

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



۱	۲	۳	۴
۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



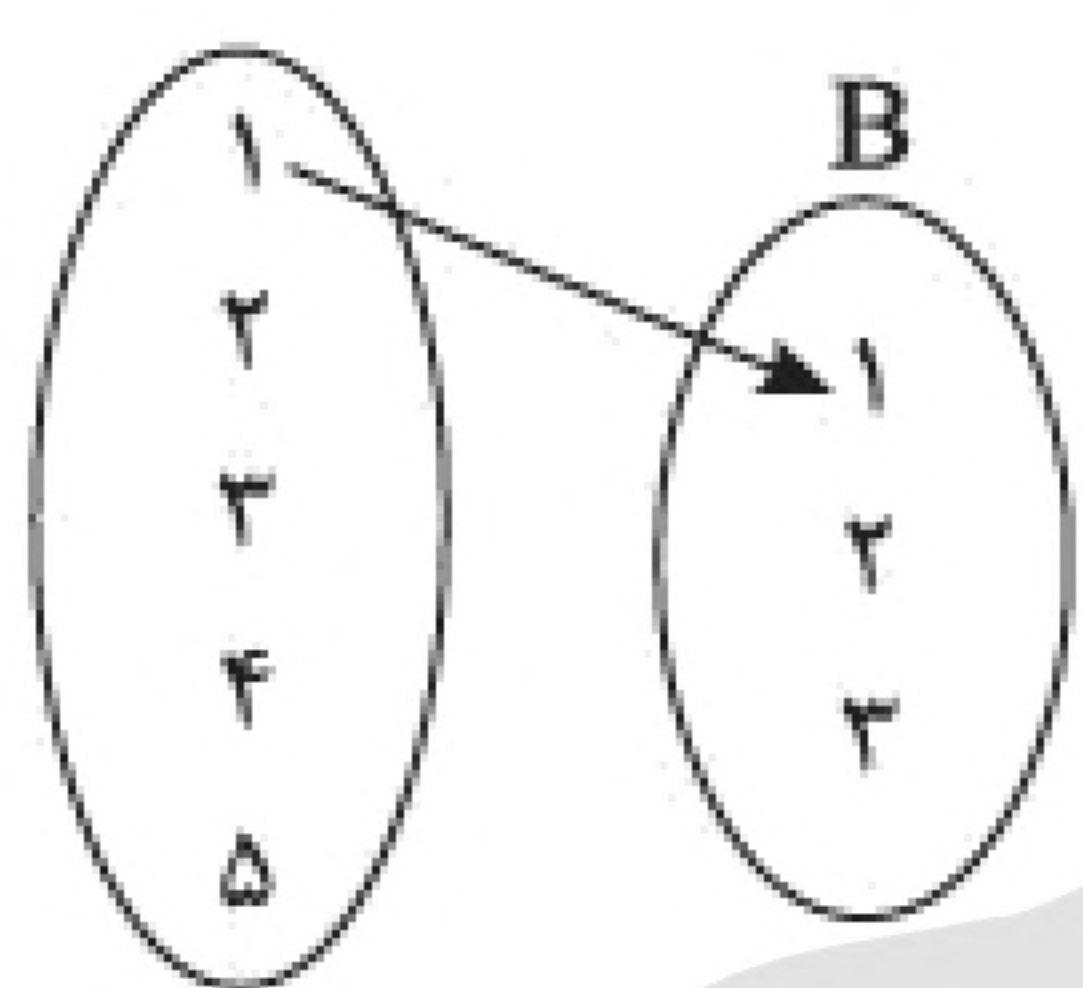
۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

بدترین حالت ممکن این است که ۷ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و یک مهره سبز و یک مهره قرمز در ابتدای کار برداشته باشیم یا انتخاب یک مهره دیگر خواسته مسئله قطعاً رخ می‌دهد پس حداقل باید ۱۶ مهره برداریم.

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

هیچ ۴ نفری با ماه تولد یکسان وجود ندارند. یعنی با هر ماه تولد حداکثر ۳ نفر وجود دارند. بنابراین:
 $۳۶ = ۱۲ \times ۳ =$ حداکثر تعداد دانشجویان

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



روش اول: مجموعه‌ی توابع A به B به‌طوری که ۲ عضو برد تابع باشد (۲ پوشانده شود): A'

مجموعه توابع A به B به‌طوری که ۳ عضو برد تابع باشد (۳ پوشانده شود): B'

$$|A' \cap B'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 3^4 - 2^4 - 2^4 + 1 = 50$$

روش دوم: توابع مطلوب یا تابعی پوشا از مجموعه‌ی ۴ عضوی $\{2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه‌ی ۲ عضوی $\{2, 3\}$ هستند یا تابعی پوشا از مجموعه‌ی ۴ عضوی $\{2, 3, 4, 5\}$ به مجموعه‌ی ۳ عضوی $\{1, 2, 3\}$

تعداد کل توابع پوشا با شرط $f(1) = 1$

$$= (2^4 - 2) + (3^4 - 3 \times 2^4 + 3) = 14 + 36 = 50$$

تذکر: حداقل دو روش دیگر برای حل این سؤال وجود دارد با دوستان و معلمان راجع به آن بحث کنید.

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

زیرمجموعه‌های ۲ عضوی که مجموعه‌شان ۶۰ است به صورت زیر می‌باشد:

$$\{5, 55\}, \{7, 53\}, \{9, 51\}, \{11, 49\}, \{13, 47\}, \{15, 45\}, \{17, 43\}, \{19, 41\}$$

$$\{21, 39\}, \{23, 37\}, \{25, 35\}, \{27, 33\}, \{29, 31\}$$

عدد $\{3\}$ هم باقی‌مانده است حال اگر از هر ۱۳ زیرمجموعه‌ی ۲ عضوی، یک عدد انتخاب کنیم و با عدد $\{3\}$ در یک مجموعه قرار دهیم، مجموع هیچ دو عددی برابر ۶۰ نخواهد شد اما با اضافه کردن یک عدد دیگر به مجموعه قطعاً مجموع دو عضو برابر ۶۰ می‌شود پس حداقل مقدار n برابر $15 = 14 + 1$ است.

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد کل توابع از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B برابر $|B|^{|A|}$ است.

تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی n عضو A ($n \geq 3$) به مجموعه‌ی ۳ عضوی B برابر $3^n - 3 \times 2^n + 3$ است.
 در نتیجه داریم:

تعداد توابع پوشا - تعداد کل توابع = تعداد توابع غیرپوشا

$$3^n - (3^n - 3 \times 2^n + 3) = 93 \rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow n = 5$$

تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی ۳ عضوی A به مجموعه‌ی ۳ عضوی C برابر است با:

$$(3^2 - 3 \times 2^2 + 3) = 6$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تعداد روش‌هایی که می‌توان بین ۵ روستا جاده احداث کرد معادل تعداد گراف‌های ساده ۵ رأسی است. بنابراین اگر مجموعه حالت‌هایی که هر یک از روستاهای A ، D و E بدون ارتباط با سایر روستاها باقی می‌مانند را با مجموعه‌های A_1 ، A_2 و A_3 نمایش دهیم، داریم:

$$|S| = 2^{\binom{5}{2}} = 2^{10} = 1024$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^{\binom{4}{2}} = 64$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 2^{\binom{3}{2}} = 8$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2^{\binom{2}{2}} = 2$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 64 \times 3 - 3 \times 8 + 2 = 170$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 1024 - 170 = 854$$

نکته: تعداد گراف‌ها با n رأس برابر است با: $2^{\binom{n}{2}}$

اصل شمول:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

عدم شمول:

$$|A \cup B \cup C| = |S| - |\overline{A \cup B \cup C}|$$

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

m مجهول است، از طرفی تعداد لانه‌ها می‌شود:

$$n = 12 \times 7 \times 2 = 168$$

روز هفته

ماه تولد جنسیت

$k+1=11$ ، پس $k=10$. حالا اگر $m > kn$:

$$m > 10 \times 168 \Rightarrow m > 1680 \Rightarrow m = 1681$$

نکته: اصل لانه‌ی کبوتری: اگر m کبوتر n لانه را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه‌ها باشد ($m > n$)، آنگاه طبق اصل لانه‌ی کبوتری، حداقل یک لانه‌ی کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو یا بیشتر کبوتر در آن قرار داشته باشند. حداقل تعداد کبوتر برای اینکه در یکی از k لانه حداقل n کبوتر قرار گیرد، برابر است با:

$$(n-1) \times k + 1 = m$$



- ۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
ابتدا زوج‌هایی تشکیل می‌دهیم که جمع آنها ۳۶ است.
(۶, ۳۰), (۷, ۲۹), (۸, ۲۸), (۹, ۲۷), (۱۰, ۲۶), (۱۱, ۲۵), (۱۲, ۲۴), (۱۳, ۲۳), (۱۴, ۲۲), (۱۵, ۲۱), (۱۶, ۲۰), (۱۷, ۱۹)
واضح است که اعداد ۳ و ۴ و ۵ و ۱۸ استفاده نشدند.
حال اگر در بدترین حالت، از هر زوج یک عدد برداریم و آنها را با اعداد استفاده‌نشده در یک مجموعه قرار دهیم، جمع هیچ دو عضوی ۳۶ نخواهد بود. پس اگر یک عضو دیگر به آن اضافه کنیم حاصل دو عدد قطعاً ۳۶ است.
 $۱۲ + ۴ + ۱ = ۱۷$

- ۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
اگر مستطیل داده شده را به ۳۲ مربع همنهشت افراز کنیم، کافی است ۳۳ نقطه را به عنوان ۳۳ کبوتر و ۳۲ مربع را به عنوان ۳۲ لانه در نظر بگیریم. (تعداد لانه‌ها > تعداد کبوترها) طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل ۲ نقطه داخل یک مربع قرار می‌گیرند، پس فاصله‌ی این ۲ نقطه حداکثر به اندازه‌ی قطر مربع است.
مطابق شکل:



$$MN < AB \Rightarrow MN < \sqrt{2}$$

- ۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر مجموعه‌ی حالت‌هایی که به ترتیب حروف S و n و r در جای خود قرار دارند را با A و B و C نشان دهیم، آنگاه:
تعداد کل حالت‌ها:

$$|S| = 6! = ۷۲۰$$

$$|A| = |B| = |C| = ۵! = ۱۲۰$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = ۴! = ۲۴$$

$$|A \cap B \cap C| = ۳! = ۶$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = |(A \cup B \cup C)'| = |S| - (|A \cup B \cup C|)$$

$$|S| - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$= ۷۲۰ - (۱۲۰ + ۱۲۰ + ۱۲۰ - ۲۴ - ۲۴ - ۲۴ + ۶) = ۴۲۶$$

نکته: اصل شمول و عدم شمول برای ۳ مجموعه:

اصل شمول:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

عدم شمول:

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$



۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

باید کل توابع را محاسبه و از توابع پوشایی که $f(1)=f(2)$ هستند، کسر کنیم. ابتدا کل توابع پوشا را محاسبه می‌کنیم.

$$3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 150$$

حال، توابع پوشایی را محاسبه می‌کنیم که $f(1)=f(2)$ باشد. ابتدا فرض کنید $f(1)=f(2)=6$ باشد و سپس جواب نهایی را در $\binom{3}{1}$ ضرب کنید. زیرا ممکن است به جای ۶، اعداد ۷ یا ۸ هم قرار گیرند.

$A = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$: توابعی که ۷ را نمی‌پوشاند

$B = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 = 8$: توابعی که ۸ را نمی‌پوشاند

$S = 1 \times 1 \times 3 \times 3 \times 3 = 27$ کل توابع

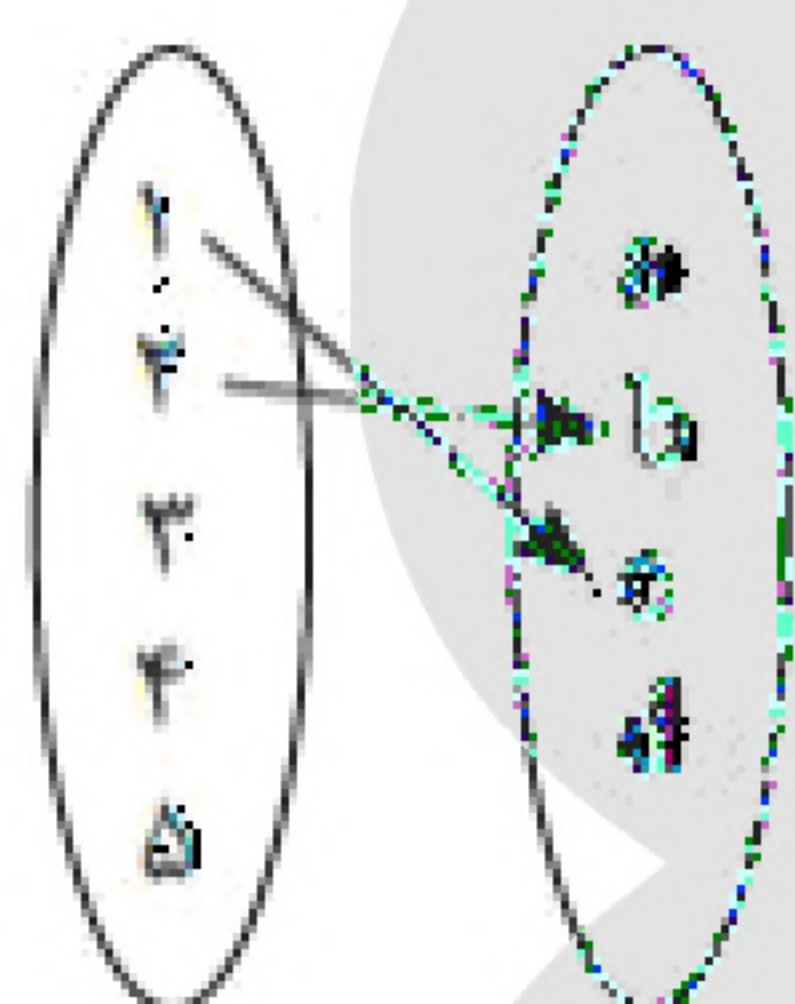
$$|A \cap B| = 1$$

$$\binom{3}{1} (27 - (8 + 8 - 1)) = 36$$

$$150 - 36 = 114$$

۱۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به اصل شمول و عدم شمول داریم:



$$|S| - |A \cup B| = \text{حالات مطلوب}$$

a خالی باشد

d خالی باشد

$$|S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 4^3 - (3^3 + 3^3 - 2^3) = 64 - (27 + 27 - 8) = 18$$

نکته:

اصل شمول برای دو مجموعه:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

اصل عدم شمول برای دو مجموعه:

$$|A \cup B| = |S| - |A \cup B|$$

نکته: شرط لازم برای تعریف تابع پوشا آن است که تعداد اعضای دامنه بزرگ‌تر یا مساوی برد باشد. تابع پوشا تابعی است که در آن برد تابع با مجموعه‌ی هم‌دامنه برابر شود یا به عبارتی دیگر، اعضای برد توسط اعضای دامنه استفاده یا پوشیده شود و هیچ عضو بدون استفاده نماند.

برد دامنه

$$F : A \rightarrow B \quad R_F = B \quad \text{تابع پوشاست}$$

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در حقیقت باید تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی را محاسبه کنیم:

$$3^n - \{3 \times 2^n - 3\} \quad \text{تعداد توابع پوشا از مجموعه‌ی } n \text{ عضوی به مجموعه‌ی } 3 \text{ عضوی}$$

$$= 3^4 - \{3 \times 2^4 - 3\} = 36$$



۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

A: تعداد توابع یک‌به‌یک شامل $(a, 3)$

B: تعداد توابع یک‌به‌یک شامل $(a, 3)$ و $(c, 6)$

پس داریم:

$$\begin{cases} f = \{(a, 3), (b, -), (c, -), (d, -)\} & |A| = P(5, 3) = \frac{5!}{2!} = 60 \\ g = \{(a, 3), (c, 6), (b, -), (d, -)\} & |A \cap B| = P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = 12 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 60 - 12 = 48$$

نکته: شرط لازم برای تعریف تابع یک‌به‌یک آن است که تعداد اعضای برد بزرگ‌تر یا مساوی دامنه باشد. تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعه‌ی $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ به مجموعه‌ی $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ برابر است با:

$$P(n, m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

به شرط آنکه معادله‌ی $ax + by = c$ دارای جواب باشد: $(a, b) \mid c$

لذا باید $4 \mid (a, 21)$ باشد، یعنی عدد a نمی‌تواند مضرب ۳ و یا ۷ باشد.

A: مجموعه مضارب ۳ B: مجموعه مضارب ۷

$$A' \cap B' = (A \cup B)' = S - (A + B - A \cap B)$$

$$= 99 - \left(\left[\frac{99}{3} \right] + \left[\frac{99}{7} \right] - \left[\frac{99}{21} \right] \right) = 99 - (33 + 14 - 4) = 56$$



۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

ابتدا ۳ مجموعه تعریف می‌کنیم، اعضای موردنظر در مجموعه‌ی $A \cap (B' \cap C')$ قرار دارند.

A: مجموعه مضارب ۴

B: مجموعه مضارب ۵

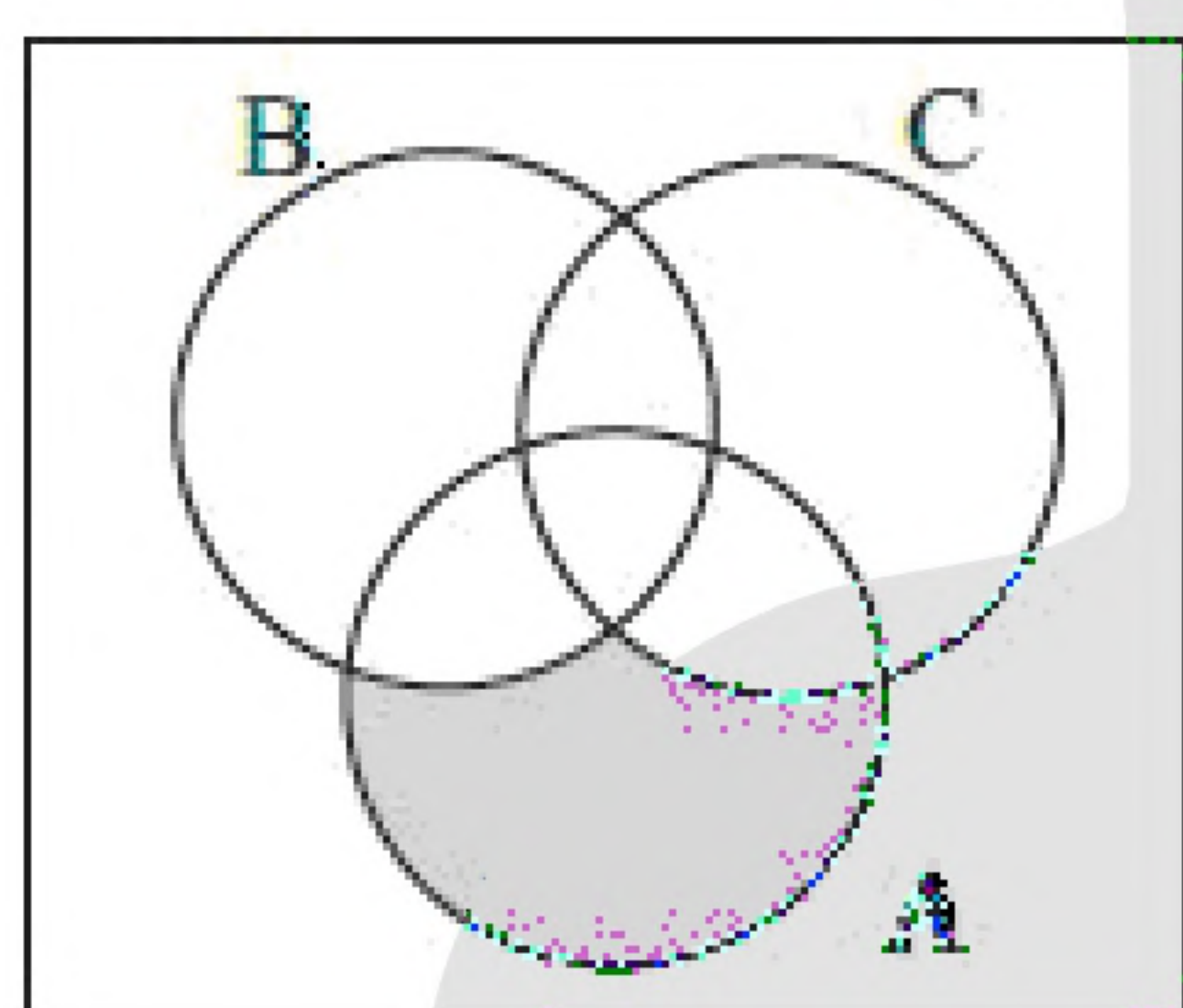
C: مجموعه مضارب ۶

$$\xrightarrow{\text{دمرگان}} A \cap (B \cup C)' \xrightarrow{\text{تفاضل}} A - (A \cap (B \cup C))$$

$$\xrightarrow{\text{پنخشی}} A - ((A \cap B) + (A \cap C) - (A \cap B \cap C))$$

$$\left[\frac{300}{4} \right] - \left(\left[\frac{300}{20} \right] + \left[\frac{300}{12} \right] - \left[\frac{300}{60} \right] \right) = 75 - (15 + 25 - 5) = 40$$

برای درک بهتر، به نمودار مقابل دقت کنید. ناحیه‌ی هاشور خورده، ناحیه‌ی موردنظر سؤال است.



۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

کل کلاس: $|S| = 50$

تعداد افرادی که حداقل به یک رشته علاقه‌مندند: $|A \cup B| = 24$

$$\underbrace{|S| - |A \cup B|}_{\text{تعداد افرادی که به هر دو رشته علاقه‌مند نیستند}} = \underbrace{2}_{\text{تعداد افرادی که به هیچ‌کدام از دو رشته علاقه‌مندند}} \underbrace{|A \cap B|}_{\text{تعداد افرادی که به هر یک از دو رشته علاقه‌مندند}}$$

تعداد افرادی که به هر یک از دو رشته علاقه‌مندند: $|A \cap B| = 13$

$$50 - 24 = 2 \Rightarrow |A \cap B| = 13$$

$$|S| - |A \cup B| = 2 \Rightarrow 50 - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 2$$

$$\Rightarrow |A| + |B| = 50 - 13 = 37$$

تعداد افرادی که دقیقاً به یک رشته علاقه دارند، $|A - B| + |B - A|$ است، پس داریم:

$$|A - B| + |B - A| = |A| + |B| - 2|A \cap B| = 37 - 2 \times 13 = 11$$

نکته: اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه:

اصل شمول:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

عدم شمول:

$$\overline{|A \cup B|} = |S| - |A \cup B|$$



۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
تکمیل شده مربع A به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

بررسی گزینه‌ها:

- گزینه (۱): با کنار هم قرار دادن دو مربع، عدد تکراری ۲۳ به وجود می‌آید.
گزینه (۲): عدد تکراری ۴۱ به وجود می‌آید.
گزینه (۳): عدد تکراری ۲۳ به وجود می‌آید.
گزینه (۴): می‌توانیم به صورتی تکمیل کنیم که هیچ عدد دورقمی تکراری نباشد.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

جایگشت باید به صورت $\begin{cases} 1 \rightarrow a \\ 2 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow b \\ 4 \rightarrow c \end{cases}$ باشد که a, b, c غیرتکراری و عضو مجموعه $\{2, 3, 4\}$ هستند، پس تعداد حالت‌ها برابر $6 = 1 \times 2 \times 3$ تا خواهد بود.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

۲	۴	۳	۵	
۵	۳	۱	۴	۲
۴	۲	۵	۱	۳
۳	۱	۴	۲	۵
۱	۵	۲	۳	

ابتدا ستون سوم و ردیف سوم را کامل می‌کنیم. ستون چهارم دو جای خالی دارد که با ۳ و ۵ پر می‌شود.
دقت کنید سطر اول ۳ نمی‌تواند باشد.
ردیف چهارم هم با ۳ و ۵ کامل می‌شود و در ادامه $a = 4$, $b = 1$ می‌شود.

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

متغیر جدید t را چنان معرفی می‌کنیم که $x + y + z + t = 17$.
دقت کنید که $x \geq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ می‌باشد اما $t \geq 0$ است.

$$\begin{aligned} x' &= x - 1 \\ y' &= y - 1 \\ z' &= z - 1 \end{aligned} \Rightarrow x' + y' + z' + t = 14 \xrightarrow{\text{جواب صحیح و نامنفی}} \binom{17}{3}$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

جمله‌های عبارت (بسط) به صورت $ka^{x_1}b^{x_2}c^{x_3}$ هستند که در همه آن‌ها $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ ، کافی است تعداد جواب‌های صحیح نامنفی این معادله را با شرط $x_1 = 2$ به دست آوریم:

$$2 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{8+2-1}{2-1} = 9$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد اسکناس‌های ۵۰ هزار تومانی که بر هر نفر می‌رسد را x_i ($i = 1, 2, 3$) و تعداد اسکناس ۱۰ هزار تومانی که به هر نفر می‌رسد را y_i ($i = 1, 2, 3$) می‌گیریم، پس کافی است تعداد جواب‌های طبیعی دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 5 \end{cases} \text{ را پیدا کنیم.}$$

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی معادله اول} = \binom{n-1}{k-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$\text{تعداد جواب‌های طبیعی معادله دوم} = \binom{4}{2} = 6$$

به ازای هر جواب معادله اول، جواب معادله دوم قبول است، پس در کل $60 = 6 \times 10$ حالت داریم.



۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. x_4 عدد صحیح و مقسوم علیه ۱۰ می باشد.

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{12}{2} = 66$$

یا

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

یا

$$x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$$

یا

$$x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3$$

و در آخر $96 = 66 + 21 + 6 + 3$ جواب داریم.

دقت کنید معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_4 = n$ ، به تعداد $\binom{n+k-1}{k-1}$ جواب صحیح و نامنفی دارد.

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در بین اعداد ۱ تا ۱۰، ۴ دسته دوتایی وجود دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ باشد و دو عدد ۵ و ۱۰ در هیچ دسته‌ای قرار نمی گیرند، پس این اعداد را می توان به ۶ زیرمجموعه زیر افراز کرد:

$$\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}, \{10\}$$

اگر از هریک از این ۶ مجموعه، یک عدد انتخاب کنیم، آنگاه مجموع هیچ دوتایی از آنها برابر ۱۰ نمی شود. حال چون دو رنگ سیاه و سفید داریم، با انتخاب ۱۲ مهره (۶ مهره سفید و ۶ مهره سیاه) شرط مسئله محقق نمی شود و چنانچه مهره سیزدهم را انتخاب کنیم، حتماً دو مهره هم رنگ با مجموع ۱۰ خواهیم داشت.



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به قضیه جایگشت با تکرار، تعداد کل کلمات شش حرفی که با حروف کلمه

$$|S| = \frac{6!}{2!2!} = 180$$

«بادبان» می‌توان نوشت، برابر است با:

اگر مجموعه حالت‌هایی که دو حرف الف در کنار یکدیگر قرار دارند را با A و مجموعه حالت‌هایی که دو حرف ب

$$|A| = |B| = \frac{5!}{2!} = 60$$

در کنار یکدیگر هستند را با B نمایش دهیم، آنگاه داریم:

$$|A \cap B| = 4! = 24$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 60 + 60 - 24 = 96$$

مجموعه حالت‌هایی که هیچ دو حرف یکسانی کنار هم نباشند، معادل مجموعه $\overline{A \cap B}$ است، بنابراین داریم:

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| = 180 - 96 = 84$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اعداد اول کوچک‌تر از ۵۰ عبارتند از:

$$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$$

این اعداد برحسب باقی‌مانده تقسیم آن‌ها بر ۶، به ۴ گروه تقسیم می‌شوند:

$$A = \{6k+1 | k \in \mathbb{Z}\} = \{7, 13, 19, 31, 37, 43\}$$

$$B = \{6k+2 | k \in \mathbb{Z}\} = \{2\}$$

$$C = \{6k+3 | k \in \mathbb{Z}\} = \{3\}$$

$$D = \{6k+5 | k \in \mathbb{Z}\} = \{5, 11, 17, 23, 29, 41, 47\}$$

در بین اعداد داده شده تنها مجموع یک عدد از مجموعه A و یک عدد از مجموعه D می‌تواند عددی مضرب ۶ باشد.

چون تعداد اعضای مجموعه D بیشتر از A است، در صورت انتخاب تمام اعضای سه مجموعه B ، C و D ، هنوز

هیچ دو عددی وجود ندارد که مجموع آن‌ها مضرب ۶ باشد و لزوماً باید یک عدد نیز از مجموعه A انتخاب کنیم،

$$1 + 1 + 7 + 1 = 10$$

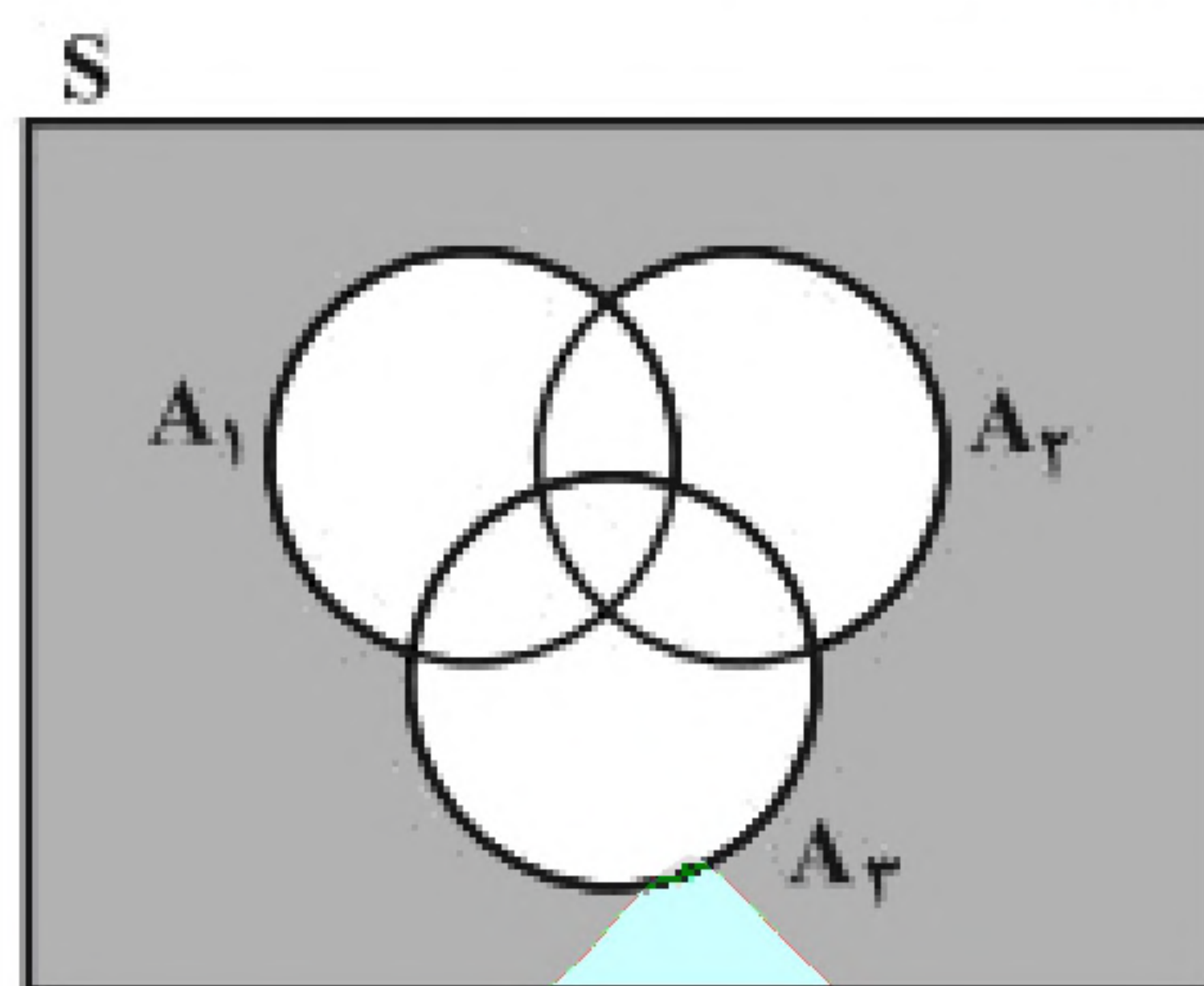
$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$B \quad C \quad D \quad A$$

پس حداقل تعداد اعداد انتخابی برابر است با:



۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به دنبال تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ هستیم، به گونه‌ای که هیچ‌یک از مقادیر x_1 ، x_2 و x_3 برابر ۱ نباشد.



$$A_i = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 7, x_i = 1\}$$

تعداد جواب‌های مطلوب $= |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$

$$|S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = (9, 2) - [(7, 1) + (7, 1) + (7, 1) - 1 - 1 - 1 + 0] = 36 - 18 = 18$$

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم ضرب دو عدد زمانی مضرب ۲۱ است که حداقل یکی از اعداد عامل ۳ و حداقل یکی از اعداد عامل ۷ داشته باشد. ابتدا تعداد مضارب ۷ و مضارب ۳ را محاسبه می‌کنیم.

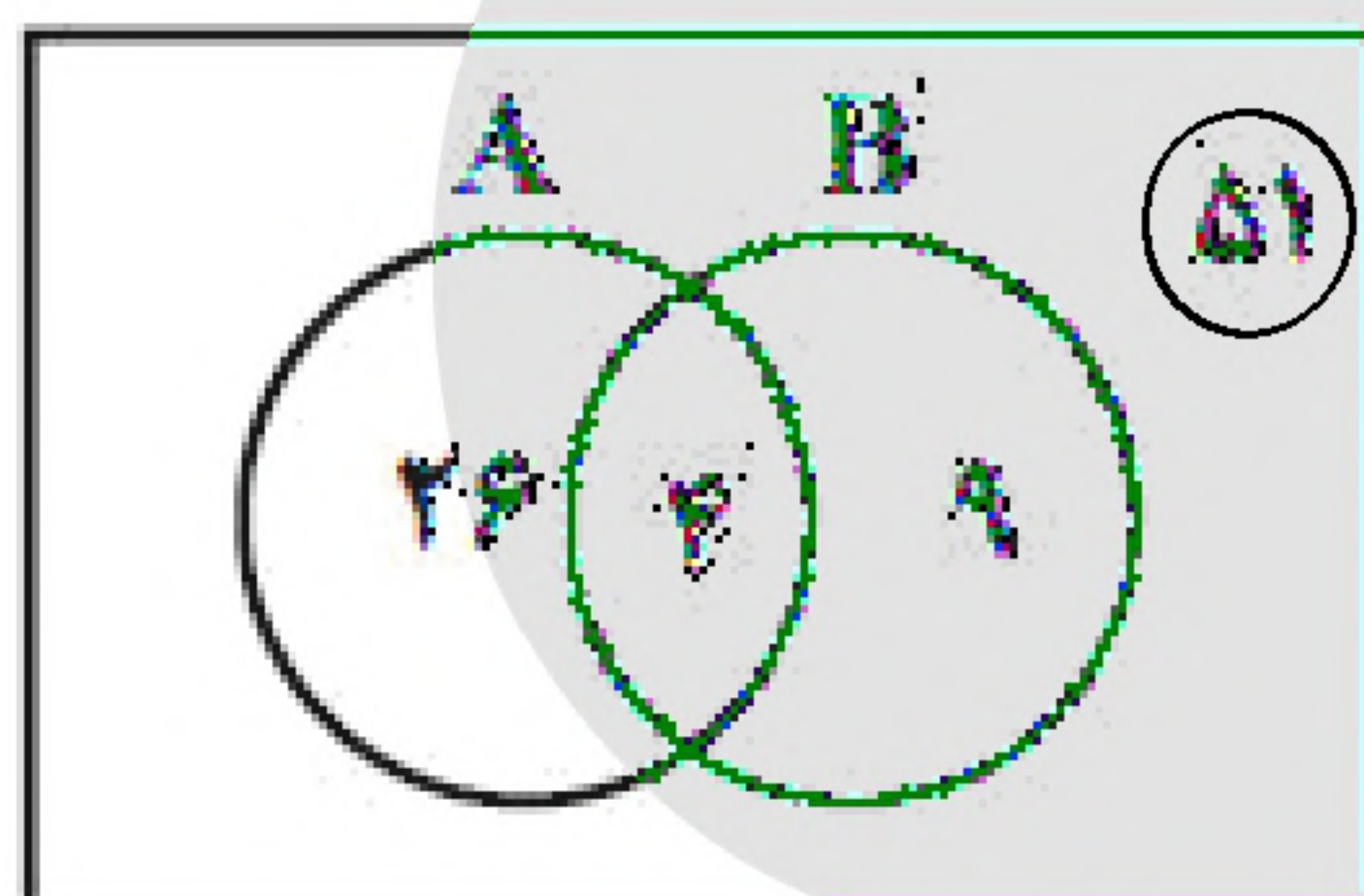
$$\text{تعداد مضارب ۳} = \left\lfloor \frac{99}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{3} \right\rfloor = 30$$

$$\text{تعداد مضارب ۷} = \left\lfloor \frac{99}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{7} \right\rfloor = 13$$

$$\text{تعداد مضارب ۲۱} = \left\lfloor \frac{99}{21} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{9}{21} \right\rfloor = 4$$

A : مضارب ۳

B : مضارب ۷



در بدترین حالت زمانی ۲ توپ خارج می‌شود که حاصل ضرب آن‌ها مضرب ۲۱ باشد که ابتدا ۵۱ عددی را خارج کنیم که هیچکدام عامل ۳ و ۷ ندارند. سپس ۲۶ عددی را خارج کنیم که فقط عامل ۳ دارند و بعد یکی از اعداد باقیمانده خارج کنیم پس حداقل $51 + 26 + 1 = 78$ گوی احتیاج داریم تا به هدف مطلوب برسیم.

۲۴ ۳۰ ۳۶ ۴۲ ۴۸ ۵۴

۹۶ ۹۰ ۸۴ ۷۸ ۷۲ ۶۶

۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جفت‌های برنده عبارتند از:

و تک‌های بازنده ۶۰، ۱۸ و ۱۲ هستند.

پس در بدترین حالت با انتخاب $9 = 3 + 6$ عضو ممکن است به نتیجه نرسیم و در عضو دهم نتیجه می‌گیریم.

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مربع‌های لاتین 3×3 در کل ۱۲ تا هستند که هر مربع با ۶ مربع دیگر متعامد است پس اگر ۷ مربع انتخاب کنیم، حتماً ۲ مربع متعامد داریم.



$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض می‌کنیم $f(1) = 2$ باشد:

الف) پس اعداد ۲، ۳، ۴ و ۵ باید ۳ و ۱ را بپوشانند. دو حالت هستند: (۴ عضوی به ۲ عضوی پوشا: ۱۴ تا)

ب) ۲، ۳، ۴ و ۵ علاوه بر ۳ و ۱، عدد ۲ را هم بپوشانند (۴ عضوی به ۳ عضوی پوشا: ۳۶ تا)

$$2^4 - 2 + 3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 50$$

جواب می‌شود:

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای شمارش تعداد حالات توزیع دفترهای نقاشی چون مشابه هستند از معادله سیاله خطی با ضرائب واحد، استفاده می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$1 \leq x_1$$

$$1 \leq x_2$$

$$1 \leq x_3$$

برای شمارش تعداد حالات توزیع مدارنگی‌ها نیز از تعداد توابع پوشا استفاده می‌کنیم، زیرا مدارنگی‌ها متفاوت هستند:

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 81 - 48 + 3 = 36$$

$$\text{تعداد کل جواب‌ها} = 6 \times 36 = 216$$

بنابراین:

مجموعه گراف‌هایی که در آن‌ها a رأس تنها نباشد: A'

مجموعه گراف‌هایی که در آن‌ها b رأس تنها نباشد: B'

مجموعه گراف‌هایی که در آن‌ها c رأس تنها نباشد: C'

$$|A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

$$= |S| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$$

$$= \binom{5}{2} - 3 \times \binom{4}{2} + 3 \times \binom{3}{2} - \binom{2}{2} = 10 - 18 + 9 - 1 = 0$$

۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مجموعه اعداد ۵ رقمی فاقد ۱۲: A'

مجموعه اعداد ۵ رقمی فاقد ۲۳: B'

$$|A' \cap B'| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 5! - 4! - 4! + 3!$$

$$|A' \cap B'| = 120 - 24 - 24 + 6 = 78$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

توجه داشته باشید در محاسبه $|A \cap B|$ یعنی حالاتی که هم ۱۲ و هم ۲۳ ظاهر می‌شوند اعدادی را شمردیم که در آن‌ها ۱۲۳ ظاهر می‌شود.

۳۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

(فاقد ۲ و ۰ - فاقد ۰ + فاقد ۲) - کل = فاقد ۲ یا ۰ - کل = شامل ۲ و ۰

$$= 9 \times 10^{-2} - (8 \times 9^2 + 9^3 - 8^3) = 900 - (648 + 729 - 512) = 35$$