

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۲ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۴ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۷ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۱۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۱۹ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۱ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۳ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۶ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۲۸ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۲۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۰ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۱ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۲ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۳ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۳۴ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

- | | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ۳۵ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۶ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۷ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۸ - | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| ۳۹ - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
| ۴۰ - | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. به سه حالت می‌توانیم عددهای ۵ رقمی را بنویسیم:

حالت یکم) هیچ‌کدام از رقم‌های صفر در عدد ۵ رقمی موردنظر را به کار نبریم؛ یعنی با رقم‌های ۱، ۳، ۴، ۶، ۹ عددهای ۵ رقمی بنویسیم که شمار آن‌ها برابر $5! = 120$ است.

حالت دوم) چهار رقم از میان ۵ رقم ناصفر انتخاب کنیم و به همراه یکی از رقم‌های صفر، عدد ۵ رقمی را بنویسیم که

۴	۴	۳	۲	۱
---	---	---	---	---

↓

نباید صفر بیاید

حالت سوم) سه رقم از میان ۵ رقم ناصفر را انتخاب کنیم و به همراه هر دو رقم صفر، عدد ۵ رقمی را بنویسیم که

۳	۴	۳	۲	۱
---	---	---	---	---

↓

نباید صفر بیاید

شمار آن‌ها برابر با $4! \times 4 \times \binom{5}{4} = 480$ است.

شمار آن‌ها، بنابر جایگشت‌های با تکرار برابر با $\frac{4! \times 3 \times \binom{5}{3}}{2!} = 360$ است.

جایگشت دو رقم تکراری ۰

پس بنابر اصل جمع، شمار عددهای مطلوب برابر است با $120 + 480 + 360 = 960$.

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. به کمک فرمول جایگشت‌های با تکرار، داریم:

$$O = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3}!}{\cancel{3!} \cancel{3!} \cancel{2!}} = 560$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم تعداد مربع‌های لاتین 3×3 برابر ۱۲ است. همچنین در مربع لاتین 3×3 با جابه‌جایی هر دو سطر (یا ستون) مربع لاتین حاصل با مربع لاتین اولیه متعامد است. بنابراین با سه بار جابه‌جایی سطر و سه بار جابه‌جایی ستون، ۶ مربع لاتین متعامد با مربع اولیه حاصل می‌شود در نتیجه:

تعداد کل مربع‌های لاتین غیر متعامد با مربع لاتین داده شده

$$= \text{تعداد مربع‌های لاتین متعامد با مربع لاتین داده شده} - \text{تعداد کل مربع‌های لاتین } 3 \times 3 \text{ غیر از مربع داده شده} \\ = 11 - 6 = 5$$



۴			
۲			
۱		۳	
۳	۱	۴	۲

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بهتر است در گام نخست، تکلیف ستون اول یا سطر چهارم را روشن کنیم. چون در سطر چهارم و ستون اول عدد ۴ نباید بیاید، پس ناگزیر باید با ۳ پر شود و در نتیجه در سطر چهارم و ستون سوم، عدد ۴ خواهد نشست که به این ترتیب در سطر دوم و ستون اول هم عدد ۲ خواهد آمد (مربع روبه‌رو). بنابراین سطر اول این مربع به یکی از دو صورت آمده در مربع‌های الف یا ب باید کامل شود. حال اگر بنابر تعریف مربع لاتین، بخواهیم بدون تکرار اعداد ۱ تا ۴ در سطرها و ستون‌ها بقیه خانه‌ها را

پر کنیم، ناگزیر به مربع‌های پ و ت که به ترتیب نظیر الف و ب هستند خواهیم رسید که پ یک مربع لاتین است، اما مربع ت را به هر روشی که تلاش کنیم (در ستون سوم، از ت، تنها خانه خالی باید با ۲ پر شود)، نمی‌توانیم بدون تکرار عددها، آن را کامل نماییم. پس روی هم، تنها یک مربع لاتین با ویژگی موردنظر خواهیم داشت.

۴	۳	۲	۱
۲			
۱		۳	
۳	۱	۴	۲

الف

۴	۲	۱	۳
۲			
۱		۳	
۳	۱	۴	۲

ب

۴	۳	۲	۱
۲	۴	۱	۳
۱	۲	۳	۴
۳	۱	۴	۲

پ

۴	۲	۱	۳
۲			
۱		۳	
۳	۱	۴	۲

ت

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد برنامه‌های تدریس برابر تعداد مربع‌های لاتین 3×3 است. در سطر اول $3!$ حالت وجود دارد اما در سطر دوم $2!$ و سطر آخر هم که اجباراً یکتاست:



۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. چون در ستون‌های اول و دوم مربع لاتین نباید عدد تکراری وجود داشته باشد، پس هیچ‌یک از x و y و z و t برابر ۱ نیستند و چون عدد ۱ باید در سطر سوم و چهارم مربع لاتین ظاهر شود، پس عدد ۱ فقط در خانه چهارم سطر سوم و در خانه سوم سطر چهارم می‌تواند قرار گیرد. در نتیجه یکی از x و y برابر ۳ و دیگری برابر ۴ و از طرف دیگر نیز یکی از z و t برابر ۲ و دیگری برابر ۴ است. بنابراین:

$$x + y + z + t = 3 + 4 + 2 + 4 = 13$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مجموع هر سطر یا ستون از یک مربع لاتین 3×3 برابر ۶ و مجموع کل اعداد یک مربع لاتین 3×3 هم ۱۸ است. مطابق شکل اگر عدد موجود در سطر دوم و ستون دوم را x فرض کنیم:

*		*
	x	
*		*

$$12 - x = \text{مجموع اعداد سطر دوم و ستون دوم}$$

$$6 + x = 18 - (12 - x) = \text{مجموع ۴ خانه موردنظر}$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \Rightarrow \text{بیشترین مقدار} = 9 = a \\ x = 1 \Rightarrow \text{کمترین مقدار} = 7 = b \end{array} \right\} \Rightarrow a + b = 16$$



۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد جواب‌های طبیعی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است. با توجه به محدودیت‌های x_3 و x_4 تعداد جواب‌های طبیعی را پیدا می‌کنیم:

$$x_1 + x_2 + \sqrt{x_3} + x_4^2 + x_5 = 10$$

$x_4 = 1$	$x_3 = 1$	$x_1 + x_2 + x_5 = 8 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$	} \Rightarrow جواب ۵۶	
	$x_3 = 4$	$x_1 + x_2 + x_5 = 7 \Rightarrow \binom{6}{2} = 15$		
	$x_3 = 9$	$x_1 + x_2 + x_5 = 6 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10$		
	$x_3 = 16$	$x_1 + x_2 + x_5 = 5 \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$		
	$x_3 = 25$	$x_1 + x_5 = 4 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3$		
	$x_3 = 36$	$x_1 + x_2 + x_5 = 3 \Rightarrow \binom{2}{2} = 1$		
	$x_3 = 49$	جواب طبیعی ندارد $x_1 + x_2 + x_5 = 2$		
	$x_3 = 1$	$x_1 + x_2 + x_5 = 5 \Rightarrow \binom{4}{2} = 6$		} \Rightarrow جواب ۱۰
	$x_3 = 4$	$x_1 + x_2 + x_5 = 4 \Rightarrow \binom{3}{2} = 3$		
$x_3 = 9$	$x_1 + x_2 + x_5 = 3 \Rightarrow \binom{2}{2} = 1$			
$x_3 = 16$	جواب طبیعی ندارد $x_1 + x_2 + x_5 = 2$			

$x_4 = 3 \Rightarrow x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_5 = 0$ جواب طبیعی ندارد

* تعداد کل جواب‌های طبیعی ۶۶ است.



۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جواب مسئله برابر است با تعداد مربع‌های لاتین 3×3 مطابق شکل زیر:

اهواز شیراز اصفهان

شبه	a	b	c
یکشنبه	c	a	b
دوشنبه	b	c	a

a	c	b
b	a	c
c	b	a

a	c	b
c	b	a
b	a	c

a	b	c
b	c	a
c	a	b

۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_4 + x_5 = 4 \end{cases}$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{9}{2} \binom{5}{1} = 36 \times 5 = 180$$

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا مربع لاتین A را کامل می‌کنیم:

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

یک مربع لاتین 3×3 مانند A که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی یکسان هستند، با مربع لاتین هم‌مرتبه خود که درایه‌های واقع بر قطر فرعی آن یکسان باشند، متعامد است. چون درایه‌ی واقع در سطر دوم و ستون سوم مربع B برابر ۲ است، پس درایه‌های روی قطر فرعی این مربع نمی‌توانند برابر ۲ باشند و در نتیجه فقط ۲ حالت زیر برای مربع B امکان‌پذیر است:

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با انتخاب هر ۳ نقطه از ۱۲ نقطه موجود با توجه به شرایط شکل می‌توان مثلث ساخت مگر آن‌که سه نقطه انتخابی در یک راستا (روی یک ضلع) باشند. بنابراین تعداد کل مثلث‌ها برابر است با:

$$\binom{12}{3} - \binom{6}{3} - \binom{5}{3} - \binom{4}{3} = 220 - 20 - 10 - 4 = 186$$



۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به مقادیر ممکن برای x_4 تعداد جواب‌های طبیعی را پیدا می‌کنیم:

$$x_4 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 29 \Rightarrow \binom{29-1}{3-1} = \binom{28}{2} = 378$$

$$x_4 = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 22 \Rightarrow \binom{22-1}{3-1} = \binom{21}{2} = 210$$

$$x_4 = 3 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \binom{3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

بنابراین تعداد جواب‌های طبیعی معادله برابر $378 + 210 + 1 = 589$ است.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اعداد اول یک رقمی عبارتند از: ۲, ۳, ۵, ۷. از روش متمم استفاده می‌کنیم:

$$5040 = 7! = (4+3)! = \text{تمام نام کاربری های ممکن بدون محدودیت}$$

↓ ↓

حروف اعداد

جایگشت ۳ حرف با هم درون کلمه

↑

$$720 = 3! \times 5! = \text{تمام نام کاربری های مختلف که حروف کنار هم هستند}$$

↓

جایگشت ۴ عدد و یک کلمه (مجموعاً ۵ شیء)

$$4320 = 5040 - 720 = \text{تعداد نام کاربری های موردنظر سؤال}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$$

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

با شرط $x_1 \geq 1, x_2 \geq 2, x_3 \geq 3, x_4 \geq 4, x_5 \geq 5$ معادله فوق به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 25 - (1+2+3+4+5)$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10; y_i \geq 0$$

$$\text{تعداد جواب های صحیح و نامنفی} = \binom{10+5-1}{5-1} = \binom{14}{4} = 1001$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با ارقام ۱, ۲, ۳, ..., ۸, ۹ می‌توان با مجاز بودن تکرار ارقام: $9^4 = 6561$ عدد

چهار رقمی نوشت. در عدد ۴ رقمی با شرایط مسئله، رقم موردنظر می‌تواند ۲ یا ۳ یا ۴ بار تکرار شود:

$$\text{الف) } 2 \text{ بار تکرار شود: } \binom{9}{1} \binom{8}{2} \frac{4!}{2!} = 3024$$

x	x	y	z
---	---	---	---

$$\text{ب) } 3 \text{ بار تکرار شود: } \binom{9}{1} \binom{8}{1} \frac{4!}{3!} = 288$$

x	x	x	y
---	---	---	---

$$\text{ج) } 4 \text{ بار تکرار شود: } \binom{9}{1} \binom{8}{1} \frac{4!}{4!} = 9$$

x	x	x	x
---	---	---	---

$$\text{تعداد اعداد ۴ رقمی با شرایط مسئله} = 3024 + 288 + 9 = 3321$$

$$P(A) = \frac{3321}{6561} = \frac{41}{81}$$

↓

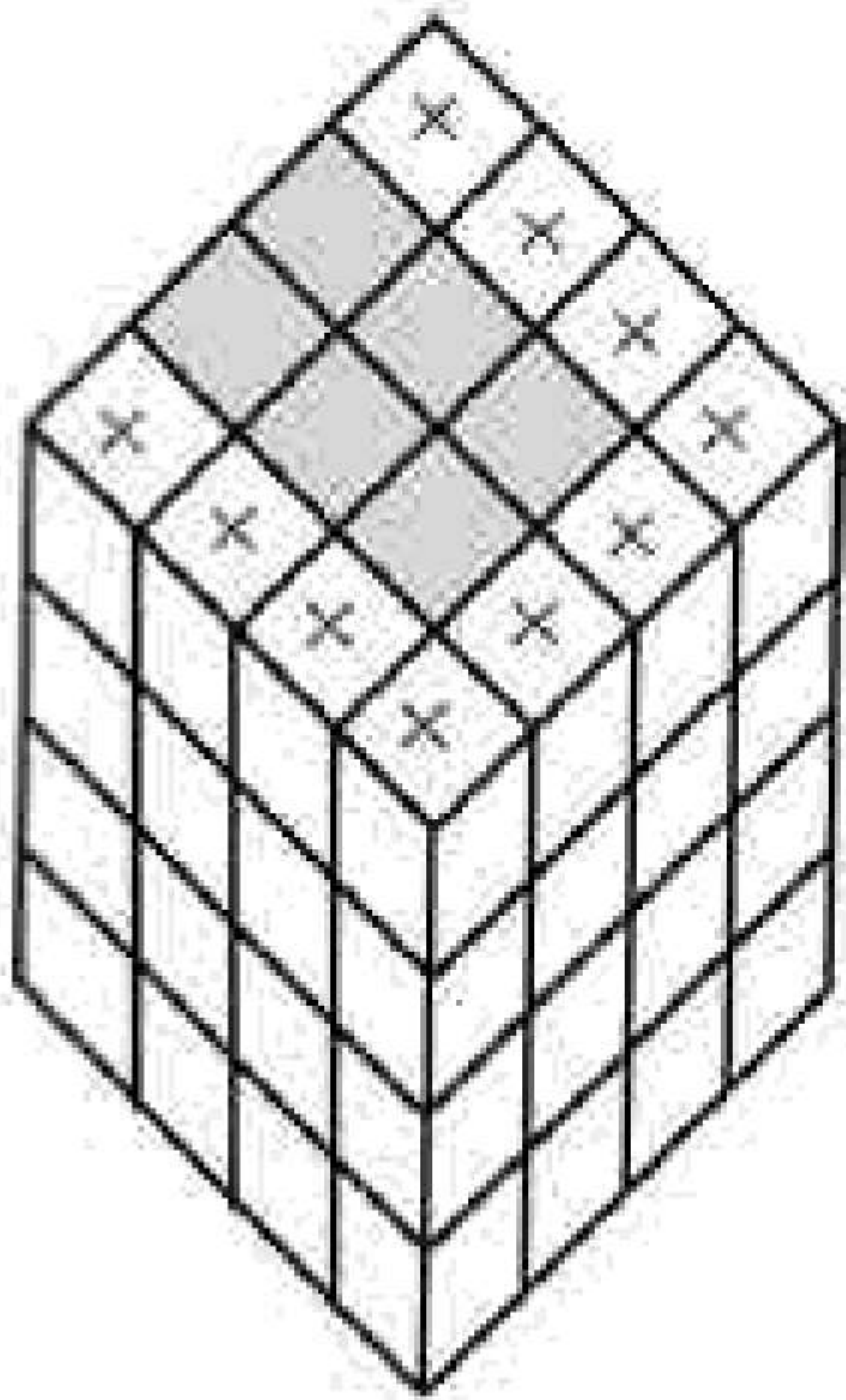
پیشامد مطلوب سوال



۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

= حداقل تعداد مکعب‌های واحد حذفی (شامل حذف مکعب‌های رنگی و تمام مکعب‌های زیر آن)

$$m = 24 = 4 \times 6$$



حداکثر تعداد مکعب‌های حذفی (فقط مکعب‌های مشخص شده با

= را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم)

$$n = 54 = (4 \times 4 \times 4) - 10$$

$$m + n = 24 + 54 = 78$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

حالت اول: علی و محمد در گروه ۴ نفری باشند:

حالت دوم: علی و محمد در گروه ۵ نفری باشند:

$$\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21$$

$$\binom{7}{2} \binom{5}{3} = 35$$

$$P(\text{حضور علی و محمد در گروه ۴ نفری}) = \frac{21}{21 + 35} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. طبق قضیه جایگشت با تکرار:

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} = 15120 = m$$

تعداد چهارها تعداد دوها تعداد یک‌ها

حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض کنید که روی هم دو شیء شده و ۲! جایگشت دارند. از طرف دیگر ۳! حروف و ۴! نیز ارقام در کنار هم به صورت درون شیء، جایگشت دارند:

$$n = 2! \times 3! \times 4! = 288$$

$$m - n = 15120 - 288 = 14832$$

۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. بین هر دو شهر، دو حالت وجود دارد: یا بین این دو شهر جاده‌ای ساخته شده است و یا

جاده‌ای ساخته نشده است، بنابراین S مجموعه‌ی تمام حالت‌های ممکن و A_1 و A_2 به ترتیب حالت‌هایی که A و

B هیچ جاده‌ای نداشته باشند، آنگاه:

$$|S| = \binom{4}{2} = 6$$

$$|A_1| = |A_2| = \binom{3}{2} = 3$$

$$|A_1 \cap A_2| = 2^1 = 2$$

$$|A'_1 \cap A'_2| = |S| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) = 6 - (3 + 3 - 2) = 2$$



۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. باید از پرتاب اول تا هشتم ۲ بار پشت بیاید و در پرتاب نهم هم حتماً پشت بیاید (سومین پشت) پس در پرتاب نهم ۱ حالت و از ۸ پرتاب اول ۲ تا را باید انتخاب کرد.

$$\binom{8}{2} \times 1 = \binom{8}{2}$$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر سه تاس بخواهند به صورت متوالی باشند حالت‌های زیر را داریم:
(۱, ۲, ۳), (۲, ۳, ۴), (۳, ۴, ۵), (۴, ۵, ۶)

هر کدام از این حالت‌ها می‌توانند به ۳! حالت رخ دهند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} n(A) &= 3! \times 4 = 24 \\ n(S) &= 6^3 = 216 \end{aligned} \Rightarrow P(A) = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}$$

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n(S) = 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$$

توجه داشته باشید که عددی که هم مضرب ۲ و هم مضرب ۳ باشد، مضرب ۶ است و چون مجموع ارقام داده شده برابر ۱۲ است پس عدد چهاررقمی ساخته شده در هر صورت مضرب ۳ است فقط باید در ۲ بخش پذیر باشد.

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{3} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{1} & + & \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{1} \times \underline{1} & = & 10 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{صفر قرار بگیرد} & & \text{صفر قرار نگیرد} & & \end{array}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

e a u i o حروف صدادار

p r m t n حروف بی صدا

اگر همه‌ی حروف صدادار را یک کاراکتر در نظر بگیریم، پس با حروف بی صدا ۶ کاراکتر داریم که ۶! جابه‌جایی دارند، خود حروف صدادار نیز ۵! جابه‌جایی دارند پس تعداد کل حالات برابر است با: ۵! ۶!

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$P(n, 2) + \binom{n}{2} = 84 \Rightarrow n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = 84$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} n(n-1) = 84 \Rightarrow n(n-1) = 56 \Rightarrow n = 8$$

$$\Rightarrow \binom{8}{3} = 56$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد کل انتخاب نقطه‌ها} = \binom{17}{3} = 680$$

$$\text{حالت‌هایی که تشکیل مثلث نمی‌دهد} = \binom{7}{3} = 35$$

$$\text{تعداد حالت‌هایی که تشکیل مثلث می‌دهند} = \binom{17}{3} - \binom{7}{3} = 680 - 35 = 645$$



«بانک سوال یاوران دانش»

۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\binom{n}{3} = \binom{n}{7} \Rightarrow n = 10 \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی} = \binom{10}{4} = 210$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا باید ۳ استان از ۴ استان انتخاب کرد و سپس از هر کدام ۱ نفر انتخاب کرد.

$$\binom{4}{3} \binom{1}{1} \binom{1}{1} \binom{1}{1} = 4000$$

۲۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد کل حالات} = \binom{12}{3}$$

$$\text{حالت‌هایی که گروه بدون پزشک است} = \binom{9}{3}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد حالت‌هایی که حداقل ۱ پزشک حضور داشته باشد} = \binom{12}{3} - \binom{9}{3} = 220 - 84 = 136$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای شخص a تنها ۱ حالت میسر است برای b، ۳ حالت و برای بقیه ۵! حالت امکان‌پذیر است پس در مجموع تعداد کل حالات برابر است با:

$$3 \times 5!$$

	۷
	۶
	۵
a	۴
	۳
	۲
	۱

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. دقت شود که عبارت «پیرا» یک حرف محسوب می‌شود و با حروف گل، ۳ حرف محسوب می‌شود که در نهایت ۳! جابه‌جایی دارند.

۳۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{هر سؤال ۵ حالت دارد و طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر } 5^{10} = 5 \times 5 \times \dots \times 5$$



۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دقت شود که حرف ی باید نقطه‌دار محسوب شود زیرا در غیر این صورت ۵ حرف بدون نقطه و ۳ حرف نقطه‌دار نمی‌توانند یک در میان باشند، از طرفی برای این منظور حرف نمی‌تواند حرف آخر (سمت چپ) باشد. برای یک در میان شدن ۲ حالت میسر است که یا با حرف نقطه‌دار آغاز کنیم یا با حرف بدون نقطه. وقتی با حرف نقطه‌دار شروع کنیم حرف (ی) نمی‌تواند چپ‌ترین حرف باشد. اما در حالت دوم دقت کنیم که برای حرف (ی) ۳ حالت میسر است.

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(۱) با نقطه‌دار شروع کنیم.

ی نباشد
۳ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

(۲) با بدون نقطه شروع کنیم.

نقطه‌دار باشد بدون نقطه

$$۴! \times ۳! + ۴! \times ۳ \times ۳! = ۴! (۳! + ۳ \times ۳!) = ۴! (۳! (۴ + ۳)) = ۷ \times ۴! \times ۳!$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. از بین همه‌ی کلمه‌هایی که با حروف a, b و c می‌توان ساخت فقط کلمه‌های bbb, ccc امکان‌پذیر نیست. پس داریم:

$$۳^۳ - ۲ = ۲۷ - ۲ = ۲۵$$

۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای ساختن عدد مورد نظر دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:
حالت اول: رقم یکان عدد ۲ باشد:

$$\frac{۷!}{۳!} = ۸۴۰$$

حالت دوم: رقم یکان عدد ۸ باشد.

$$\frac{۷!}{۲! \times ۲!} = ۱۲۶۰$$

$$۲۱۰۰ = \text{کل حالت‌ها}$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. چون حق انتخاب مورد نظر است پس $\binom{۱۵}{۵}$.

۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای رسیدن به خواسته‌ی مسئله باید ارقام زوج ۲ و ۶ در یکی از موقعیت‌های (۱, ۴)، (۲, ۵)، (۳, ۶) و یا (۴, ۷) قرار بگیرند، پس ۴ حالت وجود دارد و همچنین ارقام زوج ۲ و ۶ خود ۲! جایگشت دارند. حال باید جایگشت ارقام ۷, ۳, ۳, ۳, ۱ را محاسبه کنیم. پس داریم:

$$۴ \times ۲ \times \frac{۵!}{۳!} = ۱۶۰$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷



«بانک سوال یاوران دانش»

۳۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر سفرهای با مترو را با M و اتوبوس را با B و تاکسی را با T نشان دهیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های کلمه‌ی BBMMMT پاسخ مسأله است:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

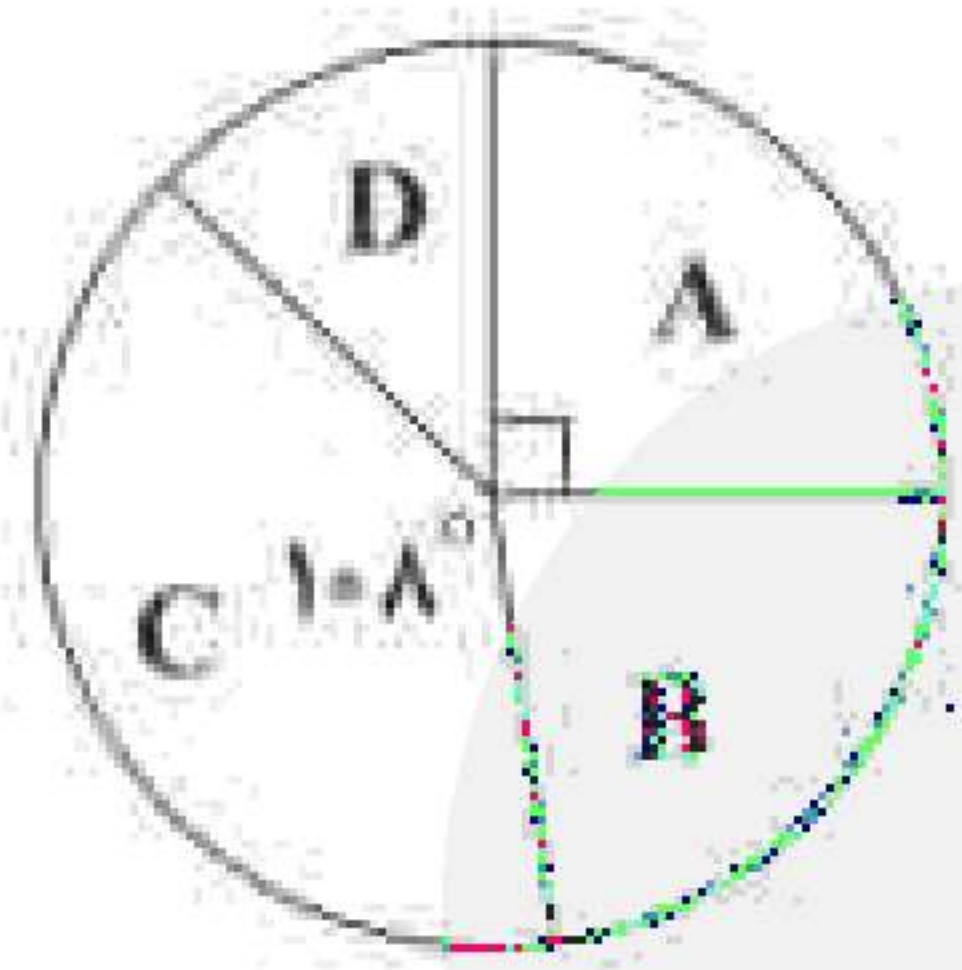
۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حالت‌های زیر امکان‌پذیر است:

DMDMD , DMDDM , MDDMD

جایگشت‌های دانش‌آموزان در جای خود ۳! و معلمان ۲! است، پس داریم:

$$3 \times 3! \times 2! = 36$$

۴۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر مقاطع تحصیلی فوق دیپلم، لیسانس، فوق لیسانس و دکترا را به ترتیب با A، B و C و D نشان دهیم، خواهیم داشت:



$$\hat{B} + \hat{D} = 360^\circ - (90^\circ + 108^\circ) = 360^\circ - 198^\circ = 162^\circ$$

از طرفی مجموع دانشجویان در مقطع لیسانس (B) و دکترا (D) برابر ۹۰ نفر است. پس:

$$\frac{90}{n} = \frac{162^\circ}{360^\circ} \Rightarrow n = \frac{90 \times 360}{162} = 200$$

تعداد کل دانشجویان:

$$\frac{108^\circ}{360^\circ} = \frac{x}{200} \Rightarrow x = \frac{108 \times 200}{360} = 60$$

و تعداد دانشجویان مقطع فوق لیسانس (C) برابر است با: