

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



۱	۲	۳	۴
۱ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گرافی که تمام رئوس آن مجاور هستند، گراف K_p می‌باشد.

$$g(K_p) = \binom{p}{2}, \delta = \Delta = p - 1$$

پس داریم:

$$2(p + \delta) = q + 2 \Rightarrow 2(p + p - 1) = \binom{p}{2} + 2$$

$$4p - 2 = \frac{p(p-1)}{2} + 2 \Rightarrow p^2 - 9p + 8 = 0 \Rightarrow p = 8 \text{ یا } p = 1$$

چون G ناتهی است، پس $p \neq 1$ است و $\Delta = p - 1 = 7$ می‌باشد.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شمردن تعداد ریخت‌های گراف مکمل ساده‌تر است، پس آن‌ها را می‌شماریم:

$$q(\overline{G}) = \binom{p}{2} - q(G) = \binom{5}{2} - 7 = 3$$

بنابراین گراف‌های دارای ۵ رأس و ۳ یال را رسم می‌کنیم.



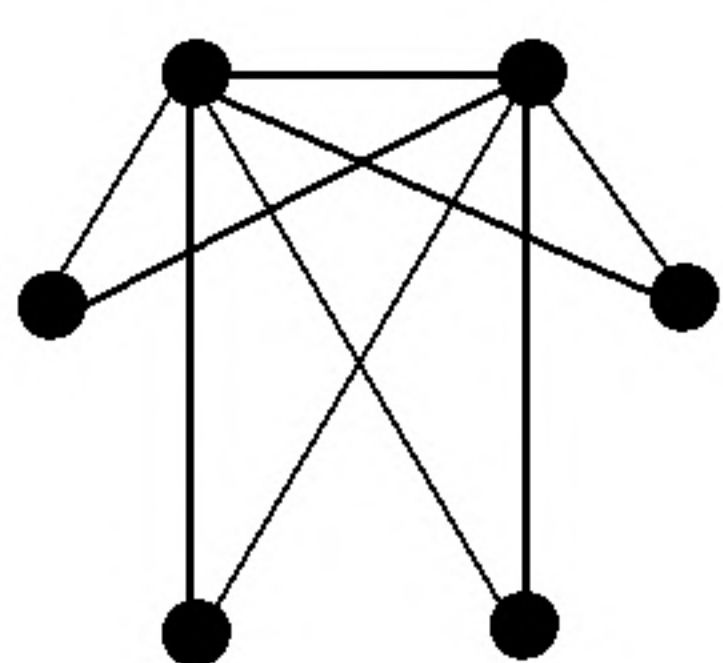
۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در گراف مرتبه‌ی $p = 6$ ، $\Delta \leq 5$ است. پس باید ۴۰۰ را به حاصل ضرب ۶ عدد طبیعی که حداکثر ۵ هستند تجزیه کنیم.

حالت اول: دنباله‌ی درجات ۱، ۲، ۲، ۴، ۵ و ۵ باشد. چون تعداد رئوس فرد، فرد است. گراف قابل رسم نیست.

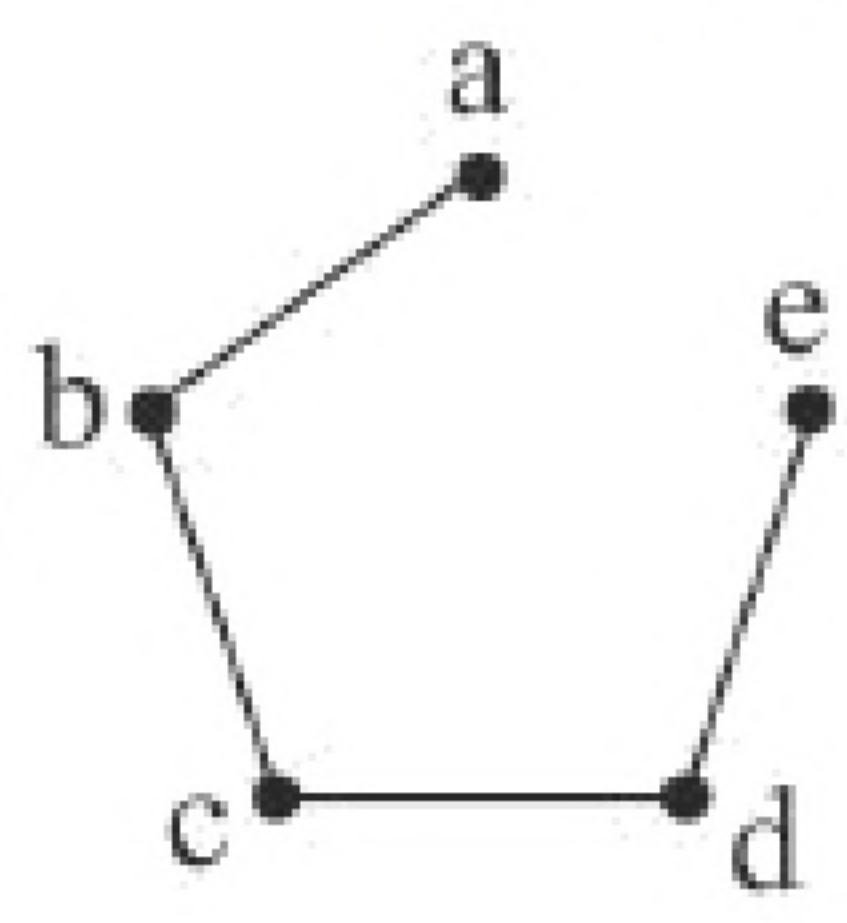
حالت دوم: دنباله‌ی درجات ۱، ۱، ۴، ۴، ۵ و ۵ باشد. در این حالت چون دو رأس درجه‌ی ۵ داریم، پس دو رأس به تمام رئوس وصل هستند و $\delta = 1$ امکان‌پذیر نیست.

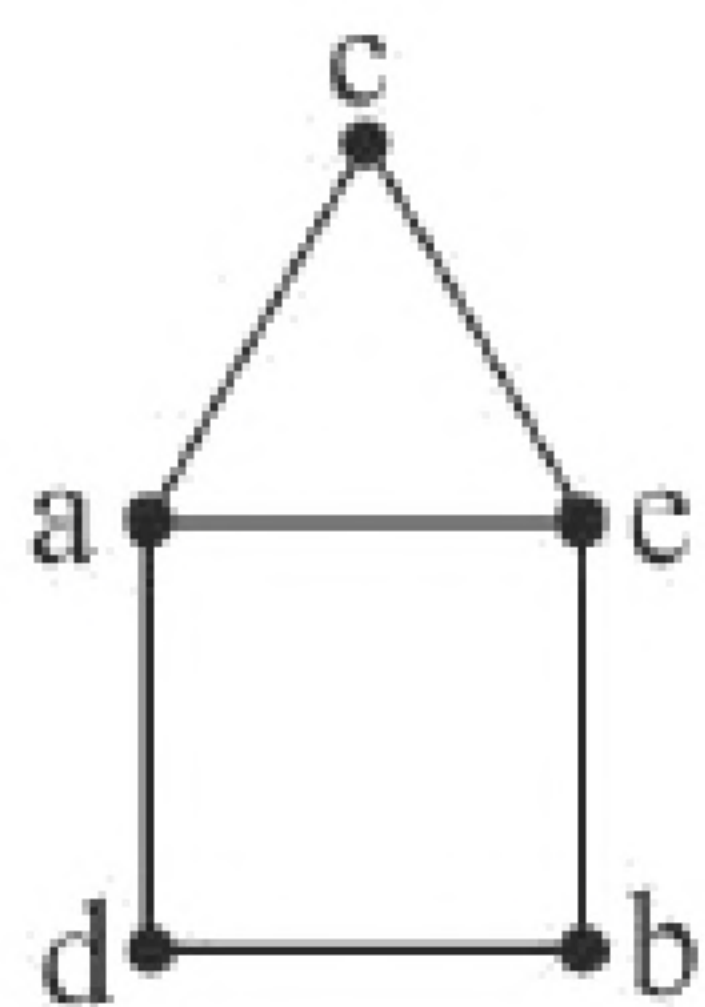
حالت سوم: دنباله‌ی درجات ۲، ۲، ۲، ۲، ۵ و ۵ که گراف به شکل مقابل قابل رسم است و $q = 9$ می‌باشد.



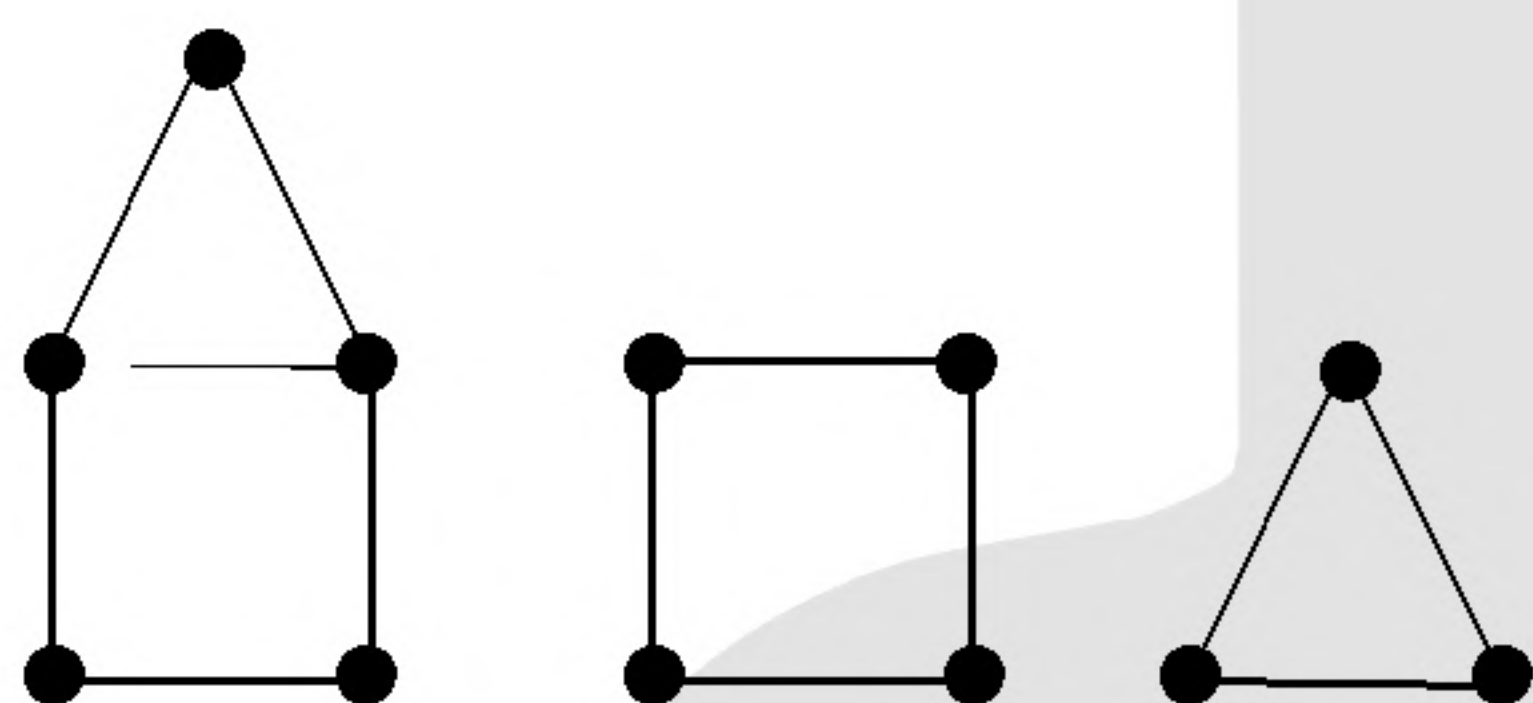


۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

فرض کنید P_5 به فرم  باشد. مکمل آن به شکل زیر می باشد:

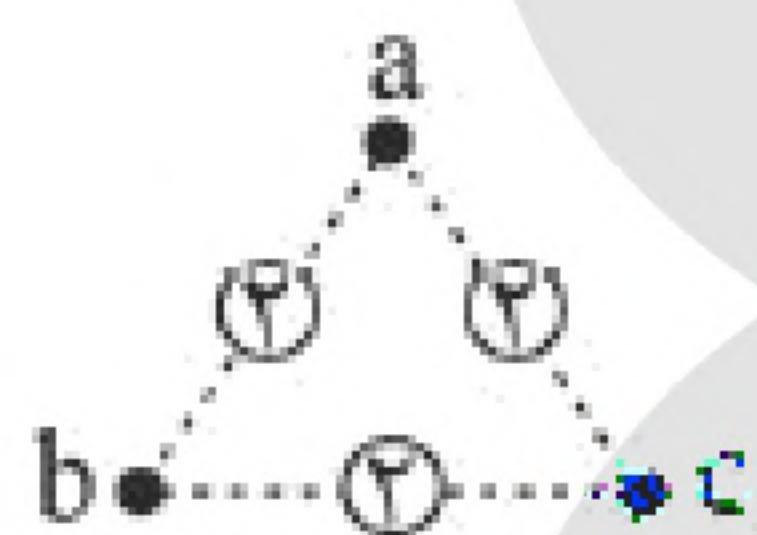


که شامل ۳ دور به شکل زیر می باشد:



۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر ۳ رأس انتخاب شده a, b و c باشند، آنگاه ۸ زیر گراف ساخته می شود.



$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

اگر یکی از رأس های انتخاب شده، e باشد، آنگاه ۶ زیر گراف ساخته می شود. مثلاً حالت انتخاب e, a و b را در نظر بگیرید:



۲ = تعداد زیرگراف ها

e

همین شرایط برای وقتی که غیر از e, a و c انتخاب شوند یا غیر از e, b و c انتخاب شوند، نیز برقرار است. بنابراین:

$$\text{تعداد کل زیرگراف ها} = 2^3 + 3 \times 2^1 = 8 + 6 = 14$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض کنید مرتبه ی گراف G ، p باشد. چون G ، ۳- منتظم است، پس مکمل آن $p-4$ منتظم است. در گراف r - منتظم

رابطه ی $q = \frac{rp}{2}$ برقرار است. پس داریم:

$$q = 48 = \frac{p(p-4)}{2} \Rightarrow p^2 - 4p - 96 = 0 \Rightarrow (p-12)(p+8) = 0 \Rightarrow p = 12$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
چون $N(a) = N(b)$ ، پس رئوسی که به a وصل هستند به b هم وصل هستند، پس $\deg(a) = \deg(b)$ درست است.
می‌دانیم اگر $N(a) = N(b)$ باشد، a و b مجاور نمی‌باشند چون در غیر این صورت $a \in N(a)$ که امکان‌پذیر نمی‌باشد، پس گزینه (۴) هم درست است.
با توجه به مطالب قبل چون $ab \notin E$ ، تساوی $N_G[a] = N_G[b]$ برقرار نیست، چون $a \in N_G[a]$ می‌باشد، پس $a \in N_G[b]$ برقرار است و در نتیجه باید $ab \in E$ باشد که امکان‌پذیر نیست.
و در آخر چون $ab \notin E$ ، پس در گراف \bar{G} ، a و b مجاورند و با توجه به این که $N_G(a) = N_G(b)$ برقرار است، تساوی $N_{\bar{G}}[a] = N_{\bar{G}}[b]$ برقرار است.

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.
همه رأس‌ها باید در زیر گراف مرتبه ۵ حضور داشته باشند، اما هر کدام از یال‌ها می‌توانند باشند یا نباشند، پس 2^4 زیر گراف مرتبه ۵ وجود دارد.



۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گراف r منتظم دارای $q = \frac{rp}{2}$ یال است. گراف $(p-1)$ منتظم، یک گراف کامل از مرتبه p است.

$$\binom{p}{2} - 22 = \frac{(p-5)p}{2}$$

$$\frac{p(p-1)}{2} - 22 = \frac{(p-5)p}{2} \Rightarrow p^2 - p - 44 = p^2 - 5p \Rightarrow 4p = 44 \Rightarrow p = 11$$

تعداد یال‌های گراف کامل مرتبه ۱۲:

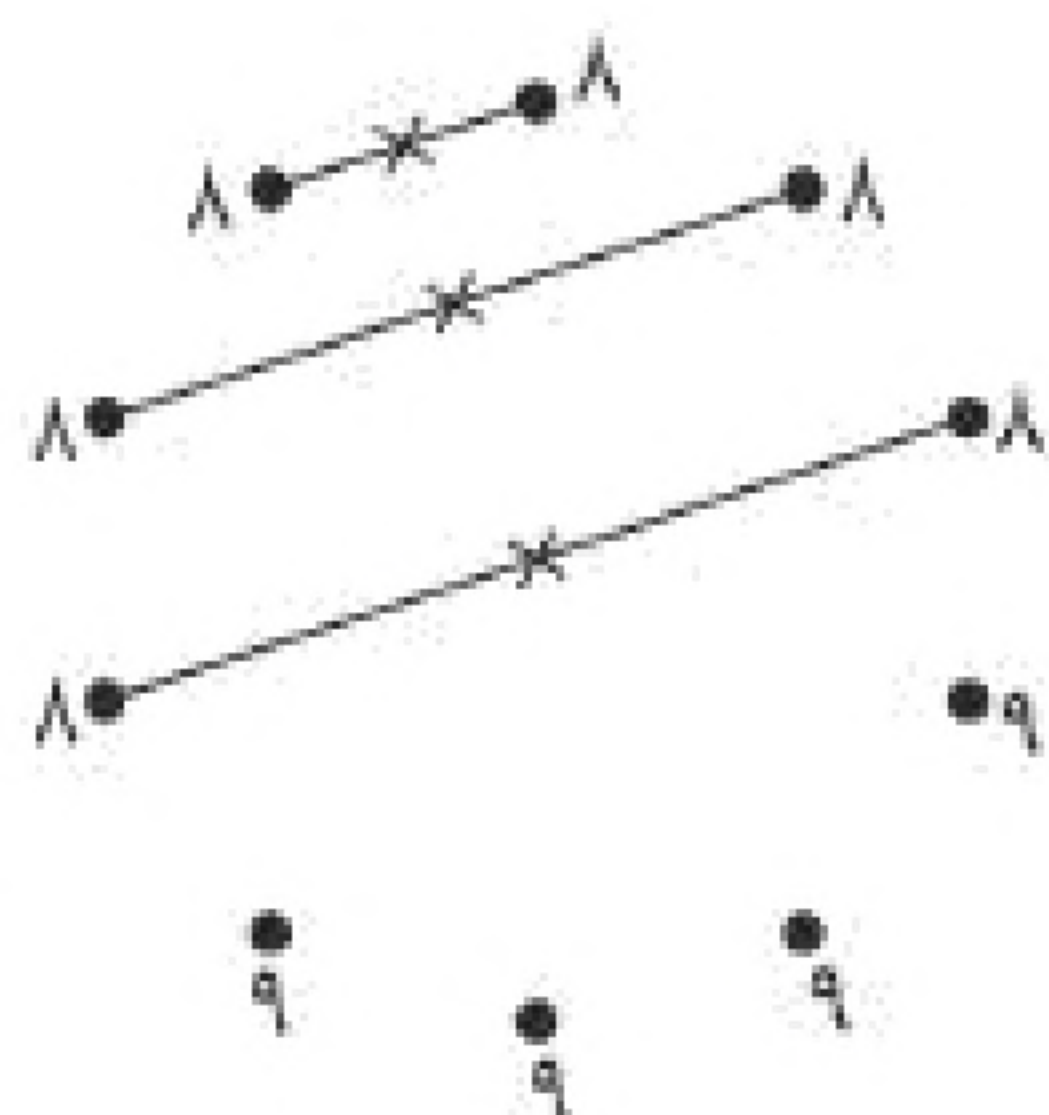
$$\binom{12}{2} = 66$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

تنها رأس‌های تنهای f و g هستند که در هیچ همسایگی بازی حضور ندارند، پس در اجتماع همسایگی‌های باز حضور ندارند. سایر رأس‌ها اقلًا در همسایگی باز یک رأس حضور دارند، پس در اجتماع همسایگی‌های باز حضور خواهند داشت.

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

این گراف ۳ یال از گراف K_4 کم‌تر دارد. این یال‌ها باید طوری از گراف کامل حذف شوند که درجه رأس‌ها حداکثر یک واحد کاهش پیدا کند، بنابراین ۳ یال دوبه‌دو غیرمجاور را از گراف K_4 حذف می‌کنیم. درجات رئوس این گراف در شکل زیر مشخص شده است.



همان‌طور که دیده می‌شود گراف ما دارای ۴ رأس Δ و ۶ رأس δ است.



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

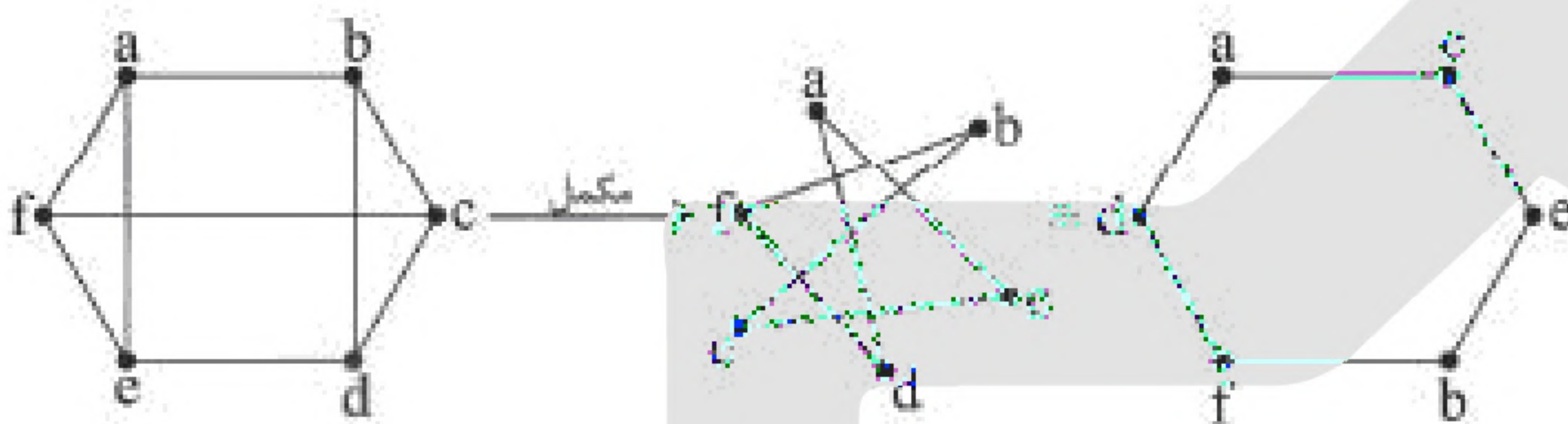
$$p + q = 120 \Rightarrow p + \binom{p}{2} = 120 \Rightarrow \binom{p+1}{2} = 120 = \binom{16}{2}$$

$$\Rightarrow p + 1 = 16 \Rightarrow p = 15$$

بنابراین:

$$q - p = \binom{15}{2} - 15 = 105 - 15 = 90$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

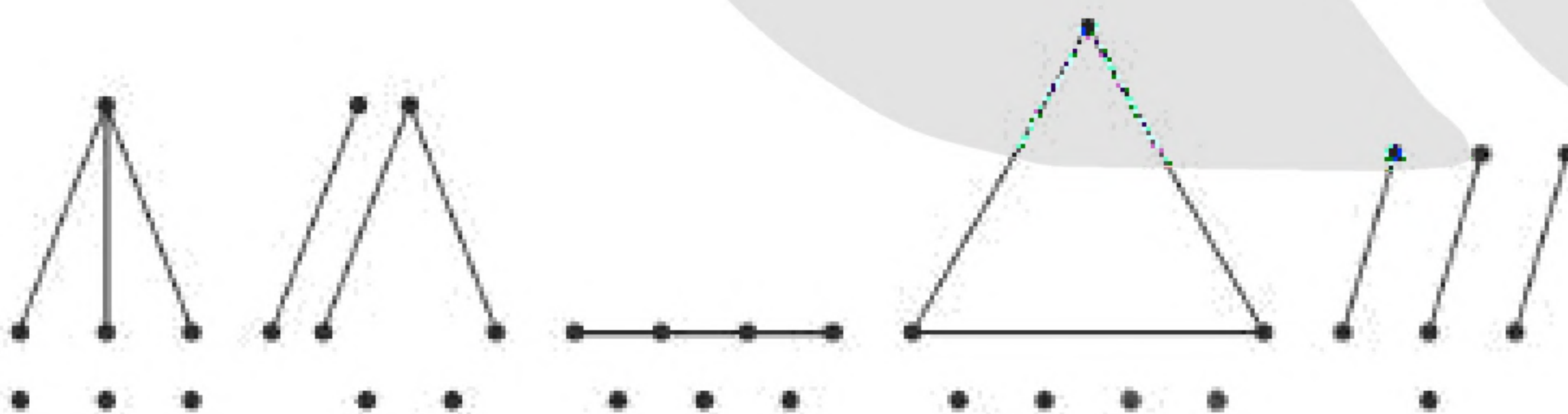
بزرگ‌ترین اندازه را گراف زیر با دنباله درجات داده شده دارد:

$$6, 6, 6, 6, 6, 6, 5, 3$$

$$\sum \deg(V_i) = 2q \Rightarrow 6 \times 6 + 5 + 3 = 2q \Rightarrow q = 22$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

این گراف می‌تواند به ۵ حالت زیر رسم شود که رئوس تنها، به تعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ در آن‌ها وجود خواهد داشت، پس n ، ۴ مقدار دارد.



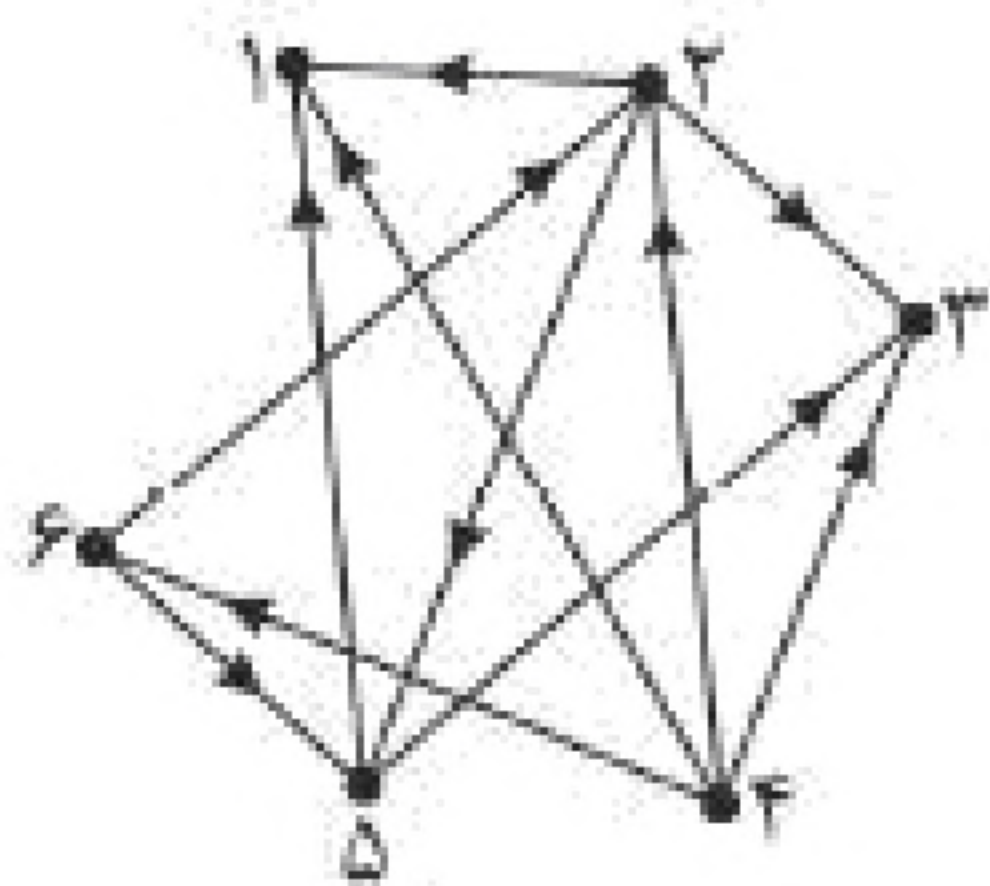
۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گراف گزینه (۲)، یال ae را ندارد. گراف گزینه (۳)، یال fd را ندارد. گراف گزینه (۴)، یال cd را ندارد.

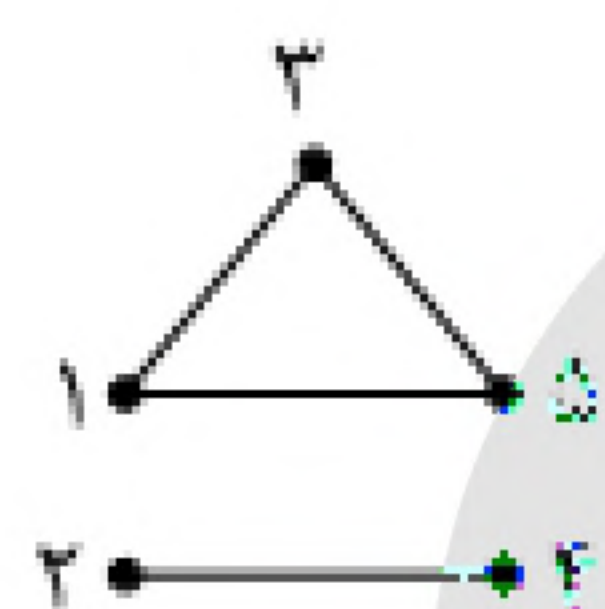


۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

گراف جهت‌دار متناظر با بازی‌های انجام شده را رسم می‌کنیم تا به سؤال‌ها راحت جواب دهیم. متناظر با هر تیم یک رأس و متناظر با هر بازی یک یال جهت‌دار از تیم برنده به تیم بازنده رسم می‌کنیم.



همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، گراف تنها ۲ رأس از درجه ۴ دارد، بنابراین گزینه (۴) نادرست است.



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در گراف G دو رأس مجاور هستند، اگر و تنها اگر $i + j$ فرد باشد، پس در \bar{G} دو رأس مجاور هستند، اگر و تنها اگر $i + j$ زوج باشد. پس نمودار \bar{G} به شکل روبه‌رو می‌باشد.



۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. نکته: $q(G) + q(\bar{G}) = q(K_p) = \binom{p}{2}$

با توجه به نکته‌ی فوق برای آنکه تعداد یال‌های گراف G حداکثر شود، لازم است گراف \bar{G} کم‌ترین تعداد یال را داشته باشد.

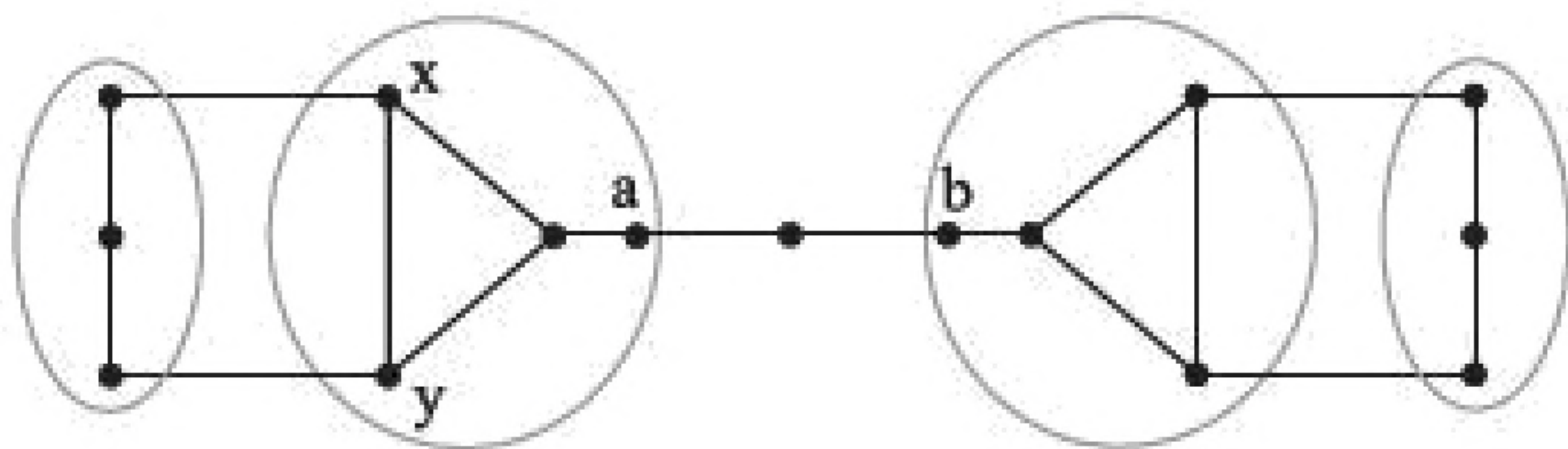
با توجه به حالت مقابل، حداقل تعداد یال‌های گراف \bar{G} برابر ۳ است.

$$q(G) = q(K_{10}) - q(\bar{G}) = \binom{10}{2} - 3 = \frac{10 \times 9}{2} - 3 = 45 - 3 = 42$$

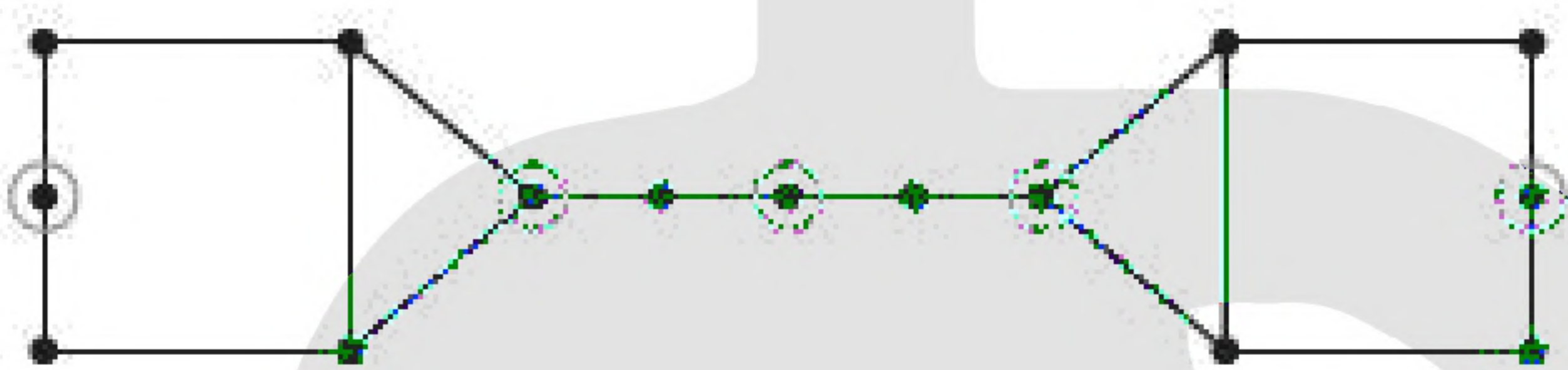


۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

ابتدا $y \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{15}{3+1} \right\rceil = 4$ پس حداقل ۴ رأس نیاز داریم:

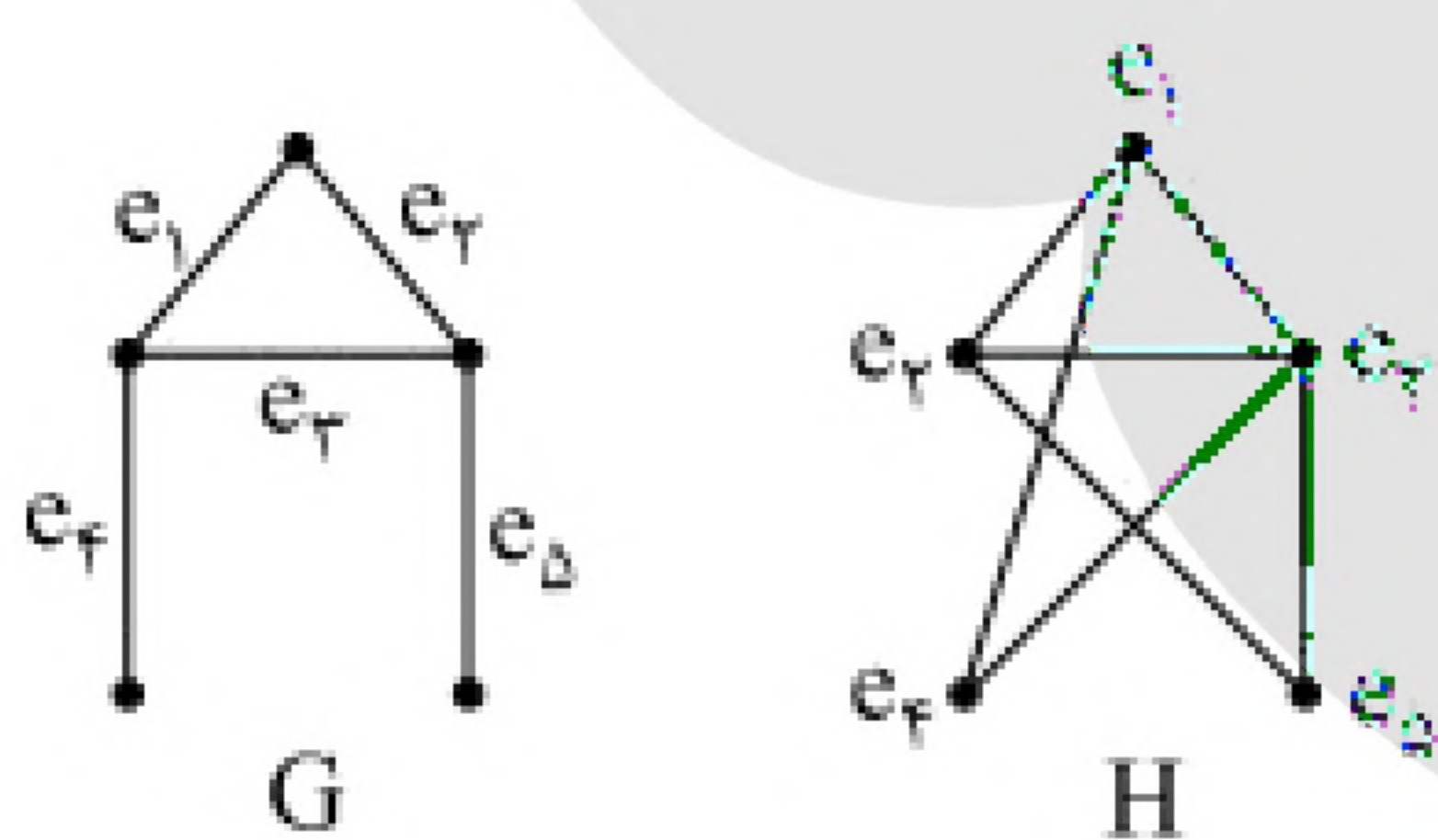


اما دقت کنید از هر کدام از رأس‌های درون دایره باید یک رأس انتخاب کنیم (چون در هر قسمت رأسی وجود ندارد که به همه رأس‌های درون دایره وصل باشد)، رأس a نیز نمی‌تواند به تنهایی انتخاب شود (چون در این صورت x, y باید توسط دو رأس از دایره کناری احاطه شود نه یکی) پس با چهار رأس نیز گراف احاطه نمی‌شود اما با ۵ رأس مقابل رأس‌های کل گراف احاطه می‌شود، بنابراین $\gamma(G) = 5$ می‌باشد و در گراف C_n و P_n ، γ از $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ محاسبه می‌شود، در نتیجه $\gamma(P_{13}) = 5$ است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. دو یال زمانی مجاور هستند که در یک رأس مشترک باشند. رئوس گراف H را متناظر با یال‌های G اسم‌گذاری می‌کنیم. در گراف G یال e_1 با e_2 و e_3 و e_4 مجاور است. پس در H ، e_1 را به آن‌ها وصل می‌کنیم و به همین ترتیب بقیه H را رسم می‌کنیم. در گراف G $p=5$ ، $q=7$ ، $\Delta=4$ ، $\delta=2$. پس:



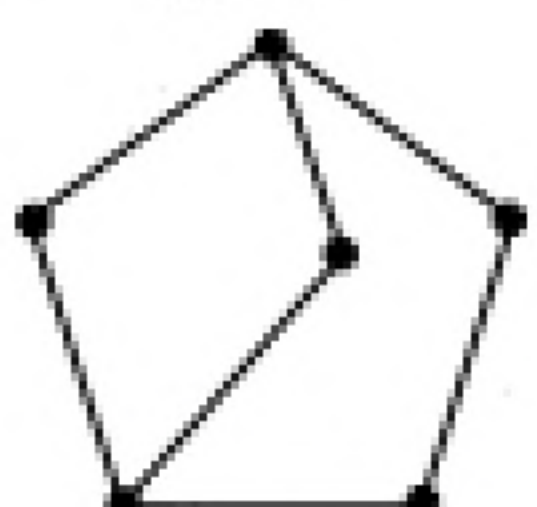
$$p + q + \Delta + \delta = 18$$

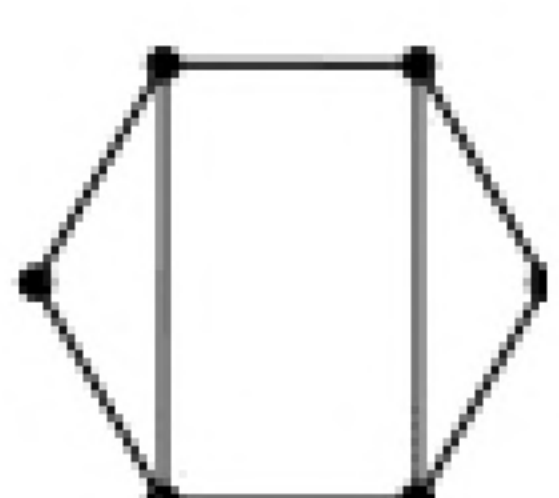


۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم $1 \leq \Delta \leq p$ و $\delta \leq \Delta$ است.

$$\delta \Delta = 6 \Rightarrow \delta = 2, \Delta = 3$$

پس درجه‌ی رئوس گراف فقط ۲ و ۳ می‌باشد. چون تعداد رئوس درجه‌ی فرد، زوج است پس ۲ حالت داریم:

$$3, 3, 2, 2, 2, 2 \Rightarrow \Rightarrow q = 7$$


$$3, 3, 3, 3, 2, 2 \Rightarrow \Rightarrow q = 8$$


۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در گراف r -منتظم $0 \leq r \leq p-1$ است و p و r نمی‌توانند هر دو هم‌زمان فرد باشند. پس مقادیر p و r به فرم زیر هستند. دقت کنید $\delta = \Delta = r$ و $2q = rp$ است.

$$1) p = 10, r = 0 \xrightarrow{2q = rp} q = 0 \Rightarrow q + \Delta = 0$$

$$2) p = 8, r = 2 \xrightarrow{2q = rp} q = 8 \Rightarrow q + \Delta = 10$$

$$3) p = 6, r = 4 \xrightarrow{2q = rp} q = 12 \Rightarrow q + \Delta = 16$$

۲۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در گراف G از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q ، تعداد زیرگراف‌های از مرتبه‌ی p از فرمول 2^q به دست می‌آید.

$$4^7 = 2^q \Rightarrow 2^q = 2^{14} \Rightarrow q = 14, p = 6$$

دقت کنید چون K_6 ، ۱۵ یال دارد، پس گراف G همان K_6 است که یک یال آن حذف شده است.

$$\Rightarrow \Delta = 5, \delta = 4 \Rightarrow \Delta + \delta = 9$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. مسیر $e = e_1 e_2 e_3 e_4$ به طول ۳، ۴ رأس دارد. مسیرهای از d به e با e به d فرقی ندارد.



۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

جهت حرکت مسیر مهم نیست مثلاً در $a \xrightarrow{b} c$ مسیر abc با cba تفاوتی نمی‌کند. ۶ رأس به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

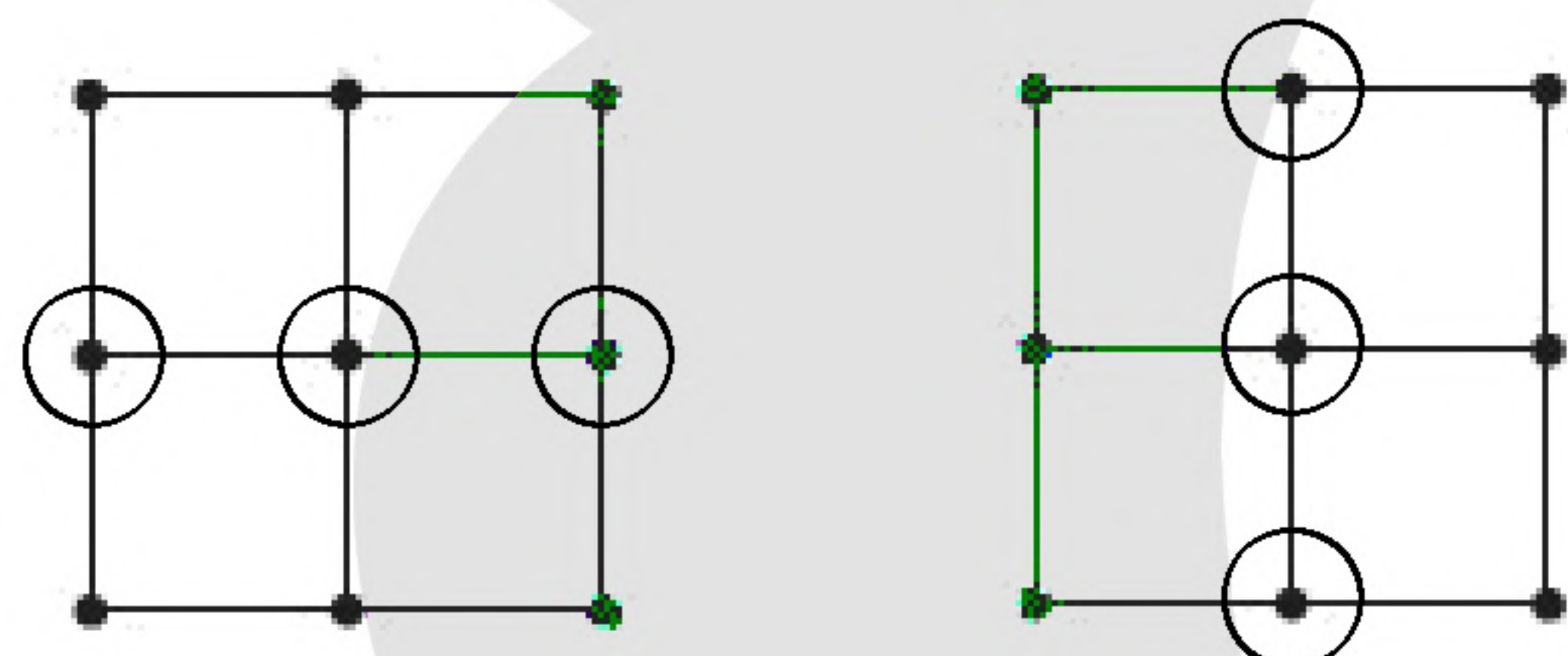
$$\left. \begin{array}{l} \frac{c}{4} \frac{d}{3} \frac{4}{2} \frac{3}{1} = 24 \\ \frac{4}{4} \frac{c}{3} \frac{d}{2} \frac{3}{1} = 24 \\ \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{c}{2} \frac{d}{1} = 24 \\ \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{c}{1} \frac{d}{1} = 24 \\ \frac{4}{4} \frac{3}{3} \frac{2}{2} \frac{1}{1} \frac{c}{1} \frac{d}{1} = 24 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} 120$$

فرض می‌کنیم مسیرها به گونه‌ای طول شود که جهت یال از c به d پیموده شود. حالت‌های مقابل ممکن است به وجود بیاید. از ۶ رأس، ۲ رأس باقی می‌ماند که با آن‌ها می‌توانیم بقیه خانه‌ها را پر کنیم، بنابراین تعداد مسیرها برابر است با:
 $5 \times 24 = 120$

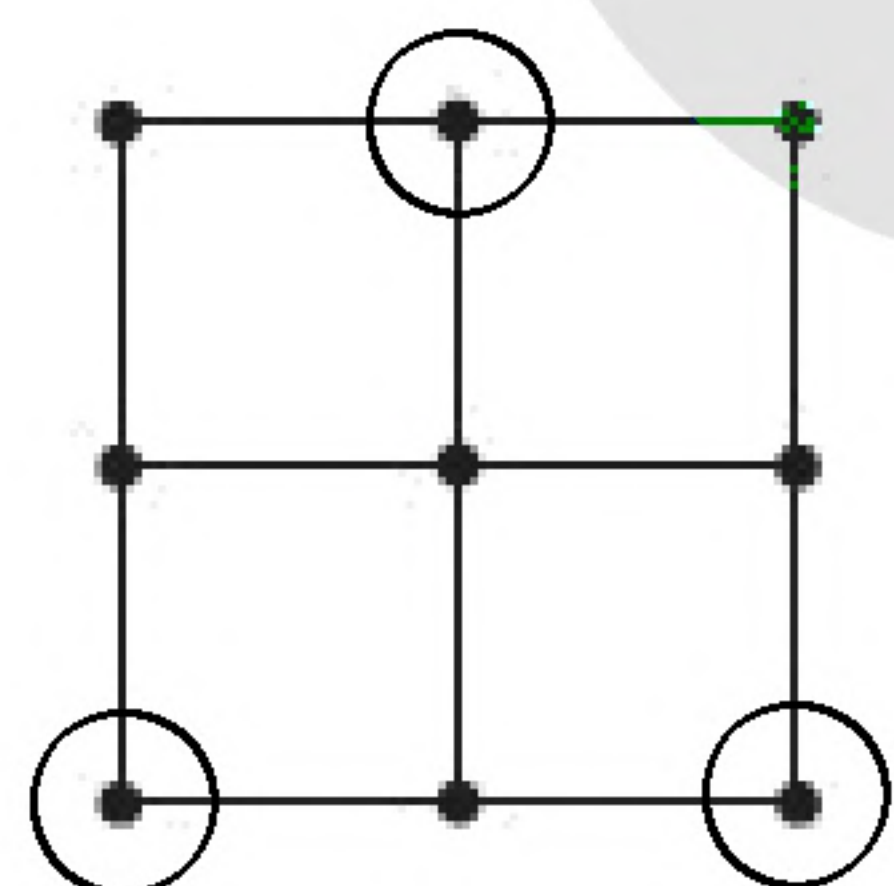
تذکر: درست است که با تعویض c و d با هم، مسیر جدیدی به دست می‌آید اما در این صورت هر مسیر دوبار شمرده می‌شود. برای مثال مسیر $cdabefg$ یکبار در حالت‌های اول و بار دیگر به صورت $gfebadc$ در حالت آخر شمرده می‌شود، بنابراین با ضرب ۱۲۰ در $2!$ و بعد تقسیم بر ۲، تعداد حالت‌ها فرقی نمی‌کند.

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

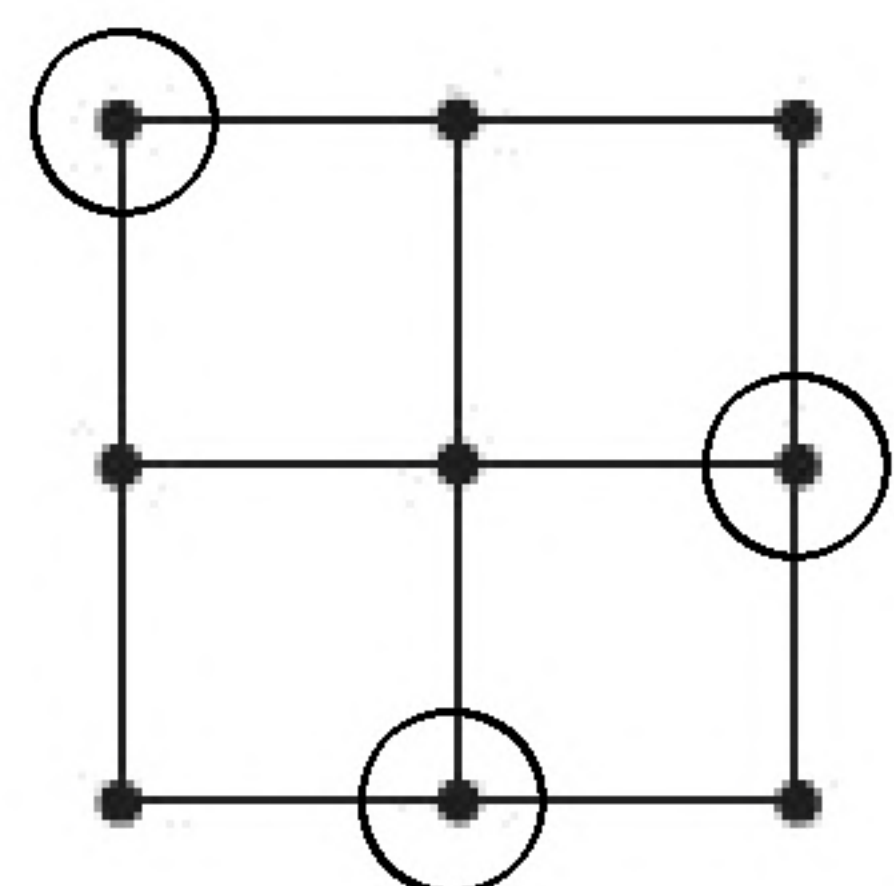
الف) در این گراف $3 = 7 - 4$ مجموعه‌های آن ۳ نوع مختلف دارند.



ب) از این نوع چهار مجموعه‌ی احاطه‌گر وجود دارد.



ج) از این نوع، چهار مجموعه احاطه‌گر مینیمم وجود دارد.

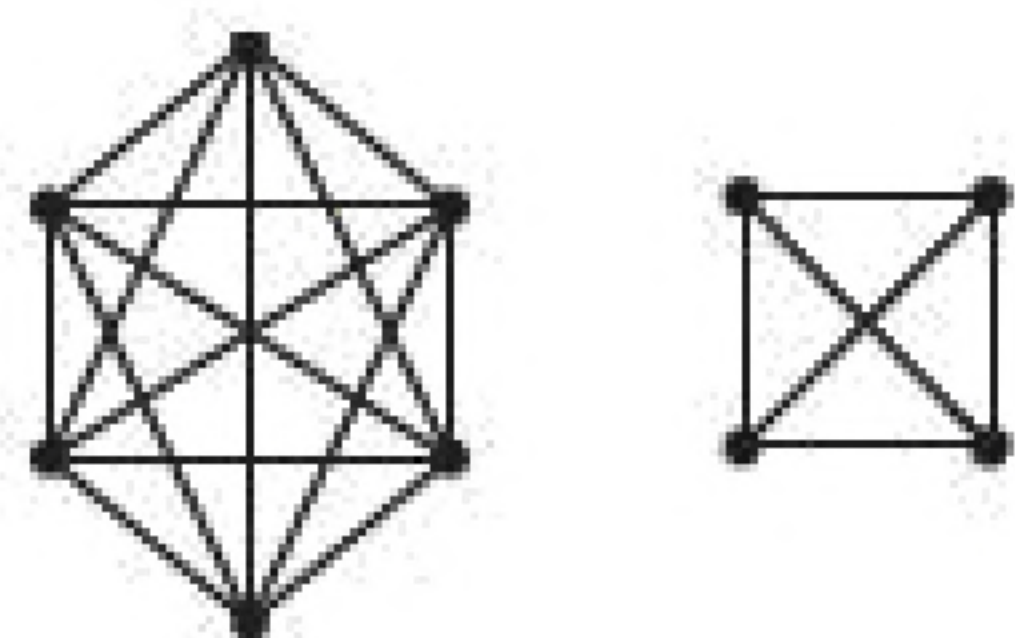


$$10 = 2 + 4 + 4 = \text{تعداد کل } 7 \text{ مجموعه‌ها}$$



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

چون گراف G ناهمبند است پس به فرم یک k_4 و یک k_4 می باشد.



تعداد دور به طول m در گراف k_p از فرمول $\binom{p}{m} \frac{(m-1)!}{2}$ به دست می آید.

$$\binom{6}{4} \frac{(4-1)!}{2} = 15 \times 3 = 45$$

دور به طول ۴ در k_4

$$\binom{4}{4} \frac{(4-1)!}{2} = 3$$

دور به طول ۴ در k_4

پس $45 + 3 = 48$ دور به طول ۴ داریم.

۲۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

رئوس d و f ، مجموعه رئوس $\{e, d, f, g\}$ را احاطه می کنند. رأس a ، $\{e, a, b\}$ را احاطه می کند. برای این که رئوس h و c احاطه شوند، x می تواند یکی از رئوس h و c و b باشد، اما اگر $x = b$ باشد، $\{d, f, a, b\}$ احاطه گر مینیمال نمی باشد، چون می تواند رأس a را حذف کرد، پس x دو مقدار قابل قبول دارد.

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$q_{\min} = \binom{P-1}{2} + 1 = \binom{4}{2} + 1 = 7$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دنباله درجه گراف به فرم زیر می باشد:

$$4, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, \dots, 1 \Rightarrow \underbrace{p = 8 + n}_{q = p - 7} \Rightarrow q = 1 + n$$

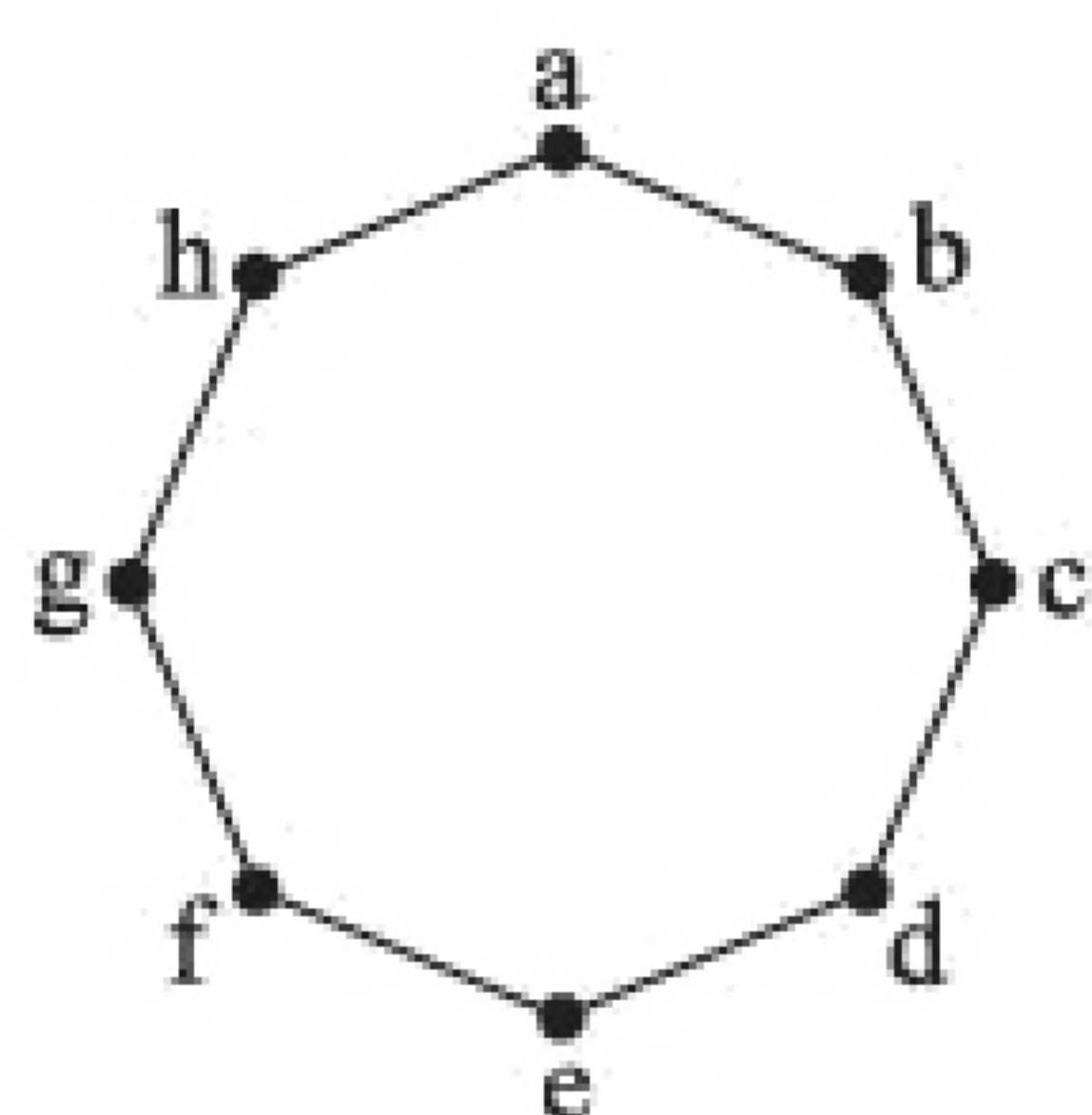
می دانیم مجموع درجات $2q$ است.

$$\sum_{i=1}^p \deg V_i \Rightarrow 4 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + \dots + 1 = 2q$$

$$\Rightarrow 23 + n = 2q = 2(n + 1) \Rightarrow n = 21 \Rightarrow p = 29$$



۳۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



گراف C_8 به شکل مقابل شامل ۸ یال است. تا زمانی که هیچ کدام از رأس‌ها به درجه $p-1$ یعنی به درجه ۷ تعدیل نشده، عدد احاطه‌گری بیش از ۱ است، پس باید آنقدر یال اضافه کنیم تا اطمینان حاصل کنیم که حداقل یک رأس درجه ۷ داریم. در حالتی که گراف ۶ منتظم مرتبه ۸ باشد، عدد احاطه‌گری بیش از ۱ است. کافی است یک یال دیگر به گراف اضافه شود تا دست کم درجه یکی از رأس ۷ شود و از آنجا $\gamma = 1$ خواهد شد.

$$\text{در گراف ۶ منتظم: } rp = 2q \Rightarrow 6 \times 8 = 2q \Rightarrow q = 24$$

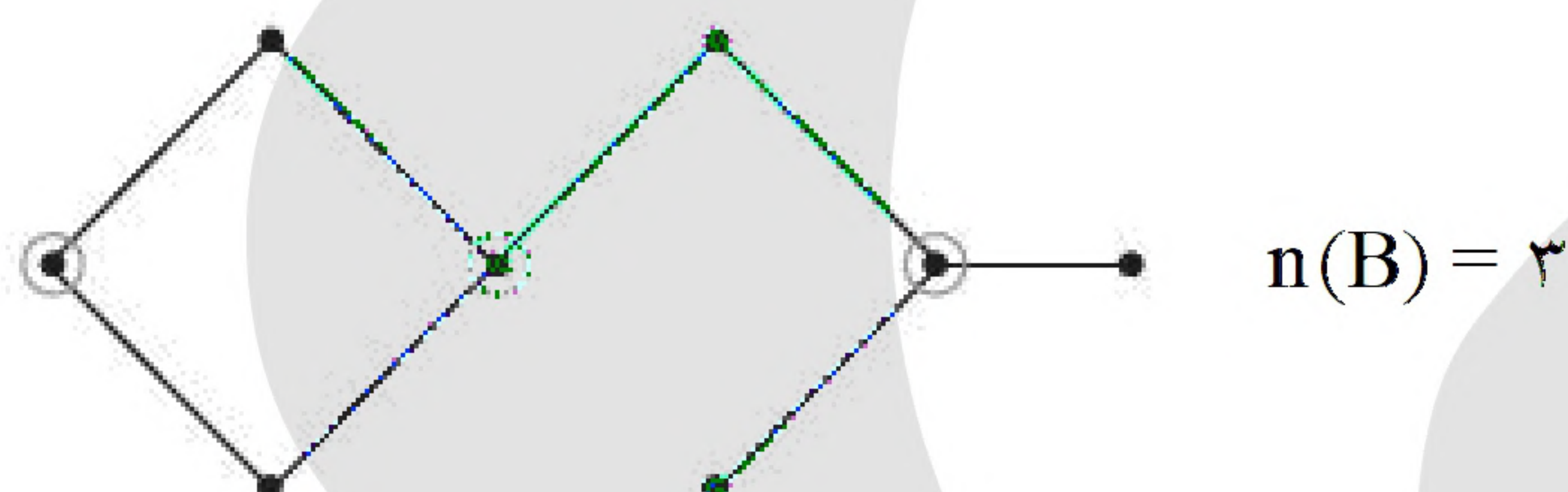
پس برای اینکه حتماً رأس درجه ۷ داشته باشیم، باید حداقل ۲۵ یال موجود باشد بنابراین اگر $25 - 8 = 17$ یال به C_8 اضافه شود، $\gamma(G) = 1$ خواهد شد.

نکته: گراف منتظم (گراف C_n): گرافی است که درجه تمام رئوس آن برابر باشد و اصطلاحاً r -منتظم خوانده می‌شود. (r -درجه هر رأس می‌باشد.)

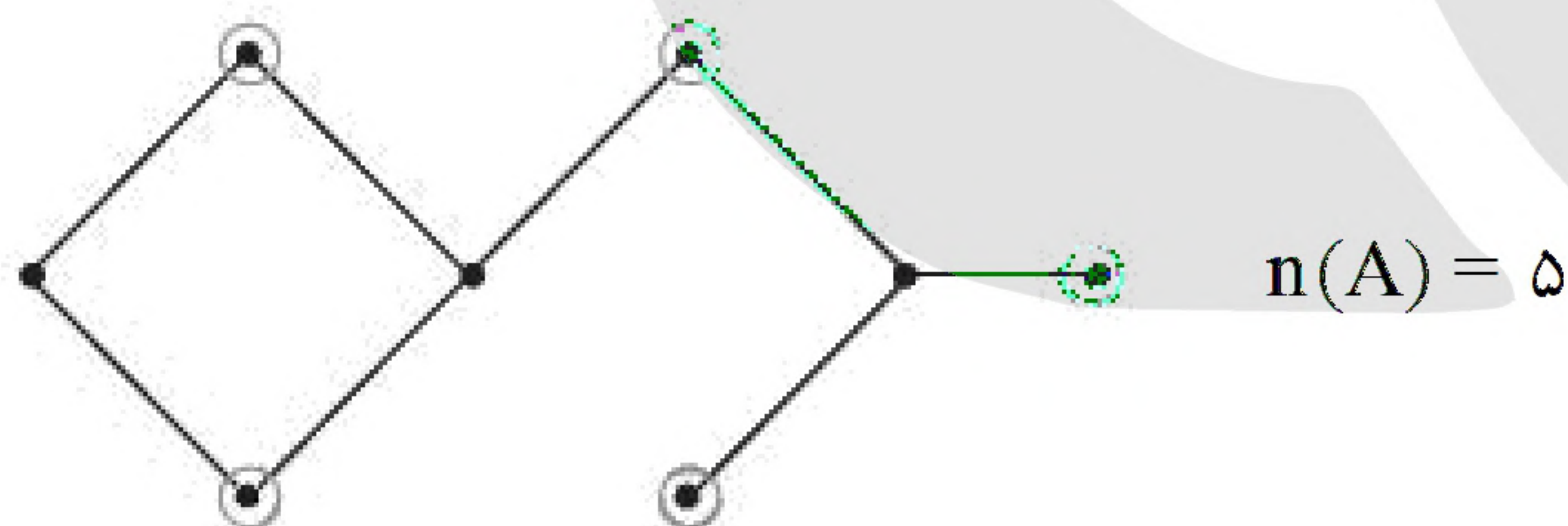
نکته: در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین اعداد عضو را دارند مجموعه احاطه‌گر مینیمم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

احاطه‌گر مینیمال با کمترین تعداد عضو همان احاطه‌گر مینیمم است، کافی است رأس‌ها را به صورت زیر انتخاب کنیم پس:



برای به دست آوردن مجموعه احاطه‌گر مینیمال با بیشترین تعداد عضو نیز کافی است رأس‌های زیر را انتخاب کنیم پس:



بنابراین بیشترین مقدار $n(A) - n(B)$ برابر ۲ است.



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مجموعه‌ی $\{i\}$ یک احاطه‌گر مینیمم و در نتیجه مینیمال برای این گراف است. در صورتی که رأس i را کنار بگذاریم برای داشتن یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال باید یک رأس از مجموعه‌های $\{a, b\}$ ، $\{c, d\}$ ، $\{e, f\}$ و $\{g, h\}$ انتخاب کنیم که طبق اصل ضرب تعداد این مجموعه‌ها $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ است، پس در مجموع ۱۷ مجموعه احاطه‌گر مینیمال برای این گراف وجود دارد.

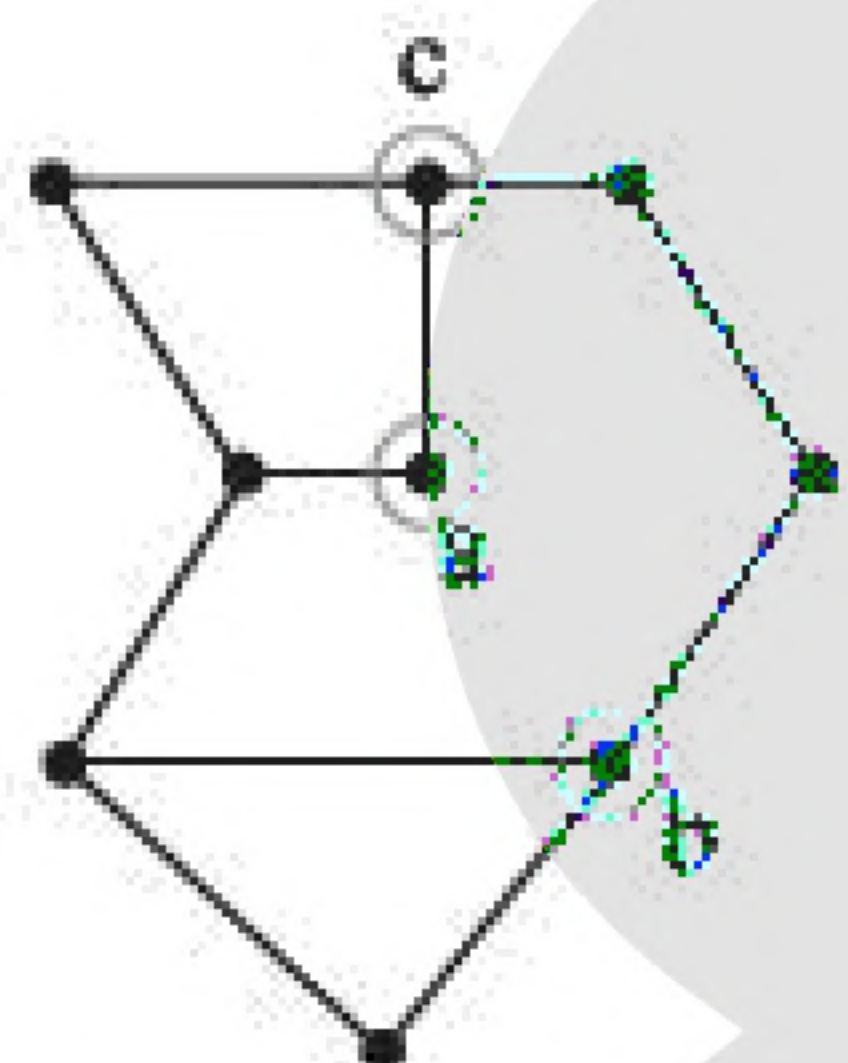
نکته: یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سعی می‌کنیم به کمک گراف کامل حداکثر q را به دست آوریم. کافی است با ۸ رأس گراف K_8 را رسم کنیم و رأس آخر را به ۴ رأس گراف K_8 رسم کنیم که در این صورت ۴ یال به یال‌های K_8 اضافه می‌کند.

$$q_{\max} = \binom{8}{2} + 4 = 32$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گراف زیر را در نظر می‌گیریم:



کافی است مجموعه احاطه‌گر با کم‌ترین تعداد عضو شامل رأس a را به دست آوریم. هم‌چنین رأس‌های c و b را نیز انتخاب کنیم (چون با یک رأس، بقیه رأس‌های گراف احاطه نمی‌شود پس حداقل به دو رأس نیاز داریم)، پس حداقل ۳ خودپرداز نیاز داریم.

۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$p + q = p + \binom{p}{2} = \binom{p+1}{2} = \frac{(p+1)p}{2}$$

پس مجموع مرتبه و اندازه‌ی یک گراف کامل عددی به صورت $\binom{n}{2}$ است. در بین گزینه‌ها تنها ۱۱۲ به این صورت نیست. این موضوع را می‌توان با سعی و خطا نشان داد.

$$\binom{12}{2} = 66, \binom{13}{2} = 78, \binom{14}{2} = 91, \binom{15}{2} = 105, \binom{16}{2} = 120, \dots$$

روش دوم: عددی به صورت $\binom{n}{2}$ است که دو برابر آن را بتوان به صورت حاصلضرب دو عدد متوالی نوشت.

$$۱) 2 \times 78 = 2 \times 6 \times 13 \Rightarrow 13 \times 12$$

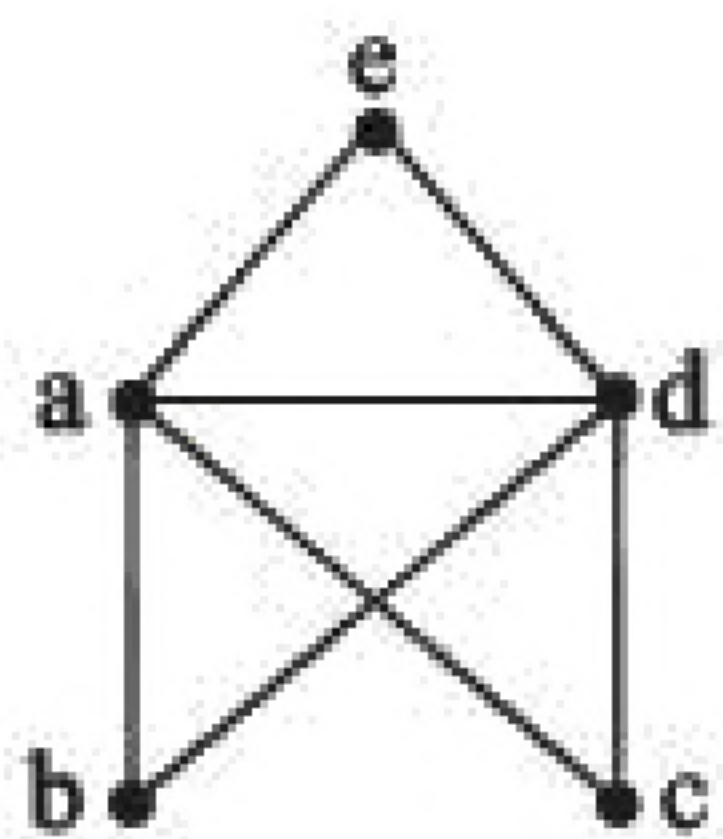
$$۲) 2 \times 91 = 2 \times 7 \times 13 \Rightarrow 14 \times 13$$

$$۳) 2 \times 105 = 2 \times 7 \times 15 \Rightarrow 15 \times 14$$

$$۴) 2 \times 112 \neq n(n-1)$$

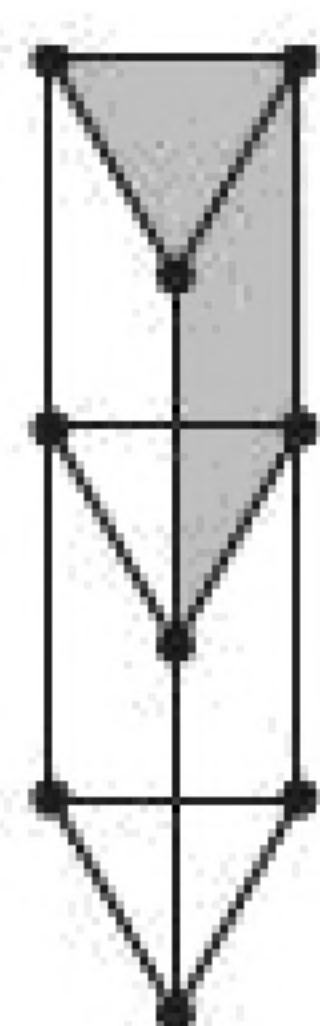


۳۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
گراف را رسم می‌کنیم:

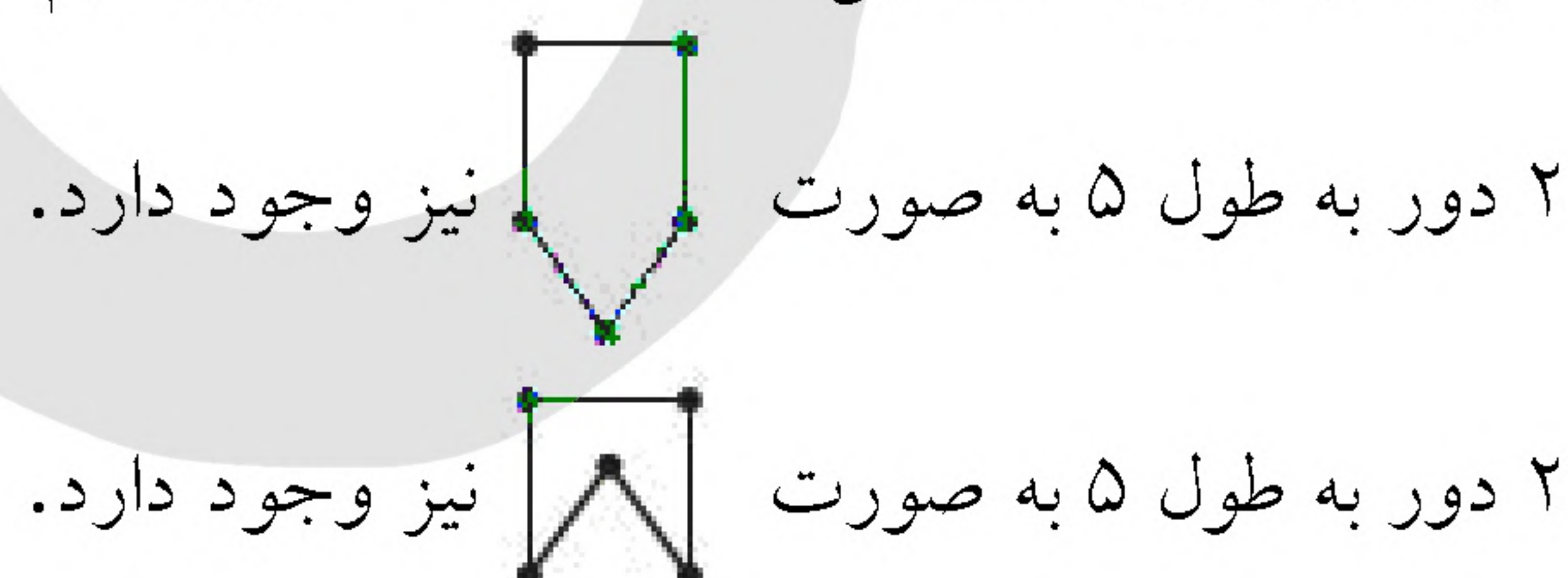


واضح است که دو مجموعه $\{a\}$ و $\{d\}$ احاطه‌گر مینیمال هستند. مجموعه دیگر $\{e, b, c\}$ می‌باشد.

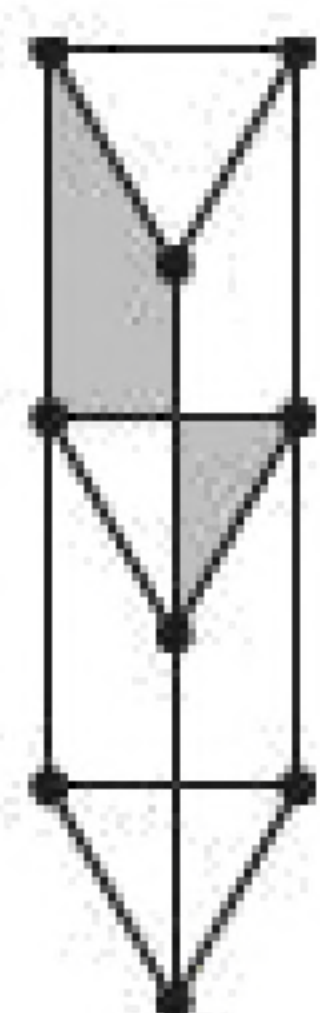
۳۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
۴ دور به طول ۵ به صورت زیر است:



اگر آن را با وجه مستطیل کناری علامت‌گذاری کنیم، ۴ دور به این صورت وجود دارد:



دور به طول ۵ دیگر به صورت زیر است که اگر آن را با مثلث کوچک علامت بزنیم، ۴ دور به این صورت نیز در گراف وجود دارد:





۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. رأس a را به رئوس b و c و d وصل می‌کنیم. با این کار ۳ یال گراف تأمین می‌شود. حال باید با رئوس $\{b, c, d, e\}$ یک گراف ۲ یاله بسازیم. تعداد گراف‌های q یاله با p رأس برچسب‌زده از فرمول

$$\binom{p}{q} \text{ به دست می‌آید.}$$

$$\begin{cases} q = 2 \\ p = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد گراف های موردنظر} = \binom{\binom{4}{2}}{2} = \binom{6}{2} = 15$$

