

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری این گراف ۲ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیم آن عبارتند از: $\{a,b\}, \{a,f\}, \{a,g\}, \{b,d\}, \{d,f\}, \{d,g\}, \{c,f\}$ بنابراین گراف ۷ مجموعه احاطه‌گر مینیم دارد.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای داشتن بیشترین تعداد یال، رأس‌های از درجه $\Delta = 8$ و برای داشتن کمترین تعداد یال، رأس‌های از درجه $\delta = 3$ را ماکزیم می‌کنیم. چون تعداد رأس‌های فرد گراف، همواره عددی زوج است:

$$\sum_{i=1}^{18} \deg(V_i) = 2q$$

$\underbrace{8, 8, \dots, 8, 7, 3}_{\text{رأس ۱۶}}$

بیشترین درجه فرد ممکن درجه فرد اجباری

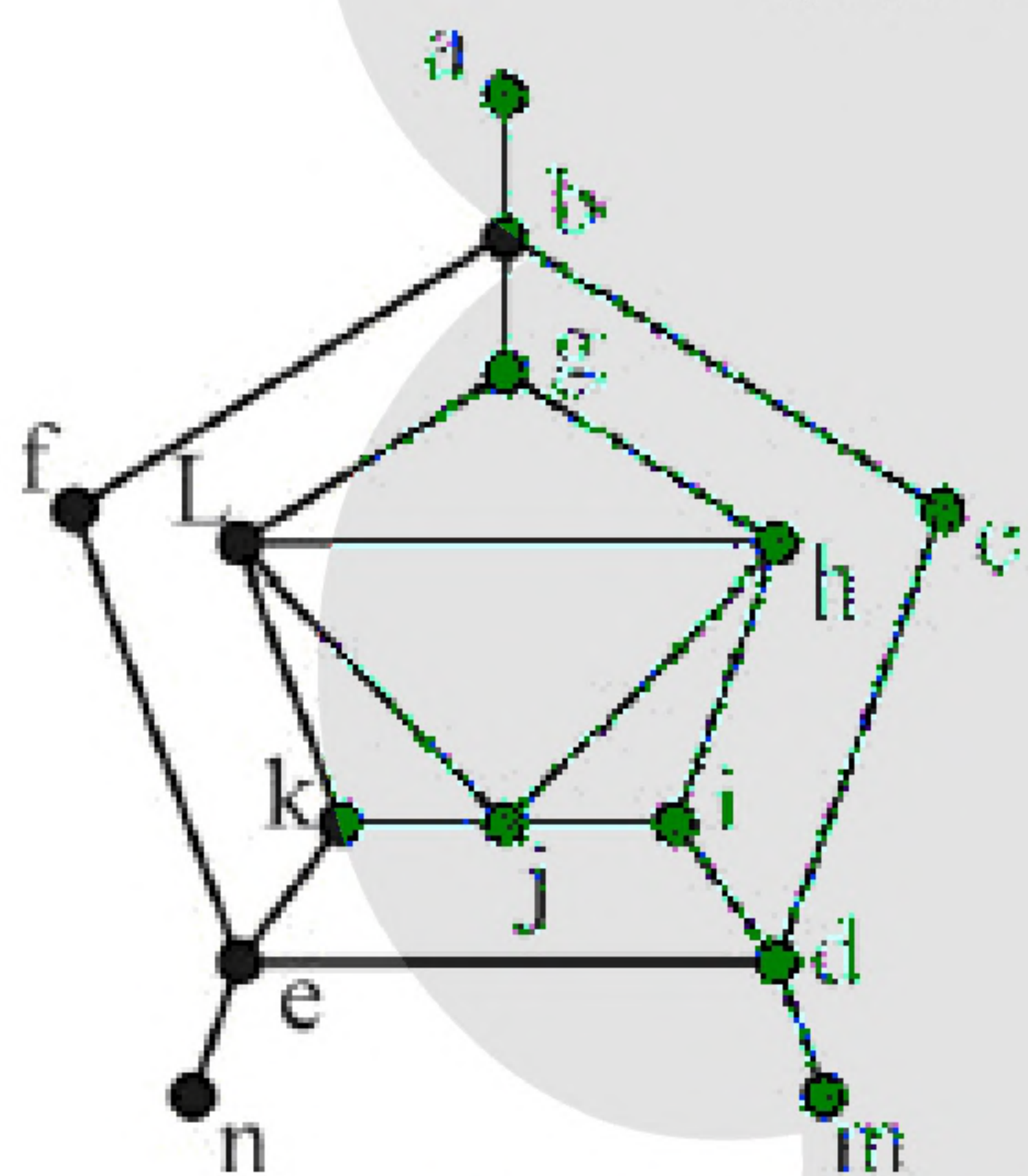
$$\Rightarrow 16 \times 8 + 7 + 3 = 138 = 2q_{\max} \Rightarrow q_{\max} = 69$$

$\underbrace{8, 4, 3, 3, \dots, 3}_{\text{رأس ۱۶}}$

کمترین درجه زوج ممکن درجه زوج اجباری

$$\Rightarrow 8 + 4 + (16 \times 3) = 2q_{\min} \Rightarrow q_{\min} = 30$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مرتبه گراف G ، $n = 14$ و ماکزیم درجه $\Delta = 4$ است. بنابراین:



$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{14}{5} \right\rceil = 3$$

در این گراف با ۳ رأس نمی‌توان مجموعه احاطه‌گری نوشت. از طرفی مجموعه $A = \{b, j, d, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیم برای این گراف است، پس $\gamma(G) = 4$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 5 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 = 2q \Rightarrow q = 6, P = 8$$

چون در این گراف $q < P - 1$ ، پس این گراف قطعاً ناهمبند است، زیرا حداقل شرط لازم برای همبندی $(q_{\min} = P - 1)$ را ندارد.



۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حداقل تعداد یال در یک گراف همبند از مرتبه P و اندازه q برابر $P-1$ است. بنابراین:

$$q_{\min} = P - 1 = 10 - 1 = 9$$

$$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

در گراف کامل K_{10} تعداد یال‌ها برابر است با:

$$36 = 45 - 9 = \text{تعداد یال‌های لازم}$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای آنکه مرتبه گراف (تعداد رئوس) بیشترین باشد لازم است از بیشترین رئوس با درجه $\delta = 2$ استفاده شود. از طرف دیگر چون نمی‌توانیم فقط یک رأس درجه فرد $\Delta = 7$ داشته باشیم، پس باید یک رأس درجه ۳ (کمترین درجه فرد) هم در نظر بگیریم:

$$2, 2, \dots, 2, 3, 7$$

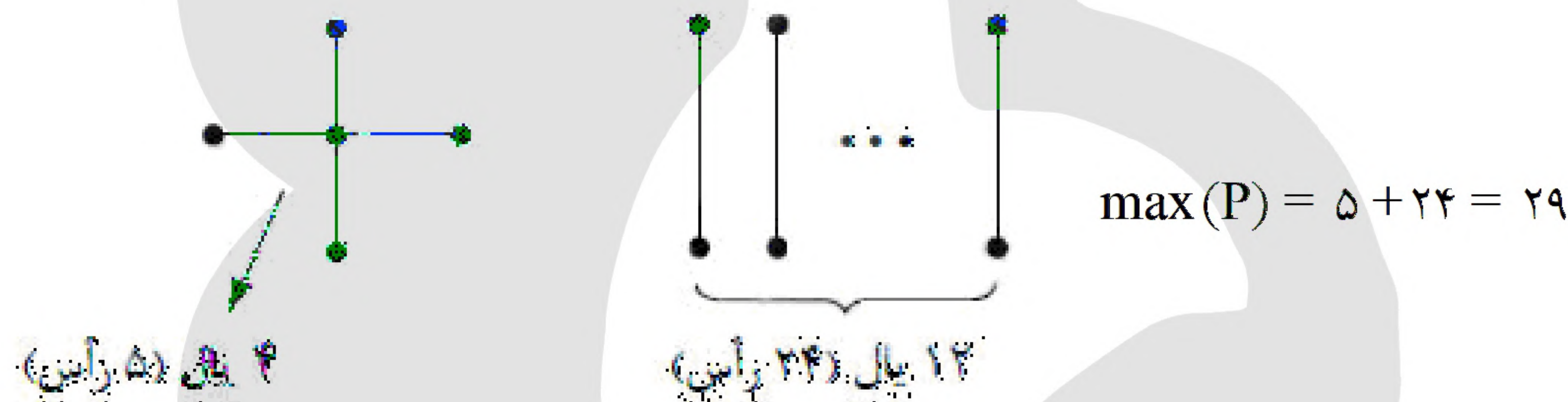
تا n

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 7 + 3 + 2n = 2(20) \Rightarrow n = 5$$

$$m = 15 + 2 = 17 \Rightarrow K_{17}: \text{تعداد یال} = \frac{17(17-1)}{2} = 136$$

گراف کامل

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای اینکه مرتبه گراف حداکثر باشد، یک رأس درجه ۴ و بقیه رأس‌ها را درجه یک فرض می‌کنیم:

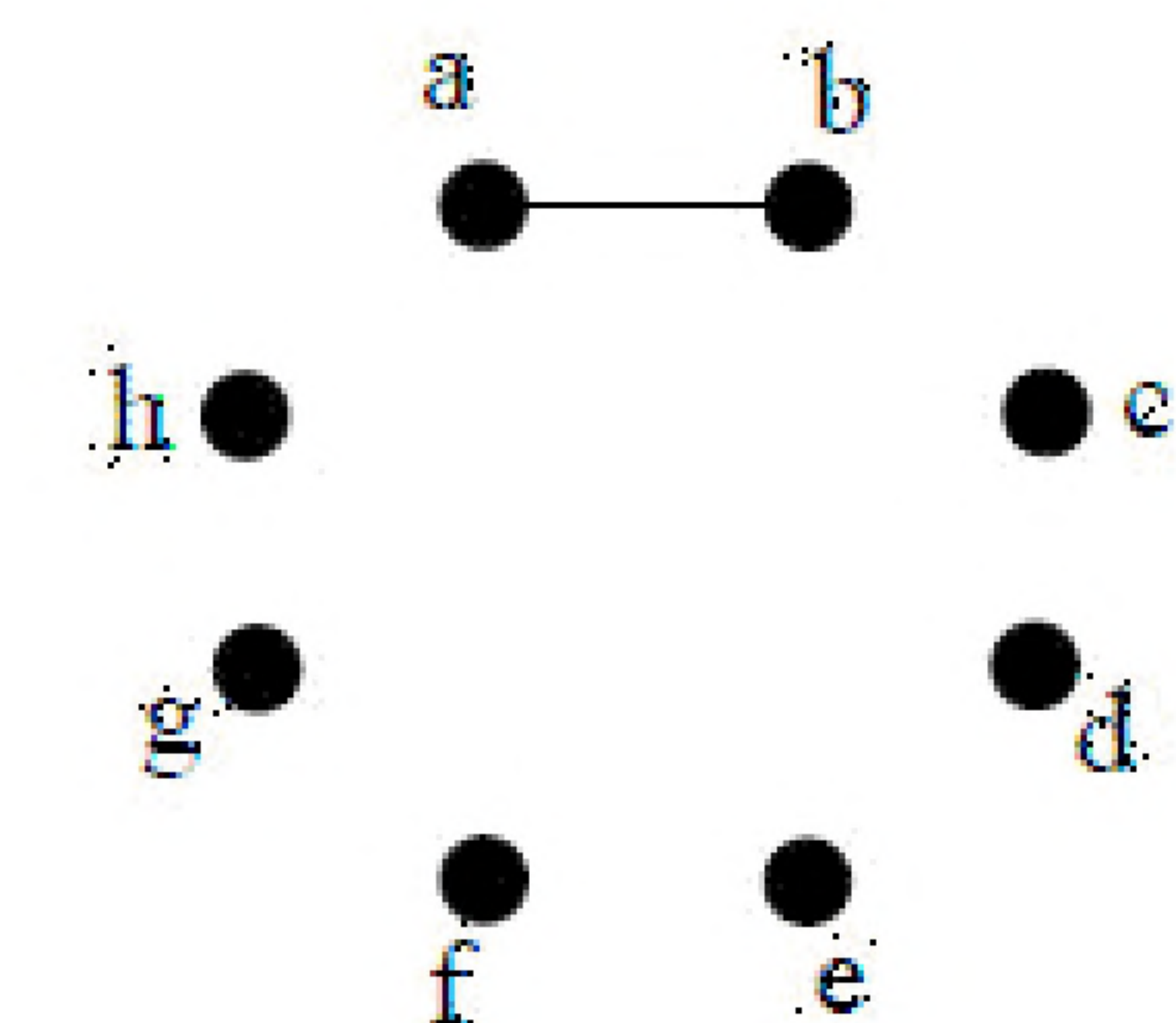


۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در گراف P_n بین هر دو رأس از گراف دقیقاً یک مسیر وجود دارد. از طرف دیگر هر رأس به تنهایی مسیری به طول صفر است؛ بنابراین تعداد کل مسیرهای متفاوت $\binom{n}{2} + n = 91$ است:

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = 91 \Rightarrow n(n+1) = 182 \Rightarrow n = 13$$

$$C_{13} = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 5, \text{ عدد احاطه گری } P_{13} = \left\lfloor \frac{13}{3} \right\rfloor = 5, \text{ عدد احاطه گری } K_3 = 1$$

$$C_{13}, P_{13}, K_{13} \text{ مجموعه عدد احاطه گری } = 1 + 5 + 5 = 11$$



۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف مطلوب به شکل مقابل است که در نوشتن مجموعه احاطه گر مینیمم، فقط در نوشتن یکی از دو رأس درجه یک مختاریم و نوشتن رأس‌های ایزوله اجباری است:

بنابراین فقط دو مجموعه احاطه گر مینیمم به صورت $\{a, c, d, e, f, g, h\}$ و $\{b, c, d, e, f, g, h\}$ داریم.



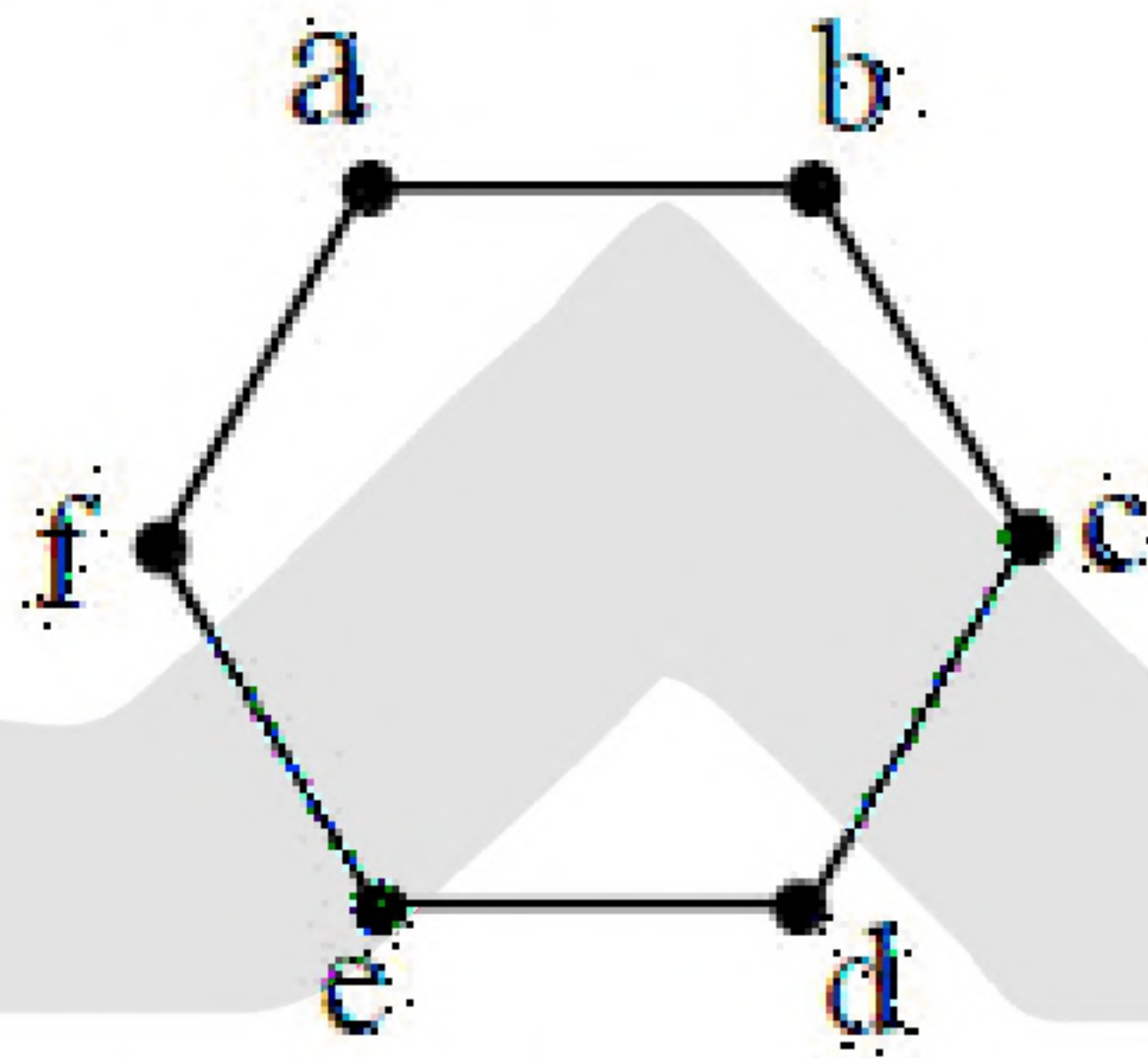
۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. گراف شامل رئوس g و f و e و d گراف کامل K_4 است که هر زیرمجموعه غیر تهی از

رئوس آن یک مجموعه احاطه‌گر است. تعداد این مجموعه‌ها برابر است با $2^4 - 1 = 15$

مجموعه‌های احاطه‌گر گراف شامل c و b و a عبارت‌اند از: $\{a, b, c\}$ $\{a, b\}$ $\{a, c\}$ $\{b, c\}$ $\{b\}$

بنابراین طبق اصل ضرب، تعداد کل مجموعه‌های احاطه‌گر برابر $15 \times 5 = 75$ است.

۱۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گراف C_6 دارای ۶ یال و به صورت مقابل است:



تا وقتی که هیچ کدام از رئوس به درجه $1 - P$ یعنی ۵ تبدیل نشود، عدد احاطه‌گری بیش از یک است. در حالتی که گراف $4 -$ منتظم از مرتبه ۶ باشد، عدد احاطه‌گری بیش از یک است. در این شرایط کافی است یک یال دیگر اضافه شود تا حداقل درجه یکی از رأس‌ها ۵ شود و $\gamma(G) = 1$ باشد:

$$\sum \deg(V_j) = 2q \Rightarrow 6 \times 4 = 2q \Rightarrow q = 12$$

بنابراین باید حداقل $12 + 1 = 13$ یال موجود باشد. برای این کار کافی است ۷ یال $(13 - 6 = 7)$ اضافه

تعداد یال‌ها C_6 اولیه

شود تا $\gamma(G) = 1$ باشد.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در این گراف رأسی با درجه ۸ وجود ندارد؛ زیرا در آن صورت $\delta(G) = 1$ می‌شود.

برای حداکثر تعداد یال، درجه تمام رئوس ۷ هم نمی‌تواند باشد؛ زیرا گراف $7 -$ منتظم از مرتبه ۹ وجود ندارد (چون

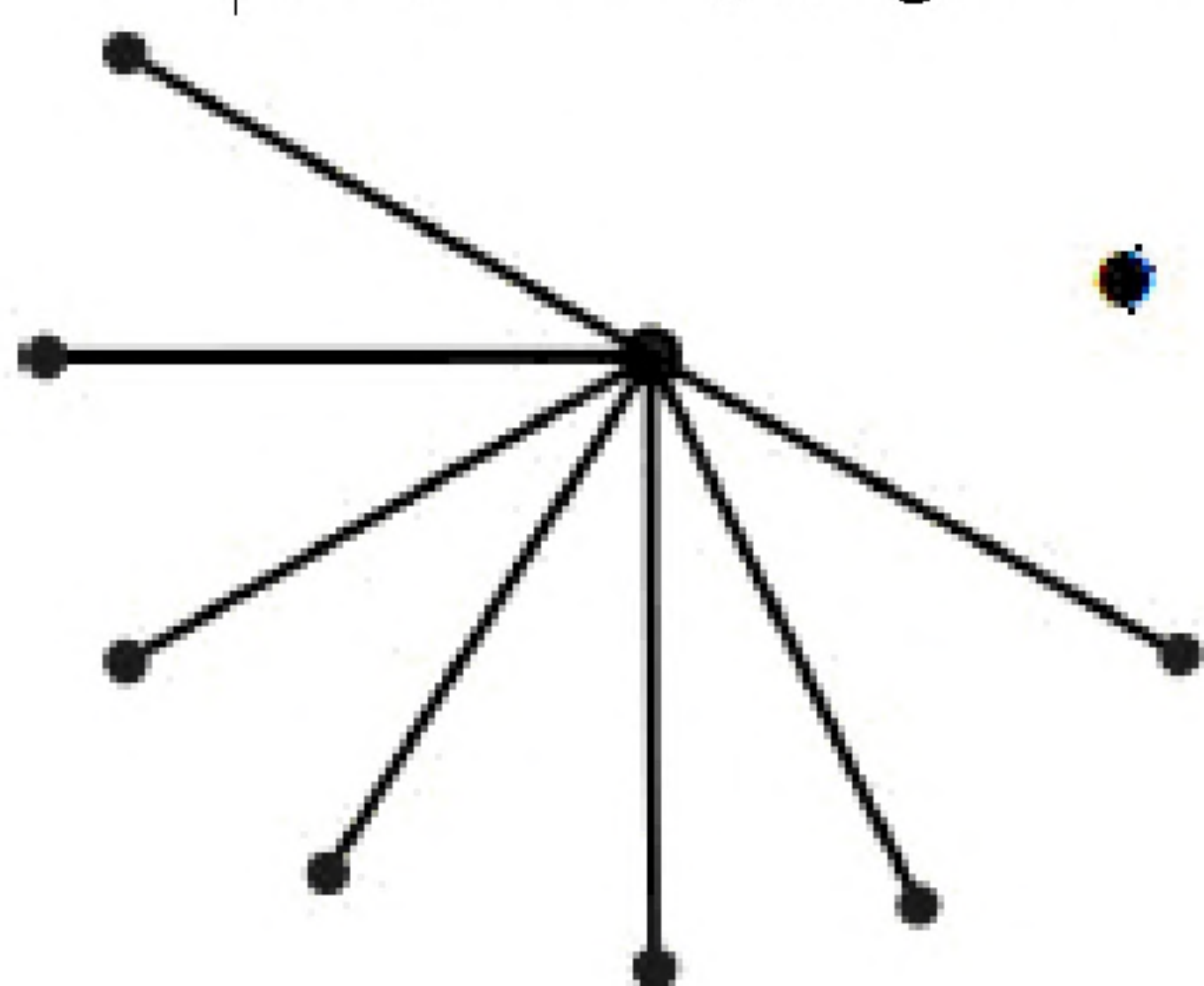
$$\sum_{i=1}^P \deg(V_i) = 2q \text{ زوج است}). \text{ بنابراین درجه یک رأس را ۶ و بقیه را ۷ در نظر می‌گیریم:}$$

$$(8 \times 7) + (1 \times 6) = 62 = 2q$$

$$\downarrow$$

$$q_{\max} = 31$$

از طرف دیگر برای ایجاد $\gamma(G) = 2$ با حداقل یال، کافی است یک گراف دوبخشی مانند شکل زیر داشته باشیم:



$$\Rightarrow q_{\min} = 7q_{\max} + q_{\min} = 31 + 7 = 38$$



۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم گراف پترسن دو دسته‌اند:

دسته اول: شامل یک رأس بیرونی مانند a و دو رأس درونی مقابل آن i و h

دسته دوم: شامل یک رأس درونی مانند f و دو رأس بیرونی در دو طرف آن b و e : بنابراین ۱۰ مجموعه احاطه‌گر مینیمم به صورت زیر وجود دارد:

$$\{a, i, h\} \{b, i, j\} \{c, f, j\} \{d, f, g\} \{e, g, h\} \{f, e, b\}$$

$$\{g, a, c\} \{h, b, d\} \{i, c, e\} \{j, a, d\}$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هر زیرمجموعه سه عضوی از رئوس P_6 که شامل یک رأس از بین a و b و یکی از

رئوس d و c و نیز یک رأس از بین e و f باشد، قطعاً یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف است که تعداد کل

مجموعه‌های احاطه‌گر ممکن برابر است با:

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8$$



اما از بین این ۸ مجموعه تنها دو مجموعه $\{b, d, e\}$ و $\{b, c, e\}$ مینیمال نیستند چون در آن‌ها مجموعه احاطه‌گر مینیمم $\{b, e\}$ حضور دارد و به ترتیب در اولی با حذف رأس d و در دومی با حذف رأس c همچنان احاطه‌گر باقی می‌ماند. به این ترتیب در P_6 فقط ۶ مجموعه احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم داریم.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\gamma(K_{29}) = 1 \Rightarrow$ در گراف کامل ۲۹ رأسی

$$\gamma(P_{29}) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{29}{3} \right\rceil = 10 \Rightarrow$$

$$\gamma(C_{29}) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{29}{3} \right\rceil = 10 \Rightarrow$$

$$\gamma = 1 + 10 + 10 = 21 = \text{مجموع } \gamma \text{ های خواسته شده}$$

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{14}{6} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3 \quad (1)$$

اما برای احاطه‌گری کامل و مینیمم حداقل باید یکی از رئوس $\{a, b, c, d\}$ و یکی از رئوس $\{g, f\}$ و رأس h و حداقل یکی از رئوس $\{m, n\}$ انتخاب شوند. بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعه احاطه‌گر باید باشد، در نتیجه $\gamma(G) \geq 4$. به عنوان نمونه مجموعه $\{c, f, h, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است، پس $\gamma(G) = 4$

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. هر رأس این گراف ۲- منتظم است، بنابراین:

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow P \times 2 = 2q \Rightarrow P = q \quad (1)$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

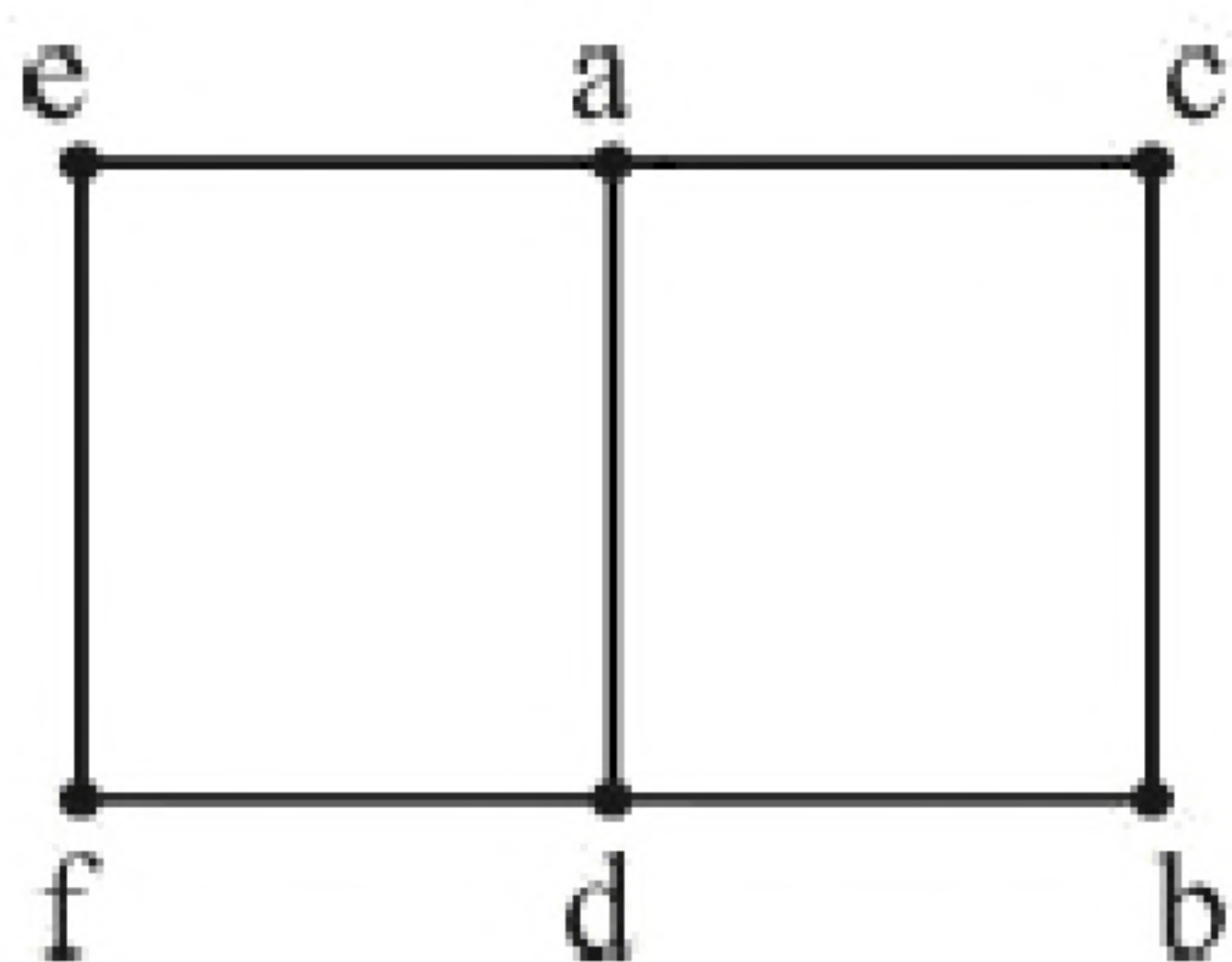
$$q(G) + 3q(G) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 4q = \frac{P(P-1)}{2} \xrightarrow{\text{طبق (1)}} 4P = \frac{P(P-1)}{2}$$

$$\Rightarrow P-1 = 8 \Rightarrow P = 9, q = 9 \Rightarrow \Delta = \delta = 2$$

$$\text{گراف } G: P + q + \Delta + \delta = 9 + 9 + 2 + 2 = 22$$



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»



- ۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. گراف G با شرایط داده شده برای همسایگی رئوس به صورت مقابل است:
چون اندازه گراف ۷ است، پس این گراف یال دیگری ندارد.
در این دو گراف ۲ دور به طول ۴: $eadfe$ و $acbda$ و یک دور هم به طول ۶ به صورت: $eachdbfe$ وجود دارد بنابراین گراف G فقط ۳ دور دارد.

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ۶ گراف به صورت زیر:



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به فرض سوال این گراف کامل است:

$$P + q = 21 \Rightarrow P = \frac{P(P-1)}{2} = 21 \Rightarrow P^2 + P = 42 \Rightarrow P = 6, q = 15$$

$$\Rightarrow \text{گراف کامل } K_6 \Rightarrow \Delta = \delta = 5 = P - 1$$

$$Pq + \Delta + \delta = (6 \times 15) + 5 + 5 = 100$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. گراف \bar{G} زمانی کمترین یال را دارد که گراف ممکن آن یعنی G بیشترین یال ممکن را داشته باشد. اگر دو رأس با درجه ۳ و ۴ را کنار بگذاریم با ۸ رأس باقیمانده حداکثر $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ یال داریم و در نتیجه

$$q(G) + q(\bar{G}) = \frac{P(P-1)}{2}$$

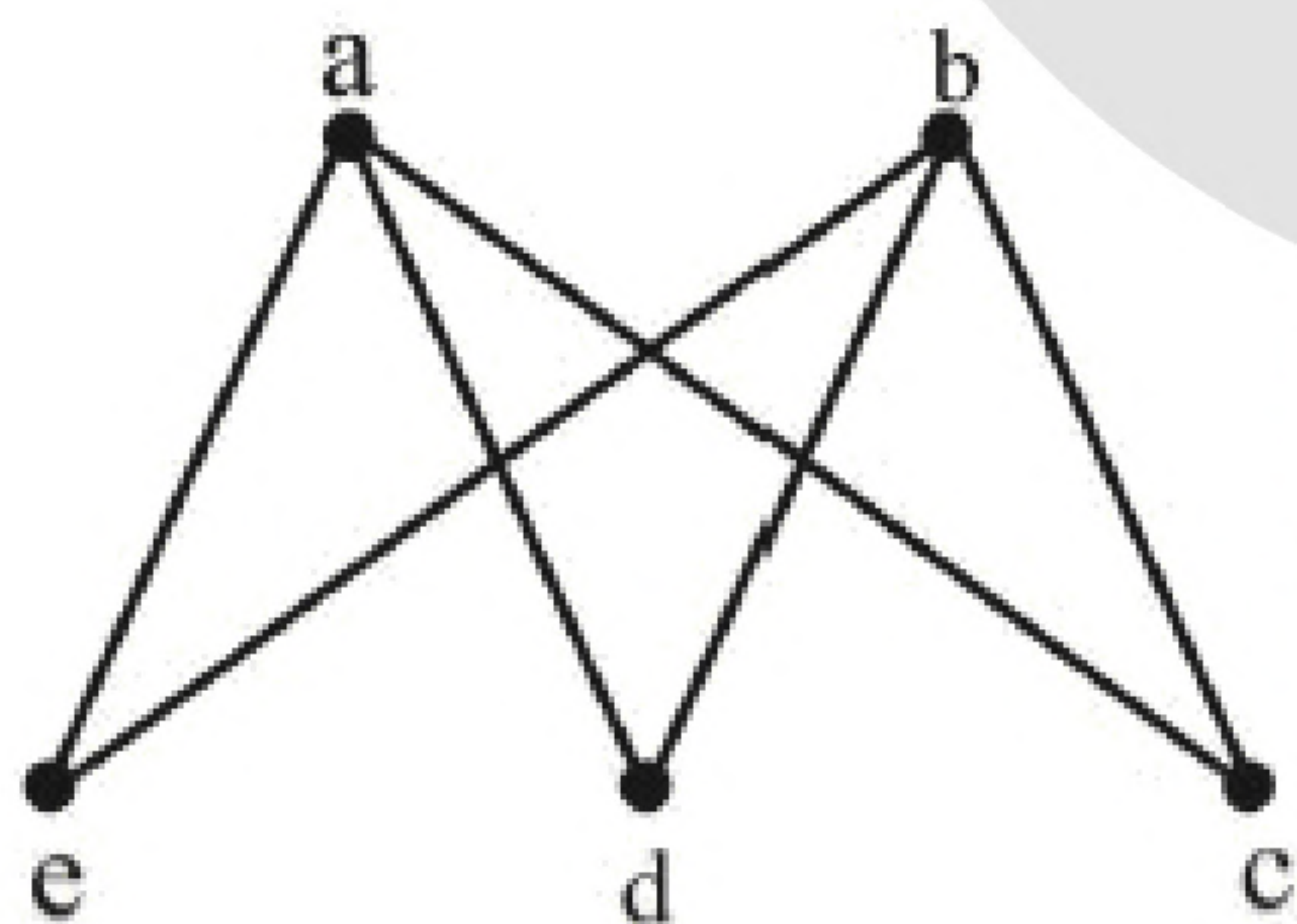
$$q_{\max}(G) = 28 + 3 + 4 = 35 \text{ از طرف دیگر:}$$

$$35 + q(\bar{G}) = \frac{10 \times 9}{2}$$

$$q_{\min}(\bar{G}) = 10$$

بنابراین گراف \bar{G} حداقل ۱۰ یال دارد.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دنباله درجات رأس‌های این گراف به صورت $(2, 2, 2, 3, 3)$ و شکل آن به صورت زیر است. مجموعه‌های احاطه‌گر مینیم این گراف عبارت‌اند از:



$$\{a, e\}, \{a, d\}, \{a, c\}, \{b, e\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{a, b\}$$

$$\binom{2}{1} \binom{3}{1} + 1 = (2 \times 3) + 1 = 7$$

۲۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری این گراف ۲ است و مجموعه‌های احاطه‌گر مینیم آن عبارت‌اند از:
 $\{a, b\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{d, b\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{c, f\}$
بنابراین این گراف ۷ مجموعه احاطه‌گر مینیم دارد.



۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\gamma(K_{11}) + \gamma(P_{11}) + \gamma(C_{11}) = 1 + \left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{11}{3} \right\rceil = 1 + 4 + 4 = 9$$

$$\Delta + \delta = 3 \rightarrow \Delta = 2, \delta = 1 \xrightarrow{\text{min یال}} P_2,$$

۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil = \left\lceil \frac{20}{3} \right\rceil = 7$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $\gamma(G) = 1$ پس حداقل یک رأس وجود دارد که همه رئوس دیگر را احاطه می کند و به همه ی آنها وصل است. چنین گرافی حداقل ۹ یال دارد. ($n = 9$) از طرف دیگر با شرط $\gamma(G) = 1$ و حداکثر

$$m = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

$$m + n = 45 + 9 = 54$$

یال، باید گراف K_1 داشته باشیم:

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$P_n \text{ در } \left(\frac{n}{2} \right) + n = 78, \frac{n(n-1)}{2} + n = 78 \Rightarrow n = 12$$

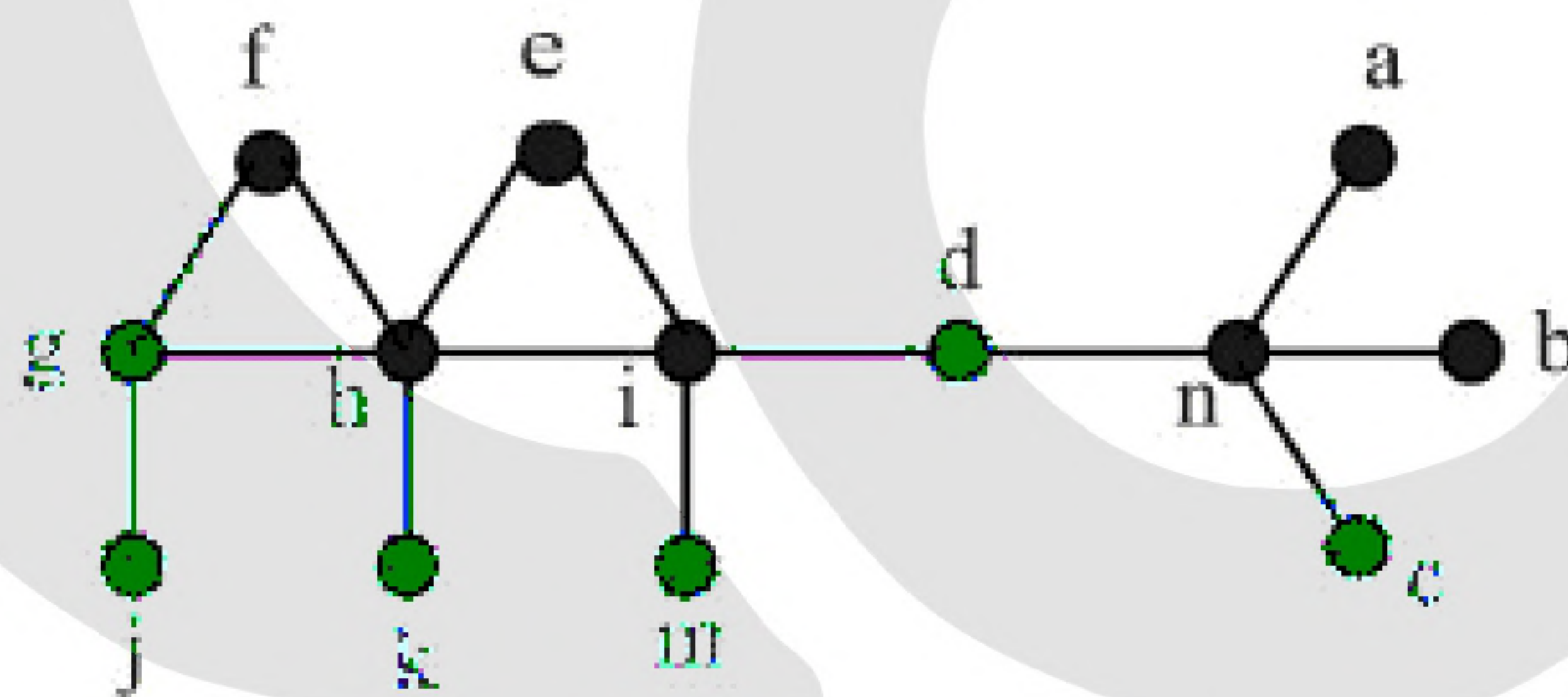
$$\gamma = \left\lceil \frac{12}{3} \right\rceil = 4$$

عدد احاطه گری در هر گراف کامل برابر ۱ و در گراف های C_n و P_n برابر $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ است:

$$\gamma(K_{17}) + \gamma(C_{17}) = 1 + \left\lceil \frac{17}{3} \right\rceil = 7$$

$$7 - 4 = 3 = \text{اختلاف دو مقدار خواسته شده}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



$$\text{بزرگ ترین مجموعه مینیمال} = \{a, b, c, d, j, k, m, e, f\} \Rightarrow x = 9$$

$$\text{کوچک ترین مجموعه مینیمال} = \{g, h, i, n\} \Rightarrow y = 4$$

$$x^2 - y^2 = 81 - 16 = 65$$

۲۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای هر رأس G و مکمل آن (\bar{G}) :

$$\deg_G(v_i) + \deg_{\bar{G}}(v_i) = P - 1 \Rightarrow 9 + 6 = P - 1 \Rightarrow P = 16$$

$$\sum \deg(v_i) = 2q \Rightarrow q(G) = \frac{16 \times 9}{2} = 72$$



۳۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $\sum_{i=1}^v \deg v_i = 2q \Rightarrow P \times v = 2q$ (۱) : گراف ساده‌ی ۷- منتظم

(۲) $q = 3p + v$: مطابق فرض سؤال

$$1, 2 \Rightarrow 2q = 6p + 14 \Rightarrow 7p = 6p + 14 \Rightarrow p = 14, q = 49$$

$$\text{گراف کامل} : K_{14} \Rightarrow q = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

$$= 91 - 49 = 42 \text{ تعداد یال لازم برای تبدیل } G \text{ به گراف کامل}$$

۳۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. $q_1 = \frac{P(P-1)}{2} = \frac{9(9-1)}{2} = 36$: گراف کامل K_9 : $K = 8$: ۹ راسی K - منتظم با بیشترین K

$$q_2 = 9 \text{ : گراف } C_9 \text{ : } K = 2 \text{ : ۹ راسی } K \text{ - منتظم با کمترین } K$$

$$q'_1 = \frac{P(P-1)}{2} \text{ : گراف کامل } K_6 \text{ : } K = 5 \text{ (منتظم) : ۶ راسی } K \text{ - منتظم با بیشترین } K$$

$$= \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

$$q'_1 = 3 \text{ : و (یک منتظم) } K = 1 \text{ : ۶ راسی } K \text{ - منتظم با کمترین } K$$



$$m + n = 45 + 18 = 63$$

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر هفت نفر را ۷ رأس گراف و دست دادن را معادل رسم یک یال بین دو رأس در نظر بگیریم، تعداد رئوس فرد باید زوج باشد. بنابراین چون ۶ رأس گراف درجه ۲ است رأس هفتم نمی‌تواند درجه ۵ باشد.

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

گراف کامل از مرتبه 10 (K_{10}) دارای $\binom{10}{2} = 45$ یال است. گراف با 31 یال نسبت به گراف کامل 14 یال کمتر دارد. برای ساختن این گراف و حداکثر بودن رأس‌های $\Delta = 9$ کافی است این 14 یال را از مجموعه ی 6 رأس (می‌دانیم 6 رأس ظرفیت داشتن $15 = \binom{6}{2}$ یال را دارد) حذف کنیم. بنابراین گراف K_{10} دارای 10 رأس درجه 9 است که پس از حذف 14 یال از 6 رأس آن دارای 4 رأس درجه 9 می‌شود.



۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.
فقط در گراف کامل K_p شرط $\Delta(G) = \delta(G) = P - 1$ برقرار است. تعداد کل دورهای ممکن در K_p به صورت زیر حساب می‌شود:

$$N = \underbrace{\frac{1}{2} \binom{6}{3} (3-1)!}_{\text{تعداد دورهای به طول ۳}} + \underbrace{\frac{1}{2} \binom{6}{4} (4-1)!}_{\text{تعداد دورهای به طول ۴}} + \underbrace{\frac{1}{2} \binom{6}{5} (5-1)!}_{\text{تعداد دورهای به طول ۵}} + \underbrace{\frac{1}{2} \binom{6}{6} (6-1)!}_{\text{تعداد دورهای به طول ۶}}$$

تعداد دورهای به طول ۳ تعداد دورهای به طول ۴ تعداد دورهای به طول ۵ تعداد دورهای به طول ۶

$$N = 20 + 45 + 72 + 60 = 197$$

توجه: تعداد دور به طول m در K_p برابر است با: $\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$

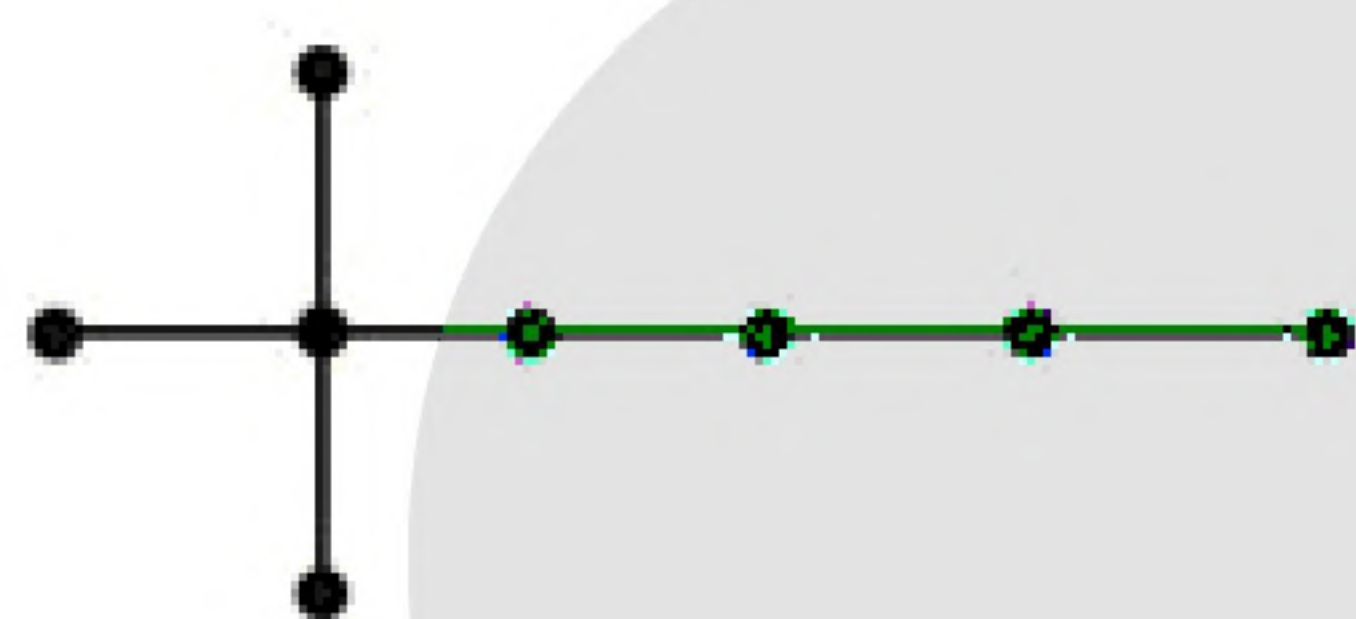
۳۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
در گراف ۷- منتظم تمام P رأس از درجه ۷ هستند.

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q \rightarrow \begin{cases} P \times 7 = 2 \\ q = 3P + 7 \end{cases} \rightarrow P = 14, q = 49$$

در گراف کامل با $P = 14$ تعداد کل یال‌ها برابر است با:

$$\frac{P(P-1)}{2} = \frac{14 \times 13}{2} = 91$$

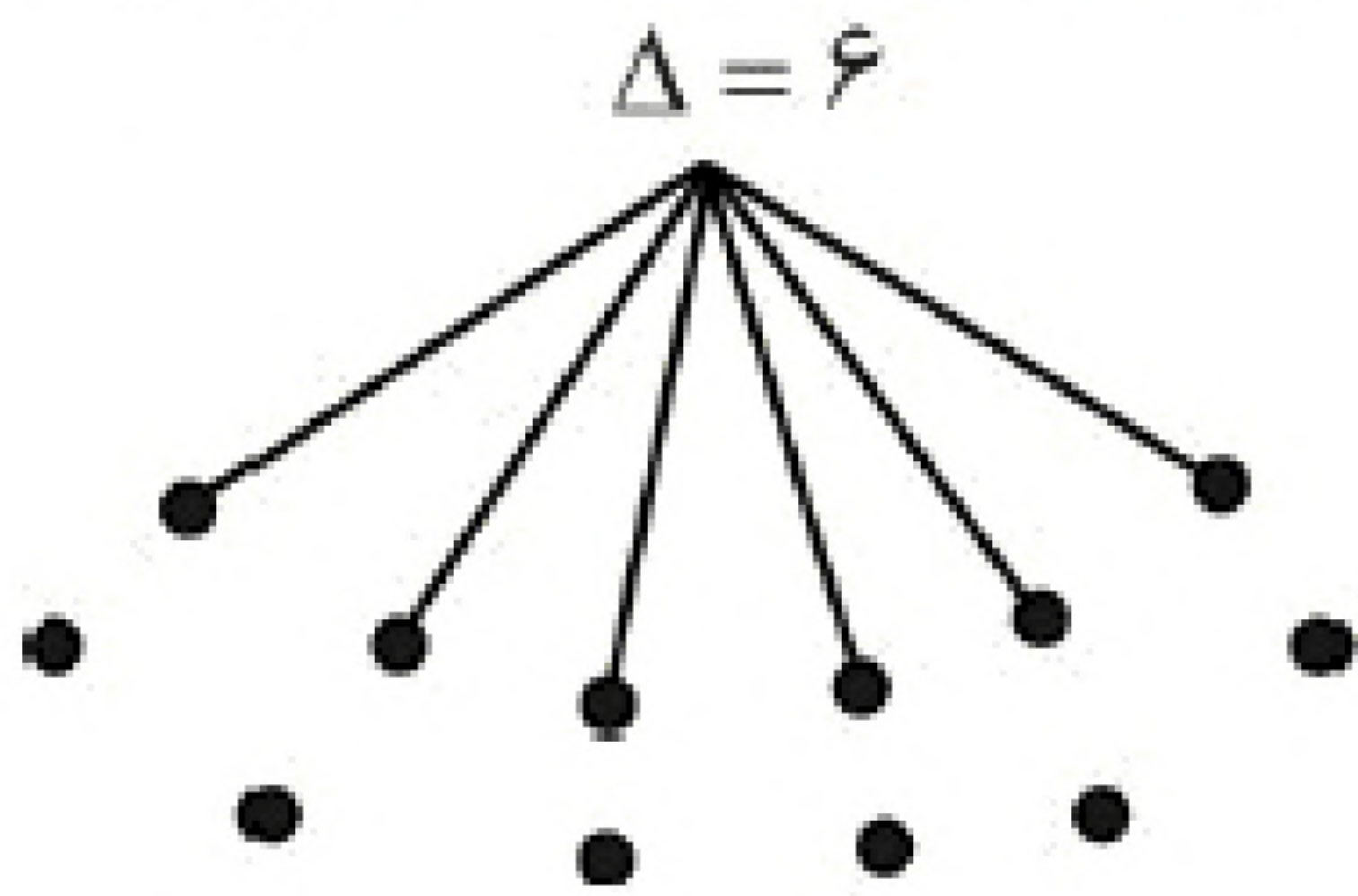
$$42 = 91 - 49 = \text{تعداد یال‌های لازم برای تبدیل به گراف کامل}$$



۳۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
مطابق شکل کوچک‌ترین اندازه گراف ساده همبندی از مرتبه ۸ که در آن $\Delta = 4$ باشد برابر ۷ است.



۳۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. حداقل عدد احاطه‌گری از رابطه $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{13}{6+1} \right\rceil$ برابر $y = 2$ می‌شود. از طرفی رأس با درجه $\Delta = 6$ دقیقاً ۷ رأس (خودش و ۶ رأس دیگر متصل به آن) را احاطه می‌کند. در بدترین حالت که ۶ رأس دیگر ایزوله باشند با ۷ رأس (یعنی ۶ ایزوله + یک رأس Δ) احاطه می‌شود. پس حداکثر $\gamma(G)$ برابر $x = 7$ می‌شود.



$$x^2 + y^2 = 7^2 + 2^2 = 53$$

روش دوم:

$$\text{توجه: } \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma \leq n - \Delta$$

$$\begin{array}{c} n = 13 \\ \Delta = 6 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \leq \gamma \leq 7 \\ \uparrow \quad \uparrow \\ x \quad y \end{array} : x^2 + y^2 = 53$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عدد احاطه‌گری این گراف برابر ۳ می‌باشد. بنابراین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال غیرمینیم این گراف، حداقل باید بیشتر از ۳ عضو باشند که عبارتند از:
 $\{a, e, g, h\}, \{a, d, g, h\}, \{b, c, e, g, h\}, \{b, d, g, h\}, \{c, d, g, h\}$

۳۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در گراف P_n تعداد کل مسیرهای مختلف برابر است با:

$$\binom{n}{2} + n = 91 \Rightarrow n = 13$$

عدد احاطه‌گری در گراف کامل K_{13} برابر ۱ و در گراف‌های C_{13} و P_{13} هر کدام $5 = \left\lceil \frac{13}{3} \right\rceil$ است، بنابراین مجموع اعداد احاطه‌گری این سه گراف برابر $1 + 5 + 5 = 11$ است.

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در سه مجموعه $\{m, p\}, \{g, e\}, \{a, d\}$ رئوس احاطه‌گر در نظر گرفته شده‌اند. از هر مجموعه یک رأس انتخاب می‌کنیم تا تعداد مجموعه‌های متمایز احاطه‌گر \min با استفاده از اصل ضرب، به صورت زیر محاسبه شود:

$$\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} = 8 = y$$

برای محاسبه تعداد مینیمال از رئوس درجه ۲ و درجه ۳ چنین کمک می‌گیریم:

$$\underbrace{\binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1}}_{\text{یکی از درجه ۳ ها}} + \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \begin{cases} \{q, n\} \\ \{b, c\} \\ \{h, f\} \end{cases} + \binom{2}{1} \times \begin{cases} \{q, n, b, c\} \\ \{q, n, b, c\} \end{cases} + \{\text{درجه ۲ ها}\}$$

$$= 8 + 12 + 6 + 1 = 27 = x$$