

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو نفر موردنظر را به صورت یک بسته در نظر می‌گیریم که این دو نفر درون بسته می‌توانند جای خود را با یکدیگر عوض کنند.

$$\frac{2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

تعداد جایگشت‌ها برابر است با: $4! \times 2! = 48$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\binom{8}{3} + \binom{2}{1} \binom{8}{4} = 56 + 2 \times 70 = 196$$

\uparrow \uparrow
 ۲ غذا همزمان نباشد یکی از ۲ غذا باشد

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. از اصل متمم بهره می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 & 2520 = \underline{7} \ \underline{6} \ \underline{5} \ \underline{4} \ \underline{3} : \text{کل حالات} \\
 & 2! \rightarrow x = 2 \text{ نفر را یک بسته بگیریم} \rightarrow \text{غ ق ق} \\
 & \text{روی ۴ صندلی} \Rightarrow 2! \times 360 = 720 \\
 & \xrightarrow{x=6} \underline{6} \ \underline{5} \ \underline{4} \ \underline{3} = 360, \text{ ۵ نفر دیگر} \\
 & \text{جواب نهایی} = 2520 - 720 = 1800 = \text{غ ق ق ق} - \text{کل}
 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{9-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$$

$$x_4 + x_5 = 7 \rightarrow \text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{7-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$$

$$28 \times 6 = 168$$

بنابراین تعداد کل جواب‌های طبیعی، این دستگاه معادلات برابر است با:

۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. اعضای مجموعه را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد:

$$\underbrace{100001}_{\text{عضو ۱}}, \dots, \underbrace{100085}_{\text{عضو ۸۵}}, \underbrace{100101}_{\text{عضو ۸۶}}, \dots, \underbrace{100185}_{\text{عضو ۱۷۰}}, \underbrace{100201}_{\text{عضو ۱۷۱}}, \dots$$

عدد ۱۰۰۰۰ را می‌توان به صورت $55 + 117 \times 85$ نوشت، بنابراین ده هزارمین عضو مجموعه به صورت ۱۱۱۷۵۵ نوشته می‌شود و سن این فرد برابر ۵۵ است.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned}
 k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{k \times n!}{k(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\
 &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \times \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} + \dots + \binom{n-1}{n-1} \right] = n \times 2^{n-1}
 \end{aligned}$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که معادله دارای جواب های صحیح و نامنفی باشد، x_4 باید یکی از مقسوم علیه های مثبت عدد ۱۰ باشد که در نتیجه داریم:

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{12}{2} = 66$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{7}{2} = 21$$

$$x_4 = 5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_4 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{3}{2} = 3$$

$$\text{تعداد کل جواب ها} = 66 + 21 + 6 + 3 = 96$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اولین داده به صورت ۱۰۷۰۱ است و مطابق تعریف ارائه شده داریم:

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{11504} & , & \dots & , & \underline{11501} & , & \dots & , & \underline{10901} & , & \dots & , & \underline{10801} & , & \underline{10712} & , & \dots & , & \underline{10701} \\ \text{عضو ۱۰۰} & & & & \text{عضو ۹۷} & & & & \text{عضو ۲۵} & & & & \text{عضو ۱۳} & & \text{عضو ۱۲} & & & & \text{عضو ۱} \end{array}$$

در واقع $4 + 12 \times 8 = 100$ است، پس ۸ گروه سنی (۷ تا ۱۴ سال) قبل از رسیدن به عضو صدم مجموعه به پایان رسیده و از عضو نود و هفتم گروه سنی ۱۵ سال آغاز می گردد که صدمین عضو مجموعه نیز به این گروه تعلق دارد.



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

فرض کنید کلاس‌ها A و B و C و مدرس‌ها a و b و c باشند. یکی از حالت‌های قابل قبول در مربع لاتین آمده است:

جلسه اول	جلسه دوم	جلسه سوم	
a	b	c	کلاس A
c	b	a	کلاس B
b	a	c	کلاس C

اما به چند طریق می‌توان این مربع را پر کرد. c و b و a در سطر اول به ۳! طریق جایگشت دارند. فرض کنید این جایگشت

a	b	c
---	---	---

 باشد. در این صورت اولین درایه سطر دوم از سمت چپ نمی‌تواند a باشد و دو حالت زیر به وجود می‌آید:

a	b	c
b		

a	b	c
c		

که هر کدام از این مربع‌ها به صورت منحصر به فرد کامل می‌شوند.

a	b	c
c	b	a
c	a	b

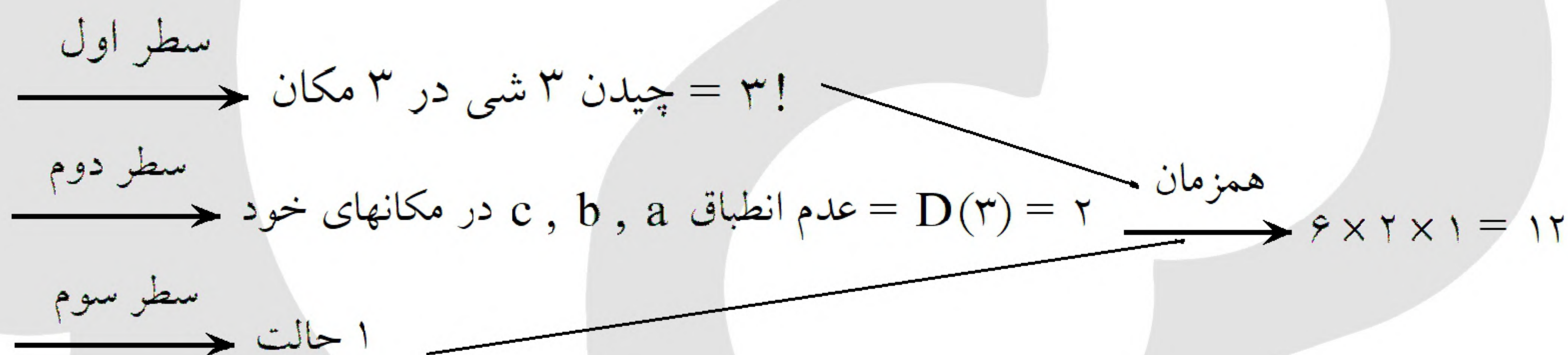
a	b	c
c	b	a
b	a	c

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر است با:
روش دوم:

$$6 \times 2 = 12$$

بطور مثال

a	b	c



توجه: تعداد حالت عدم انطباق n شی در n جای مربوط به خود برابر است با:

$$D(n) = n! \times \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \right]$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد شاخه گل‌هایی که از گل‌های نوع اول تا چهارم برمی‌داریم را به ترتیب X_1 تا X_4 می‌نامیم. با توجه به این که می‌خواهیم ۱۵ شاخه گل انتخاب کنیم. بنابراین $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 15$ ، اما با توجه به این که می‌خواهیم از هر نوع گل دست‌کم ۲ شاخه داشته باشیم، از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} X_1 &= 2 + x_1' \\ X_2 &= 2 + x_2' \\ X_3 &= 2 + x_3' \\ X_4 &= 2 + x_4' \end{aligned} \Rightarrow x_1' + x_2' + x_3' + x_4' = 7$$

می‌دانیم تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$ ،

$$k=4, n=7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{10}{3} = 120 \quad \text{بنابراین:}$$

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$X: \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 11 \\ X_i \geq 1 \end{cases} \xrightarrow{\substack{\text{به هر نفر ۱ توپ می‌دهیم تا حداقل} \\ \text{یکی داشته باشند}}} \rightarrow$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 6 \quad \text{۶ توپ می‌ماند}$$

$$\xrightarrow{\text{تعداد حسابی}} \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4} = 210$$