOC}}$ است. بنابراین:

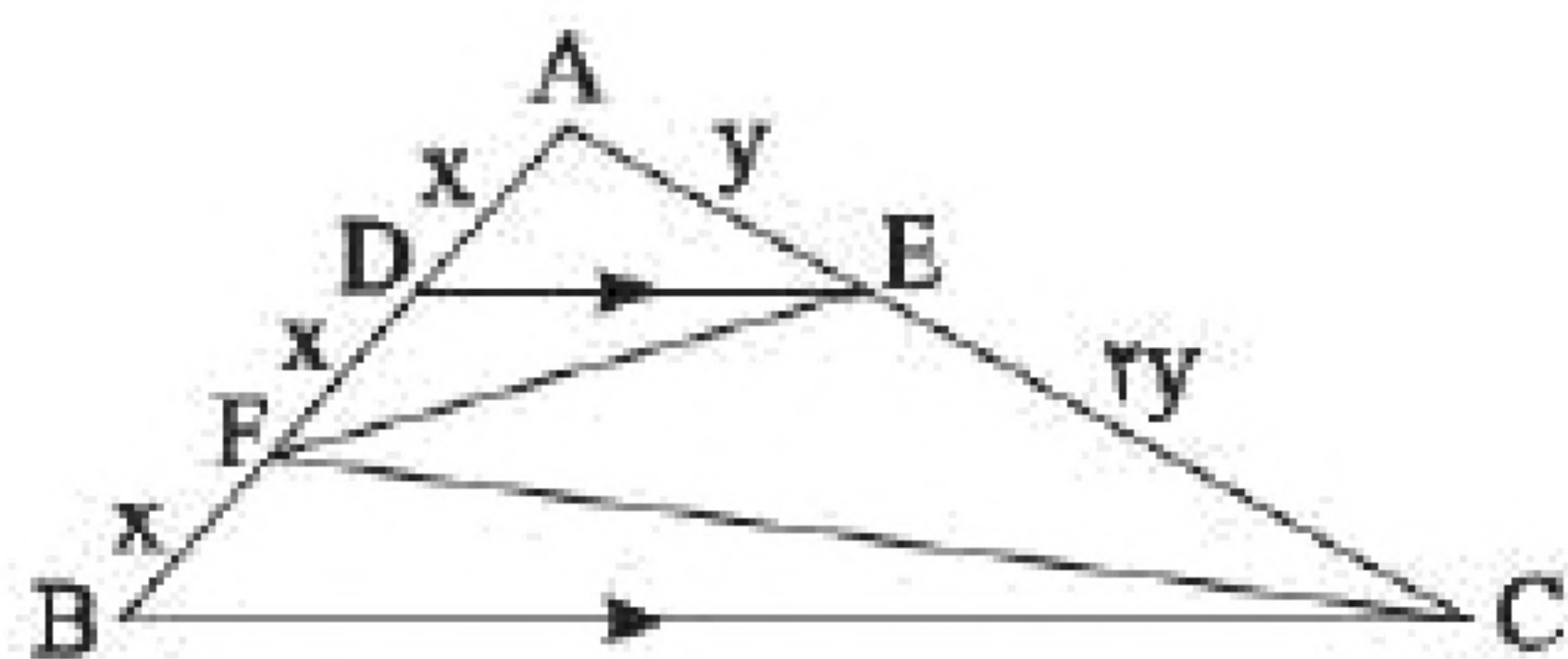
$$\xrightarrow{(1)} S_1 = \sqrt{S_{\triangle AOB} \times S_{\triangle DOC}} \xrightarrow{(2)} S_1^2 = \frac{4}{25} S_{\triangle DOC} \times S_{\triangle DOC} \Rightarrow S_1 = \frac{2}{5} S_{\triangle DOC}$$

$$S_{\text{دوزنقه}} = 2S_1 + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle DOC}$$

$$= 2\left(\frac{2}{5} S_{\triangle DOC}\right) + \frac{4}{25} S_{\triangle DOC} + S_{\triangle DOC} = \frac{49}{25} S_{\triangle DOC}$$



۲۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



در حل این نوع مسائل بهتر است طول هر پاره‌خط را با توجه به نسبت‌های داده شده بنویسیم.

$DE \parallel BC \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$ (قضیه اساسی تشابه)

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{x}{3x}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC}$$

دو مثلث $\triangle ADE$ و $\triangle DEF$ هم‌مساحت‌اند زیرا ارتفاع دو مثلث، یکی و قاعده‌های دو مثلث برابر است بنابراین:

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{9} S_{\triangle ABC} \Rightarrow S_{\triangle AFE} = \frac{2}{9} S_{\triangle ABC} \quad (۱)$$

دو مثلث

$$\frac{S_{\triangle FEC}}{S_{\triangle AFE}} = \frac{2y}{y} = 2 \xrightarrow{(۱)} S_{\triangle FEC} = 2 S_{\triangle AFE} = 2 \left(\frac{2}{9} S_{\triangle ABC} \right) = \frac{4}{9} S_{\triangle ABC}$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
یکی از ویژگی‌های تناسب این است که:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{a+1}{1} = \frac{a_2+2}{2} = \dots = \frac{a_n+n}{n} = \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n) + (1+2+\dots+n)}{1+2+3+\dots+n}$$

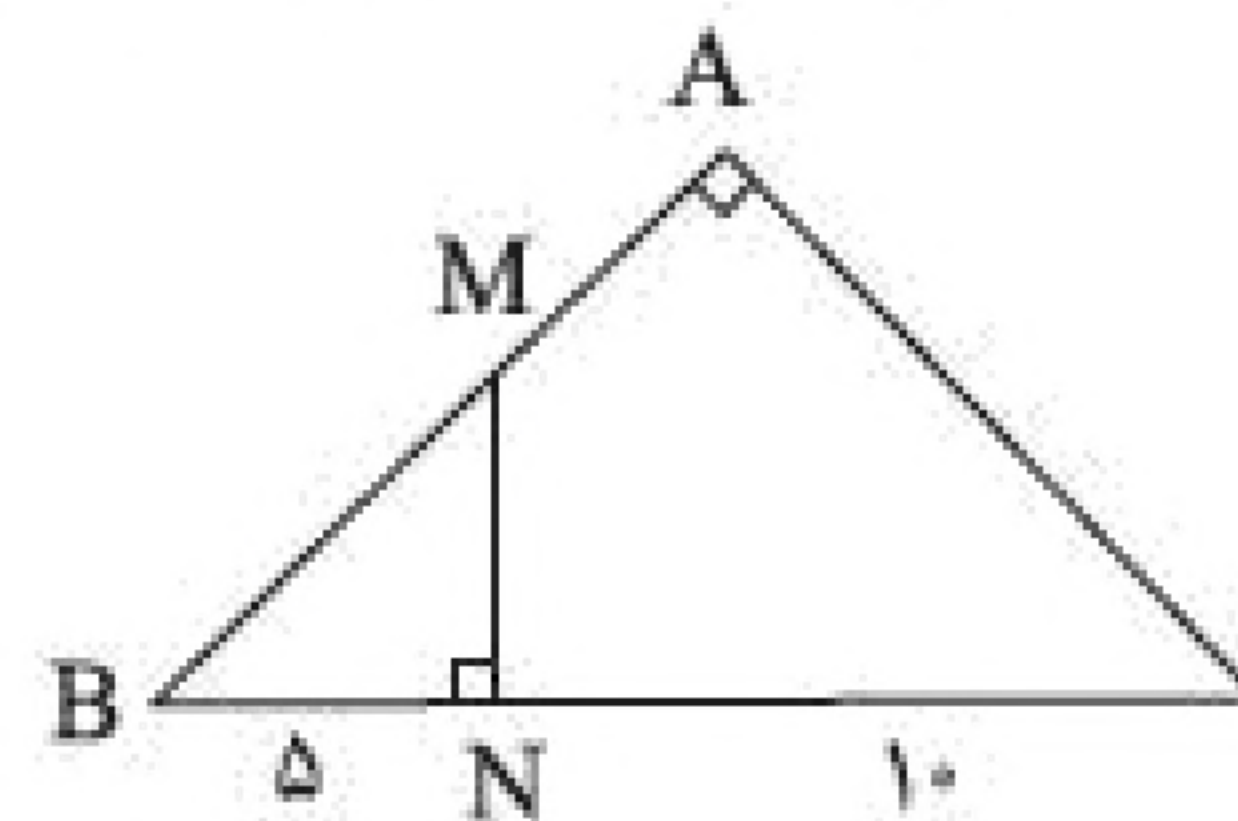
$$\Rightarrow a_1+1 = \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n) + \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow a_1+1 = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{\frac{n(n+1)}{2}} + 1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \Rightarrow a_1+a_2+\dots+a_n = \frac{n(n+1)}{2} a_1$$

البته می‌توانستید با مثال عددی (مثلاً سه کسر یا دو کسر) نیز بررسی کنید.



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
دو مثلث ABC و BMN متشابه هستند.

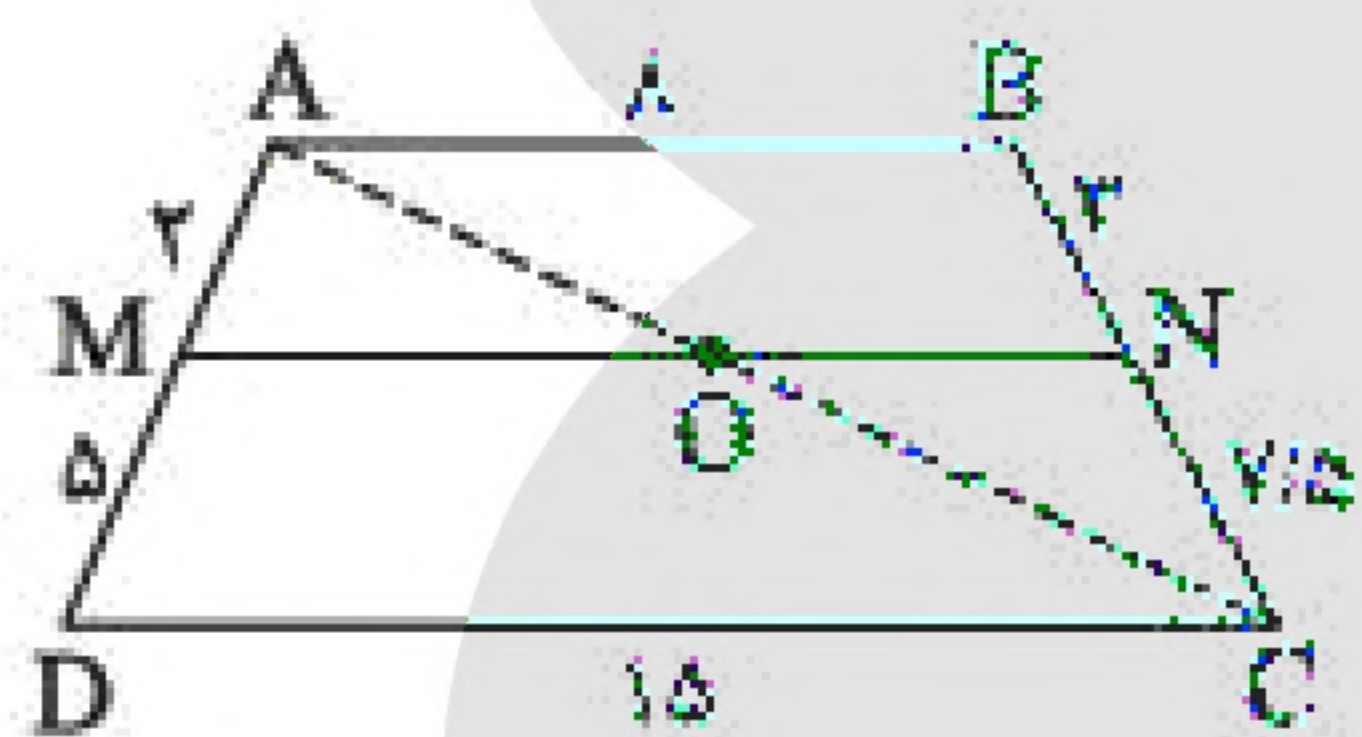


$$\left. \begin{array}{l} \hat{N} = \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle BMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB} = \frac{MN}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}AB}{15} = \frac{5}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2}AB^2 = 15 \times 5$$

$$\Rightarrow AB^2 = 150 \Rightarrow AB = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



طبق عکس قضیه تالس در دوزنقه:

$$\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow MN \parallel AB \parallel CD$$

اکنون از A به C وصل می‌کنیم، آنگاه طبق قضیه تالس داریم:

$$\triangle ADC : OM \parallel DC \Rightarrow \frac{MO}{CD} = \frac{AM}{AD} \Rightarrow \frac{MO}{15} = \frac{2}{7} \Rightarrow MO = \frac{30}{7}$$

$$\triangle ABC : ON \parallel AB \Rightarrow \frac{NO}{AB} = \frac{CN}{BC} \Rightarrow \frac{NO}{8} = \frac{7/5}{10/5} = \frac{5}{7} \Rightarrow NO = \frac{40}{7}$$

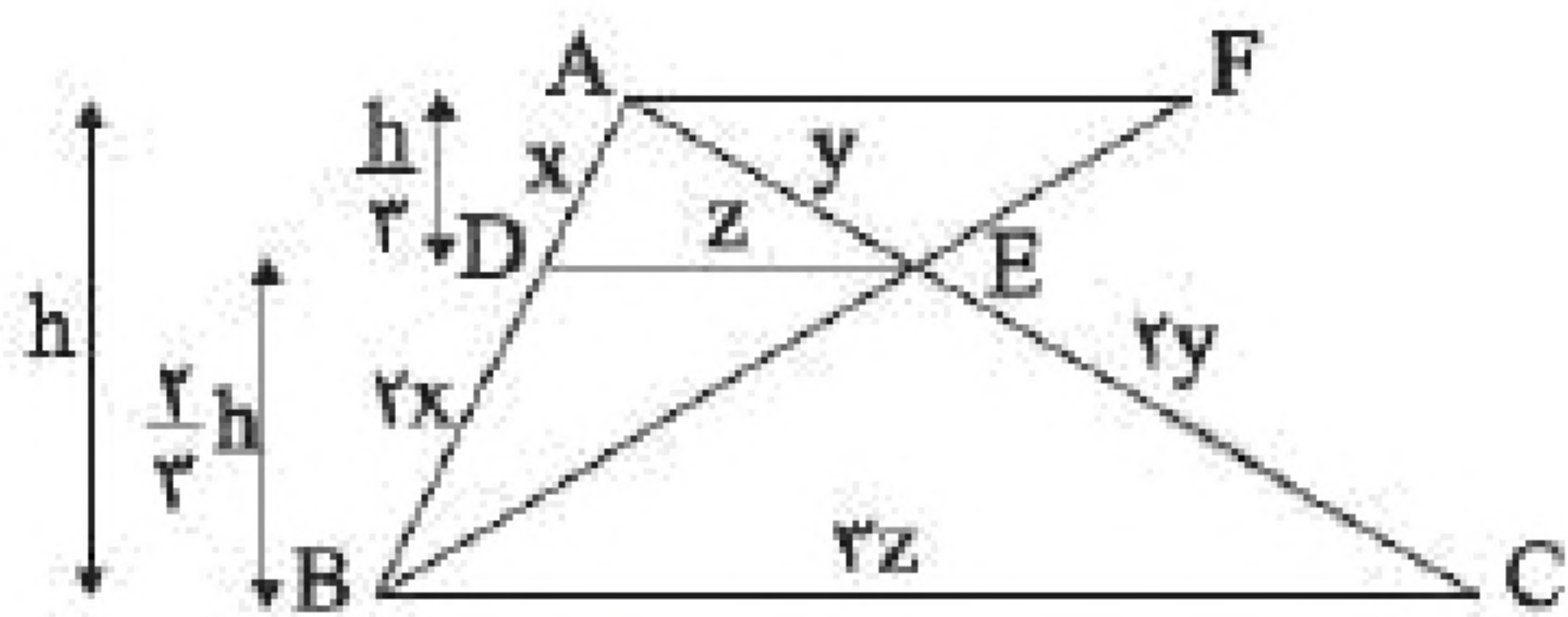
$$MN = MO + NO = \frac{30}{7} + \frac{40}{7} = \frac{70}{7} = 10$$



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{S_{\triangle DEC B}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{8}{1} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_{\triangle DEC B}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{8}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{9}$$

از تشابه دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle ADE$ داریم:



$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD = x, AB = 3x$$

$$\frac{S_{\triangle DEB}}{S_{\triangle BEC}} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}h \times z}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}h \times 3z} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$S_{\triangle DEB} + S_{\triangle BEC} = 8S_{\triangle ADE} \xrightarrow{(1)} S_{\triangle DEB} + 3S_{\triangle DEB} = 8S_{\triangle ADE} \\ \Rightarrow S_{\triangle DEB} = 2S_{\triangle ADE} \quad (2)$$

با توجه به تشابه دو مثلث $\triangle ADE$ و $\triangle ABF$ داریم:

$$\frac{S_{\triangle DEB}}{S_{\triangle ABF}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

به کمک رابطه (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{S_{\triangle DEB}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{2S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{S_{\triangle ABF}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{9}{2} = 4.5$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از آنجایی که مثلث ABC مجانس AMN به مرکز A است، پس ABC و AMN با

نسبت تشابه $\frac{7}{4}$ متشابه‌اند.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \xrightarrow[\text{مخرج}]{\text{تفضیل از}} \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BMNC}} = \frac{49}{45} \Rightarrow \frac{S_{\triangle BMNC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{45}{49}$$



۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق فرض داریم:

$$S = 4 \Rightarrow \frac{b}{2} - 1 + i = 4 \Rightarrow \frac{b}{2} + i = 5 \xrightarrow{\times 2} b + 2i = 10 \Rightarrow b = 10 - 2i$$

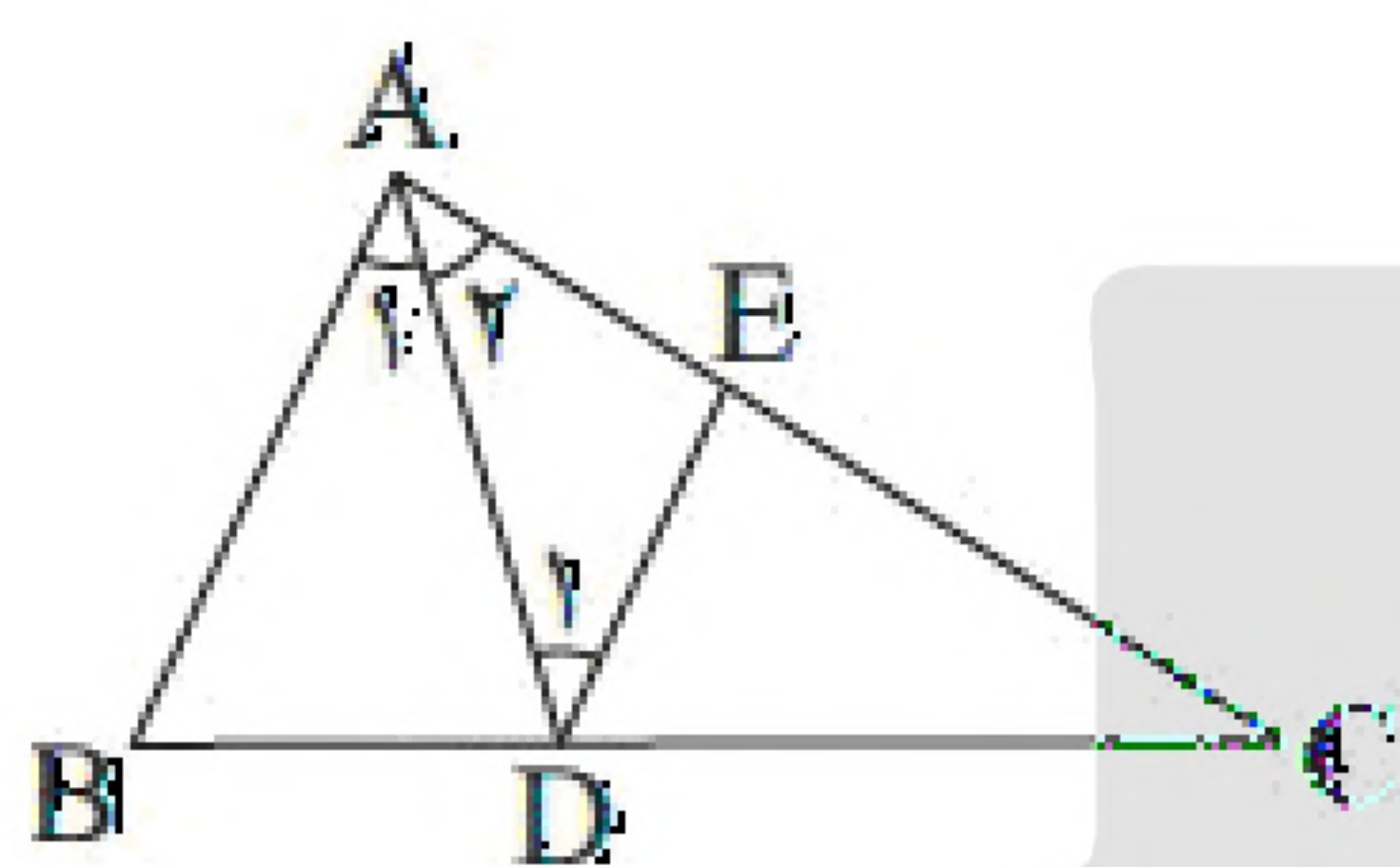
$$\frac{b \geq 3}{\longrightarrow} 10 - 2i \geq 3 \Rightarrow 2i \leq 7 \Rightarrow \max(i) = 3$$

$$\frac{b = 10 - 2i}{\longrightarrow} 10 - 6 = 4 \Rightarrow |b - i| = |4 - 3| = 1$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نقطه‌ی D از اضلاع AB و AC به یک فاصله است پس D روی نیمساز زاویه‌ی A است. بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است و داریم:



$$\left. \begin{array}{l} DE \parallel AB \\ \text{مورب } AD \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{A}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D}_1 = \hat{A}_2$$

$$\Rightarrow AE = DE \quad (1)$$

از طرف دیگر داریم:

$$DE \parallel AB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB} \xrightarrow{\text{از (1)}} \frac{EC}{AC} = \frac{AE}{AB}$$

$$\frac{AE = AC - EC}{\longrightarrow} \frac{EC}{20} = \frac{20 - EC}{12} \Rightarrow 12EC = 400 - 20EC \Rightarrow 32EC = 400 \Rightarrow EC = 12.5$$

۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

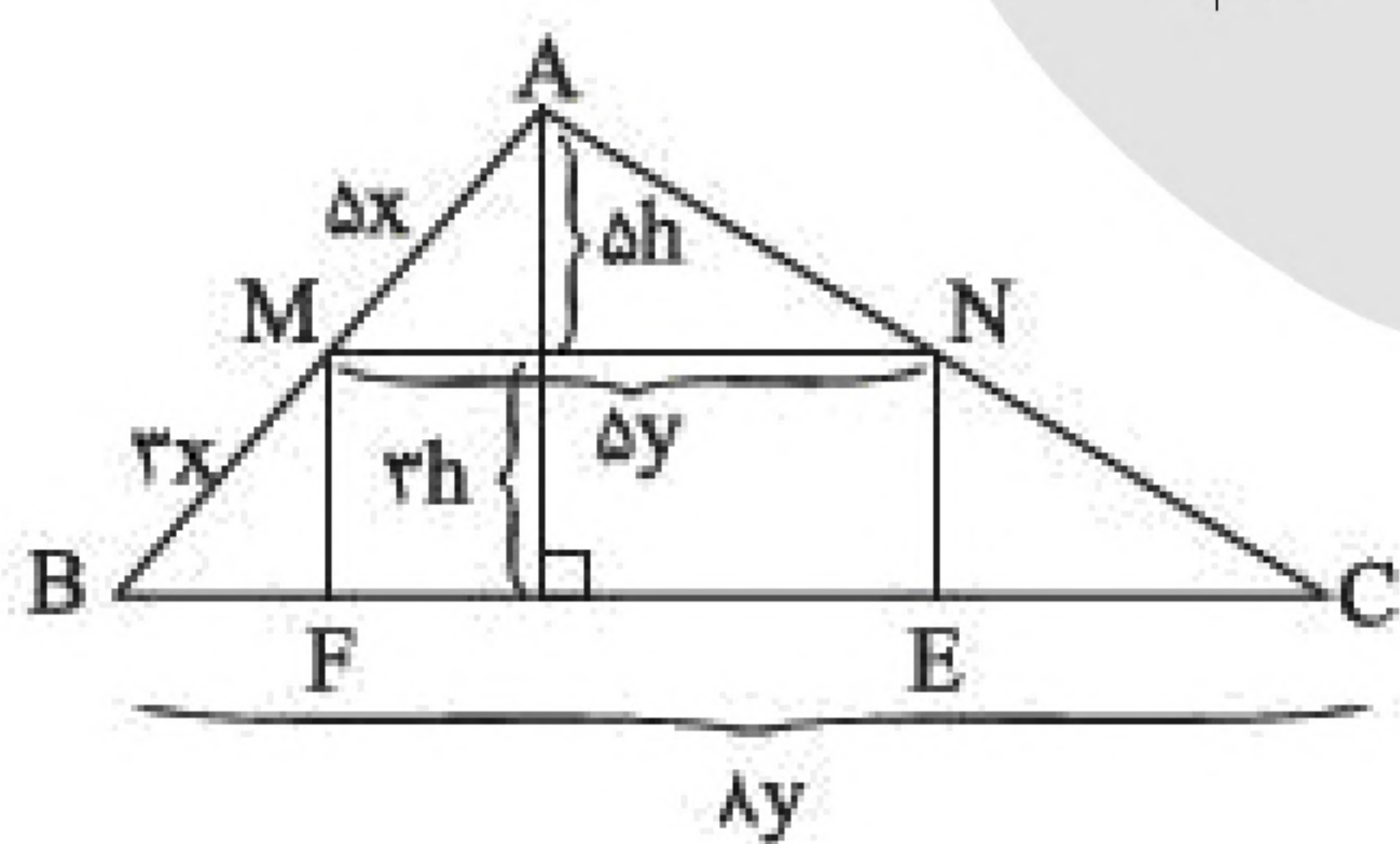
در بین گزاره‌های داده شده فقط گزاره‌ی «ب» نادرست است.

دقت کنید! (۱) نقطه‌ی هم‌مرسی عمود منصف‌های اضلاع مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

(۲) نقطه‌ی هم‌مرسی نیم‌سازهای داخلی مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با توجه به رابطه‌ی تالس می‌توان مقادیر را مطابق شکل زیر نوشت، در این صورت داریم:



$$\frac{S_{\text{مستطیل}}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{5y \times 3x}{14y \times 14h} = \frac{15}{32}$$

۳۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق خواص تناسب داریم:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} \Rightarrow \frac{x+y+z}{9} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \frac{2}{9}(x+y+z)$$



۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون AM و BN میانه‌های مثلث ABC می‌باشند پس G مرکز ثقل مثلث است. از طرفی N وسط AC و NF موازی AM است. بنابر قضیه میان خط (عکس تالس) در مثلث AMC ، F وسط MC می‌باشد. با فرض $BC = ۲x$

$$\text{داریم: } BM = MC = ۲x \text{ و } MF = FC = \frac{MC}{۲} = x$$

اگر مساحت مثلث ABC را با S نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$BN \Rightarrow \text{میانه} \Rightarrow S_{\triangle BNC} = \frac{1}{۲}S \quad (۱)$$

$$\triangle BNF : (GM \parallel NF) : \frac{S_{\triangle BGM}}{S_{\triangle BNF}} = \left(\frac{BM}{BF}\right)^۲ = \left(\frac{۲x}{۳x}\right)^۲ = \frac{۴}{۹} \quad (۲)$$

مثلث‌های $\triangle BNF$ و $\triangle NFC$ دارای ارتفاع مشترک‌اند که از رأس N رسم می‌شود، پس:

$$\frac{S_{\triangle BNF}}{S_{\triangle NFC}} = \frac{BF}{FC} = \frac{۳x}{x} = ۳ \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_{\triangle BNF}}{S_{\triangle BNC}} = \frac{۳}{۴} \quad (۳)$$

$$\xrightarrow{(۳), (۱)} S_{\triangle BNF} = \frac{۳}{۴} S_{\triangle BNC} = \frac{۳}{۴} \left(\frac{1}{۲}S\right) = \frac{۳}{۸}S \quad (۴)$$

$$\xrightarrow{(۴), (۲)} S_{\triangle BGM} = \frac{۴}{۹} S_{\triangle BNF} = \frac{۴}{۹} \left(\frac{۳}{۸}S\right) = \frac{1}{۶}S \quad (۵)$$

$$\xrightarrow{(۵), (۴)} S_{GMFN} = S_{\triangle BNF} - S_{\triangle BGM} = \frac{۳}{۸}S - \frac{1}{۶}S = \frac{۵}{۲۴}S$$

۳۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{AB}{۳} = \frac{BC}{۴} = \frac{AC}{۶} = t$$

پس:

$$AC = ۶t, BC = ۴t, AB = ۳t$$

$$\left. \begin{array}{l} AD \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{NAC} \text{ نیمساز} \\ AB \parallel NE \\ AN \Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{ANE} \text{ مورب} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{NAC} = \widehat{ANE} \Rightarrow AE = NE \quad (۱)$$

چون M وسط BC است و $ME \parallel AB$ طبق عکس تالس (میان‌بر یا میان‌خط)

$$(۲) \quad ME = \frac{1}{۲}AB$$

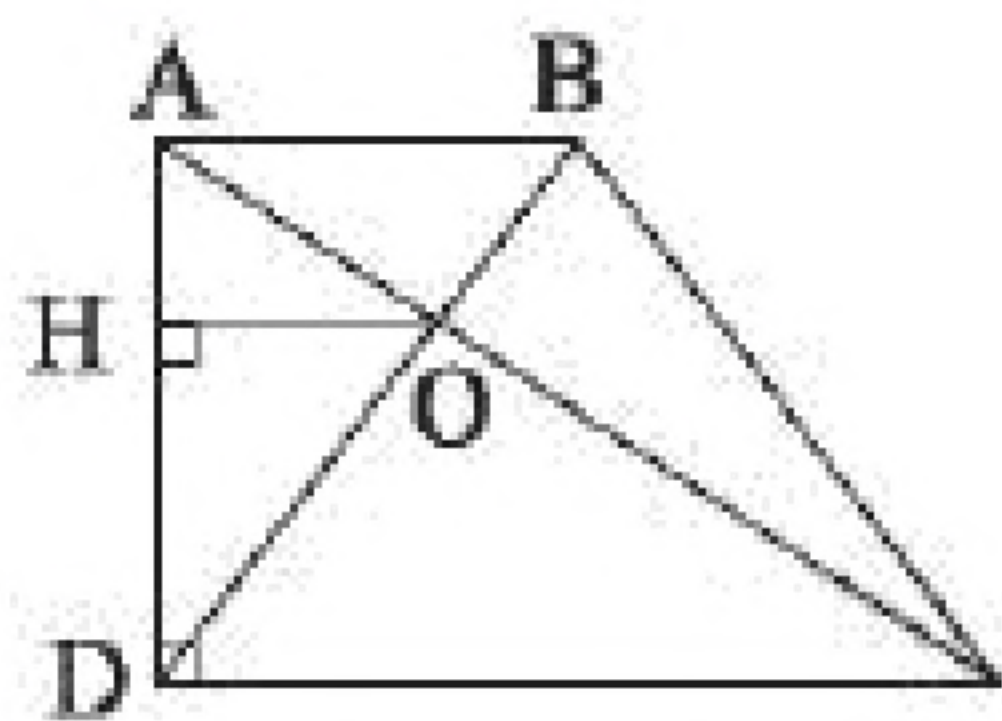
$$(۳) \quad AE = EC = \frac{1}{۲}AC \xrightarrow{(۱)} NE = \frac{1}{۲}AC \quad (۴)$$

$$MN = NE - ME \xrightarrow{(۲) \text{ و } (۴)} MN = \frac{1}{۲}AC - \frac{1}{۲}AB = \frac{1}{۲}(۶t - ۳t)$$

$$\Rightarrow MN = \frac{۳}{۲}t \xrightarrow{AB \text{ کوچک ترین ضلع}} MN = \frac{۳}{۲} \times \frac{1}{۳}AB = \frac{1}{۲}AB$$



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



سؤال از ما طول OH را خواسته است.

$$\triangle ABD: (OH \parallel AB) \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{OH}{AB} = \frac{DH}{AD} \quad (1)$$

$$\triangle ADC: (OH \parallel DC) \xrightarrow{\text{تالس جزء به کل}} \frac{OH}{DC} = \frac{AH}{AD} \quad (2)$$

با جمع طرفین (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{OH}{AB} + \frac{OH}{DC} = \frac{DH + AH}{AD} = \frac{AD}{AD} = 1$$

$$\Rightarrow OH \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{DC} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{OH} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{DC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH} = \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{2}{5} \Rightarrow OH = \frac{5}{2} = 2.5$$

۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با استفاده از قضیه تالس داریم:

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC} \Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y}{5-x} \Rightarrow y^2 = 20 - 4x \quad (1)$$

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1} \xrightarrow[\text{از مخرج}]{\text{تفصیل}} \frac{4}{4+y-4} = \frac{x+1}{y+x+1-x-1}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{x+1}{y} \xrightarrow{y \neq 0} x+1=4 \Rightarrow x=3$$

اکنون با توجه به تساوی (۱) داریم:

$$y^2 = 20 - 12 \Rightarrow y^2 = 8 \Rightarrow y = 2$$

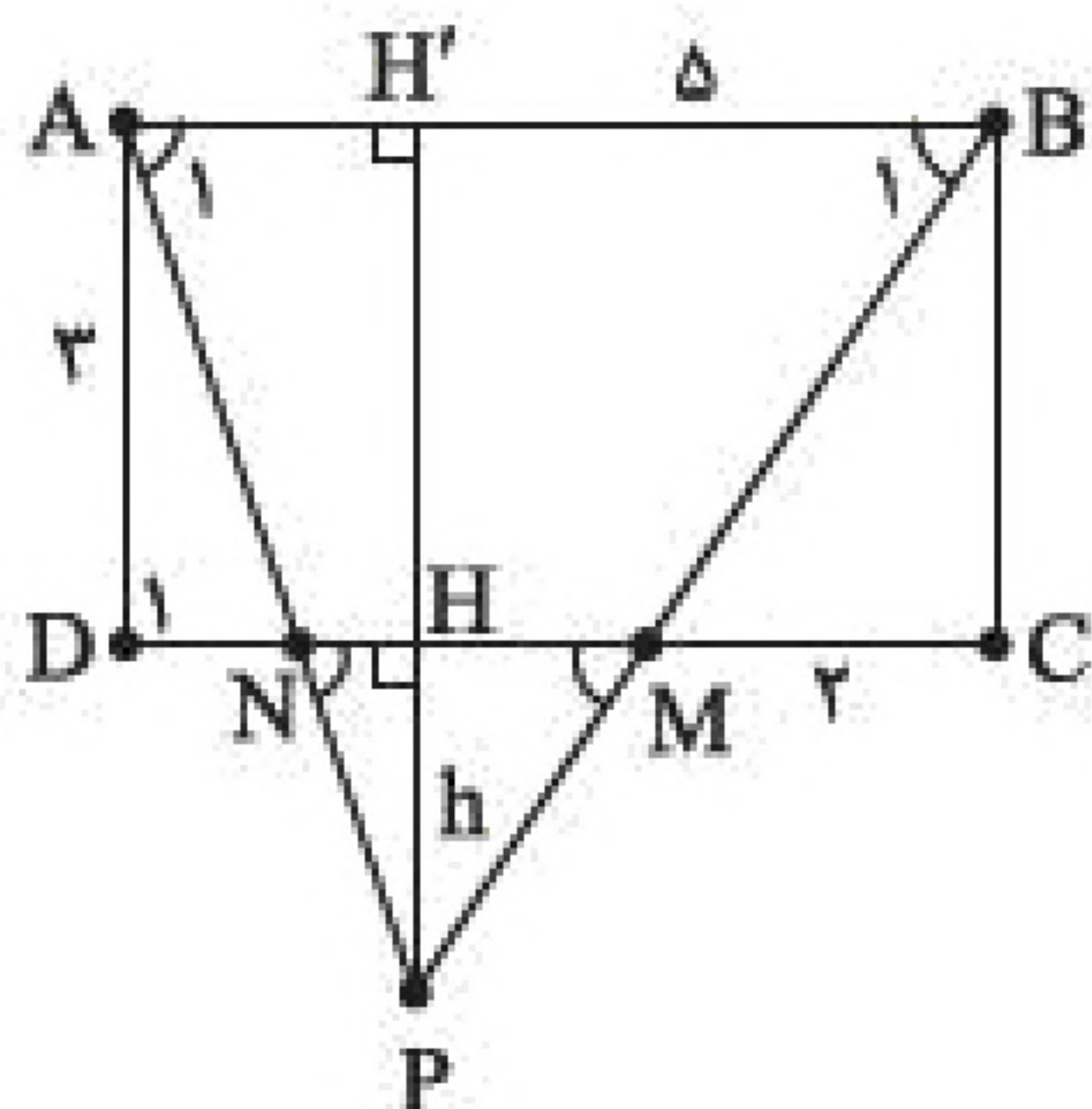
از طرف دیگر چون $EF \parallel BC$ است، پس بنابر قضیه‌ی اساسی تشابه داریم:

$$\triangle AEF \approx \triangle ABC \Rightarrow \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AE}{AB} \right)^2 = \left(\frac{4}{4+y} \right)^2 = \left(\frac{4}{6} \right)^2 = \frac{4}{9}$$



۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

دو مثلث $\triangle BAP$ و $\triangle MNP$ متشابه‌اند $(\hat{A}_1 = \hat{N}, \hat{B}_1 = \hat{M})$.



می‌دانیم نسبت ارتفاعات آن‌ها برابر نسبت تشابه دو مثلث است پس:

$$\frac{PH}{PH'} = \frac{h}{h+3} = \frac{MN}{AB} \Rightarrow \frac{h}{h+3} = \frac{5-(2+1)}{5} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5h = 2h+6 \Rightarrow 3h = 6 \Rightarrow h = 2$$

پس مساحت مثلث $\triangle BAP$ برابر است با:

$$S_{\triangle BAP} = \frac{1}{2} \times (h+3) \times 5 = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{25}{2}$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با فرض $AM = x$ و $PC = t$ و به کمک قضیه تالس در مثلث‌های $\triangle APC$ و $\triangle ABC$ داریم:

$$QN \parallel PC : \frac{QN}{t} = \frac{y}{3y} \Rightarrow QN = \frac{1}{3}t \quad (1)$$

اکنون اگر ارتفاع AH را رسم کنیم، آنگاه خواهیم داشت:

$$\triangle ABH : MH' \parallel BH \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{AM}{AB} = \frac{x}{3x} \Rightarrow \frac{AH'}{AH} = \frac{1}{3}$$

با فرض $AH' = h$ نتیجه می‌گیریم $AH = 3h$ داریم:

$$\frac{S_{QN}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}(h)(QN)}{\frac{1}{2}(3h)(BC)} = \frac{QN}{3BC} \stackrel{(1)}{=} \frac{\frac{1}{3}t}{3(3t)} = \frac{1}{36}$$

