

گنجینه سوال رایگان
+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 76x + 124y = 364 &\xrightarrow{\div 4} 19x + 31y = 91 \Rightarrow 19x \equiv 91 \Rightarrow -12x \equiv 60 \\ &\Rightarrow x \equiv -5 \Rightarrow x = 31k - 5 \xrightarrow{k=4} x = 119 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 11 \end{aligned}$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = 1 \Rightarrow 1112, a = 2 \Rightarrow 2224, a = 3 \Rightarrow 3336, a = 4 \Rightarrow 4448$$

بزرگترین مقدار a برابر ۴ است که ۳ شمارنده دارد.

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\div 7} 9x + 11y = 39 &\Rightarrow 9x \equiv 39 \Rightarrow -2x \equiv 28 \xrightarrow[\substack{\div 2 \\ (11, 2) = 1}]{\div 2} -x \equiv 14 \\ &\Rightarrow x \equiv -14 \Rightarrow x \equiv 11 \Rightarrow x = 11k + 8 \xrightarrow{k=9} x = 107 \Rightarrow 1 + 0 + 7 = 8 \end{aligned}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳ برابر $\overline{a \cdot a}$ باید سه رقمی باشد، پس:

$$a = 1, 2, 3 \begin{cases} 101 \checkmark \\ 202 \checkmark \\ 303 \checkmark \\ 404 \times \end{cases}$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 17x + 18y = 987 &\Rightarrow 18y \equiv 987 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 17k + 1 \\ 17x + 18(17k + 1) &= 987 \Rightarrow 17x = -18 \times 17k + 969 \Rightarrow x = -18k + 57 \\ x > 0 &\Rightarrow -18k + 57 > 0 \Rightarrow k < \frac{57}{18} \\ y > 0 &\Rightarrow 17k + 1 > 0 \Rightarrow k > -\frac{1}{17} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} x > 0 \\ y > 0 \end{aligned}} \right\} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, 1, 2, 3$$

بنابراین معادله سیاله ۴ دسته جواب در مجموعه اعداد طبیعی دارد.



۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. ابتدا باقی مانده تقسیم عبارت داده شده را بر ۷ و ۸ به دست می آوریم:

$$24 \equiv 3 \pmod{7}, 21 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 27 \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{\text{به توان ۷}} 3^{21} \equiv -1 \pmod{7} \xrightarrow{\times 3^2} 3^{23} \equiv -9 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$\Rightarrow 24^{23} - 21^{23} \equiv 5 \pmod{7} \xrightarrow{\times 9} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 45 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$24 \equiv 0 \pmod{8}, 21 \equiv 5 \pmod{8}$$

$$5^2 \equiv 1 \pmod{8} \xrightarrow{\text{به توان ۱۱}} 5^{22} \equiv 1 \pmod{8} \xrightarrow{\times 5} 5^{23} \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow 24^{23} - 21^{23} \equiv -5 \equiv 3 \pmod{8}$$

$$\xrightarrow{\times 9} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 27 \equiv 4 \pmod{8}$$

$$\left. \begin{aligned} (24^{23} - 21^{23}) \times 9 &\equiv 3 \pmod{7} \\ (24^{23} - 21^{23}) \times 9 &\equiv 4 \pmod{8} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (24^{23} - 21^{23}) \times 9 \equiv 56 \pmod{56}$$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$11x + 15y = 209 \Rightarrow 11x \equiv 209 \pmod{15} \xrightarrow{\div 11} x \equiv 19 \pmod{15} \Rightarrow x \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow x = 4 - 15k$$

$$11(4 - 15k) + 15y = 209 \Rightarrow 15y = 165 + 165k \Rightarrow y = 11 + 11k$$

$$x + y \geq 0 \Rightarrow x + y = 15 - 4k \Rightarrow k \leq 3$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a^2 + 1 \equiv 6a - 3 \pmod{10} \Rightarrow a^2 - 6a + 4 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a^2 - 6a - 16 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow (a - 8)(a + 2) \equiv 0 \pmod{10}$$

$$\Rightarrow (a + 2)^2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a + 2 \equiv 0 \pmod{10} \Rightarrow a \equiv -2 \pmod{10} \Rightarrow a^2 - a \equiv (-2)^2 - (-2) = 6 \pmod{10}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$y \in \mathbb{Z} \rightarrow 2x - 1 \mid x + 3 \xrightarrow{\times 2} 2x - 1 \mid 7 \rightarrow 2x - 1 = \begin{cases} 1 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 4 \\ -1 \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -3 \\ 7 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 1 \\ -7 \rightarrow x = -3 \rightarrow y = 0 \end{cases} \quad \text{۴ نقطه}$$



۱۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$ax \equiv b \pmod{m} \xrightarrow{\text{شرط جواب}} (a, m) \mid b$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \wedge x \equiv n-1 \pmod{m} \rightarrow (\wedge, m) \mid n-1 \rightarrow d \mid n-1 & \xrightarrow{\times 2n} d \mid -2n-4 \\ \wedge x \equiv 2n^2+4 \pmod{m} \rightarrow (\wedge, m) \mid 2n^2+4 \rightarrow d \mid 2n^2+4 & \swarrow \times -1 \end{cases}$$

از طرفی: $d \mid n-1$ ، داریم:

$$\begin{cases} d \mid -2n-4 & \times 1 \\ d \mid n-1 & \times 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زوج } d} d \mid -6 \xrightarrow{\text{زوج } d} d = 2$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$15x + 21y = 9 \xrightarrow{\div 3} 5x + 7y = 3 \xrightarrow{\text{پیمانه ۵}} \begin{cases} 5x + 7y \equiv 3 \pmod{5} \\ 5x + 7y \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

$$2y \equiv 3 \pmod{5} \xrightarrow{\div 2} y \equiv 4 \pmod{5} : y = 5k + 4 < 1000 \rightarrow k < \frac{996}{5} = 199/... \rightarrow k_{\max} = 199$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری } y} 5x + 7(5k + 4) = 3 : x = -7k - 5 \xrightarrow{k=199} x = 7 \times (-199) - 5 = -1398$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه}} -x = 1398$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم رقم یکان از ۵! به بعد برابر صفر است. پس داریم:

$$(1! + 3! + 5! + \dots)(2! + 4! + \dots) \equiv (1 + 6)(2 + 4) \equiv 7 \times 6 \equiv 42 \equiv 2$$



۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$ax \equiv b \xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} (a, m) \mid b \quad \text{توجه:}$$

$$\begin{aligned} ax \equiv n^2 + 3n \pmod{5} &\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} (a, 5) \mid n^2 + 3n \xrightarrow{\times 2} d \mid 5n \xrightarrow{\times 2} d \mid -5 \\ ax \equiv 2n + 1 \pmod{5} &\xrightarrow{\text{شرط وجود جواب}} (a, 5) \mid 2n + 1 \xrightarrow{\times -n} d \mid 2n + 1 \xrightarrow{\times -5} d \mid -5 \end{aligned}$$

$$d = \begin{cases} 1 \\ 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a, 5) = 1 \\ \text{یا} \\ (a, 5) = 5 \rightarrow a = 5k \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a = 5k &\rightarrow \begin{cases} ax \equiv n^2 + 3n \pmod{5} : n^2 + 3n \equiv 0 \rightarrow \begin{cases} n \equiv 0 \\ \text{یا} \\ n + 3 \equiv 0 \end{cases} \quad (1) \\ ax \equiv 2n + 1 \pmod{5} \rightarrow 2n + 1 \equiv 0 : 2n \equiv -1 \equiv 4 \xrightarrow{\div 2} n \equiv -2 \quad (2) \end{cases} \\ \text{اشتراکی ندارند، پس } (a, 5) = 5 \text{ غ ق است.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a, 5) = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow 3d = 3$$

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\text{از طرفی: } \begin{cases} m! = 1 \times 2 \times \dots \times m \\ 30 = 2 \times 3 \times 5 \Rightarrow \min(m) = 5 \end{cases}$$

$$5^3 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان ۱۱۰}} 5^{330} \equiv 1 \xrightarrow{\times 5^2} 5^{332} \equiv 25$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر خارج قسمت و باقی مانده را به ترتیب با q و r نمایش دهیم، داریم:

$$a = 13q + r, \quad 0 \leq r < 13$$

$$q + r = 17 \Rightarrow q = 17 - r$$

$$\begin{aligned} a = 13q + r &= 13(17 - r) + r = 221 - 12r \Rightarrow a - 8 = 213 - 12r = 192 - 12r + 21 \\ &= 12(16 - r) + 21 \end{aligned}$$

با توجه به فرض، $0 \leq r \leq 12$ بوده یعنی فضای نمونه شامل ۱۳ عدد است. برای این که باقی مانده ی تقسیم $a - 8$ بر عدد ۳۶، برابر ۲۱ باشد، لازم است $16 - r$ مضرب ۳ شود که در این صورت مقادیر ۱، ۴، ۷ و ۱۰ برای r قابل قبول است، یعنی پیشامد تصادفی دارای ۴ عضو است، پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{4}{13}$ می باشد.



۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عددی مضرب ۸۸ است که مضرب ۸ و ۱۱ باشد، بنابراین داریم:

$$\overline{abaaba} \stackrel{\wedge}{=} \overline{aba} \stackrel{\wedge}{=} a + ۱۰b + ۱۰۰a \stackrel{\wedge}{=} ۱۰۱a + ۱۰b \stackrel{\wedge}{=} ۵a + ۲b \stackrel{\wedge}{=} ۰$$

$$\overline{abaaba} \stackrel{۱۱}{=} a - b + a - a + b - a \stackrel{۱۱}{=} ۰$$

عدد موردنظر همواره بر ۱۱ بخش پذیر است، پس کافی است ارقام a و b را به گونه ای تعیین کنیم که در شرط بخش پذیری بر ۸ صدق کنند.

و با توجه به شرط $\overline{۵a + ۲b} \stackrel{\wedge}{=} ۰$ قطعاً a زوج و هم چنین غیرصفر است، بنابراین داریم:

$$a = ۲ \Rightarrow ۲b + ۱۰ \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow ۲b \stackrel{\wedge}{=} -۱۰ \stackrel{\wedge}{=} ۶ \Rightarrow b \stackrel{\wedge}{=} ۳ \Rightarrow b = ۳$$

$$a = ۴ \Rightarrow ۲b + ۲۰ \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow ۲b \stackrel{\wedge}{=} -۲۰ \stackrel{\wedge}{=} ۴ \Rightarrow b \stackrel{\wedge}{=} ۲ \Rightarrow b = ۲$$

$$a = ۶ \Rightarrow ۲b + ۳۰ \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow ۲b \stackrel{\wedge}{=} -۳۰ \stackrel{\wedge}{=} ۲ \Rightarrow b \stackrel{\wedge}{=} ۱ \Rightarrow b = ۱, ۹$$

$$a = ۸ \Rightarrow ۲b + ۴۰ \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow ۲b \stackrel{\wedge}{=} -۴۰ \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow b \stackrel{\wedge}{=} ۰ \Rightarrow b = ۰, ۸$$

بنابراین ۶ عدد با مشخصات موردنظر وجود دارد.

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

تعداد مقسوم علیه های طبیعی عدد صحیح $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ برابر $(\alpha_1 + ۱)(\alpha_2 + ۱) \dots (\alpha_k + ۱)$ است،
بنابراین داریم:

$$x = ۶^m \times ۱۰^n = (۲ \times ۳)^m \times (۲ \times ۵)^n = ۲^{m+n} \times ۳^m \times ۵^n$$

$$x \text{ تعداد مقسوم علیه های } = (m + n + ۱)(m + ۱)(n + ۱)$$

$$\Rightarrow ۱۵x = ۳ \times ۵ \times ۲^{m+n} \times ۳^m \times ۵^n = ۲^{m+n} \times ۳^{m+۱} \times ۵^{n+۱}$$

$$۱۵x \text{ تعداد مقسوم علیه های } = (m + n + ۱)(m + ۲)(n + ۲)$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$(m + n + ۱)(m + ۲)(n + ۲) - (m + n + ۱)(m + ۱)(n + ۱) = ۳۵$$

$$\Rightarrow (m + n + ۱)[(m + ۲)(n + ۲) - (m + ۱)(n + ۱)] = ۳۵$$

$$\Rightarrow (m + n + ۱)(m + n + ۳) = ۵ \times ۷ \Rightarrow m + n = ۴$$

$$x \text{ بزرگ ترین مقدار } : \begin{cases} m = ۰ \\ n = ۴ \end{cases} \Rightarrow \max(x) = ۱۰^۴ = ۱۰۰۰۰$$

$$x \text{ کوچک ترین مقدار } : \begin{cases} m = ۴ \\ n = ۰ \end{cases} \Rightarrow \min(x) = ۶^۴ = ۱۲۹۶$$

$$\text{اختلاف دو عدد} = ۱۰۰۰۰ - ۱۲۹۶ = ۸۷۰۴$$



۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n = aq = 3^2 \times q \xrightarrow[q = 2^1 \times k^3]{\text{باید}} n = 2^1 k^3$$

$$\Rightarrow 100 \leq 2^1 k^3 < 10000 \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} \frac{10}{\sqrt[3]{10}} \leq 3k < 10 \sqrt[3]{10} \Rightarrow \frac{10}{2/1} \leq 3k < 10 \times 2/1$$

$$\Rightarrow 4/76 \leq 3k < 21 \Rightarrow 1/58 \leq k < 7$$

بنابراین تنها مقادیر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ برای k قابل قبول است، یعنی ۵ عدد با این مشخصات وجود دارد.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. کوچک‌ترین عدد به صورت $n!$ که مضرب ۳۶ باشد، عدد $6!$ است، پس داریم:
 $10 - m = 6 \Rightarrow m = 4$

بنابراین باید باقی‌مانده‌ی تقسیم 4^{123} را بر ۱۵ به دست آوریم:

$$4^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{به توان ۶۱}} 4^{122} \equiv 1 \xrightarrow{\times 4} 4^{123} \equiv 4$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a = 11q + r, \quad 0 \leq r < 11$$

$$q = r + 3 \Rightarrow a = 11(r + 3) + r = 12r + 33 \Rightarrow a - 9 = 12r + 24 = 12(r + 2)$$

$$0 \leq r < 11 \Rightarrow 0 \leq r < 11$$

بنابراین برای r یازده مقدار ۰ تا ۱۰ قابل قبول است. به ازای مقادیر زوج r ، $r + 2$ نیز زوج بوده و عدد $a - 9$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است، یعنی اعضای فضای نمونه شامل مقادیر ۰، ۲، ۴، ۶، ۸ و ۱۰ هستند و در نتیجه احتمال موردنظر برابر $\frac{6}{11}$ است.

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. عدد \overline{aba} بر ۱۲ بخش‌پذیر است، پس باید بر ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد. a حتماً رقمی زوج و غیرصفر است.

$$\text{توجه: } 0 \leq a, b \leq 9$$

$$\begin{cases} \overline{aba} \equiv 0 \rightarrow \cancel{a}^{\overline{1}} a + b \equiv 0 : a \equiv b \\ \overline{aba} \equiv 0 \rightarrow \overline{b}^{\overline{4}} a \equiv 0 \rightarrow 2b + a \equiv 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{عددگذاری}} \begin{cases} a_{\min} = 2 \rightarrow b = 5 \\ a_{\max} = 8 \rightarrow b = 8 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$10b + a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Min: } 252 \\ \text{Max: } 888 \end{cases} \Rightarrow \text{میانگین} = 570$$



۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر عدد A به صورت عامل‌های اول $P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_k^{\alpha_k}$ تجزیه شود، تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت آن از رابطه‌ی $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$ به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$x = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } x = (m+1)(n+1)$$

$$\frac{x}{40} = \frac{2^m \times 5^n}{2^3 \times 5} = 2^{m-3} \times 5^{n-1} \Rightarrow \frac{x}{40} = \text{تعداد مقسوم‌علیه‌های } (m-2)(n)$$

$$(m+1)(n+1) - (m-2)n = 12 \Rightarrow mn + m + n + 1 - mn + 2n = 12 \Rightarrow m + 3n = 11$$

$$\begin{cases} m-3 \geq 0 \Rightarrow m \geq 3 \\ n-1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1 \end{cases}$$

از طرفی داریم:

برای کوچک بودن عدد x ، باید توان عدد ۵ تا حد امکان کوچک باشد که کم‌ترین مقدار آن برابر ۱ است، پس $n = 1$

$$\min(x) = 2^8 \times 5 = 1280$$

و $m = 8$ بوده و در نتیجه داریم:

تذکر: این سؤال مربوط به کاربردهای قضیه‌ی بنیادی حساب است.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$n = 18q = 3^2 \times 2^1 \times q \xrightarrow{\text{باید } q = 2^1 \times k^2} n = 3^2 \times 2^2 \times k^2 \rightarrow 10.4 \leq 3^2 \times 2^2 \times k^2 < 10.5$$

$$\xrightarrow{n, 5 \text{ رقمی}} 10.4 \leq n < 10.5$$

$$\xrightarrow{\text{جذر}} 100 \leq 3 \times 2 \times k < 316 \xrightarrow{\div 6} 16/... \leq k < 52/... \rightarrow k = \begin{cases} 17 \\ 18 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 52 \end{cases}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 20$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5)$$

$$\times 2^4 \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5) = 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 4 \times 1 = 36$$

روش دوم: تعداد عوامل عدد اول p در $n!$ برابر است با $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \dots$ پس کافی است عوامل عدد اول

۲ تا ۱۹ در $20!$ را تعیین کنیم. به‌طور مثال تعداد عوامل اول ۲ برابر است با:

$$\left[\frac{20}{2} \right] + \left[\frac{20}{4} \right] + \left[\frac{20}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] = 10 + 5 + 2 + 1 = 18 = a_1$$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به ارزش مکانی و بسط اعداد داده شده می‌توان به جواب رسید:

$$\begin{aligned} \overline{aa} &= a + 10a = 11a \xrightarrow{\times 5} m = \overline{aa} = 55a \\ m &= 5\overline{aa} = 55a \Rightarrow (\overline{5aa})aa = (\overline{55a})aa = 100(55a) + 10a + a = 5511a \\ &= 1837 \times 3a \equiv 0 \pmod{1837} \end{aligned}$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 105 &= 5 \times 21 = 5 \times 3 \times 7 = \overbrace{(2^2 + 1)(2^2 - 1)(2^3 - 1)}^{(2^4 - 1)} \\ a^n - 1 &= (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = (a - 1)q \\ 2^{4k} - 1 &= (2^4)^k - 1 = (2^4 - 1) \times q \\ 2^{3k'} - 1 &= (2^3)^{k'} - 1 = (2^3 - 1) \times q' \\ \text{پس } n &\text{ هم مضرب } 4 \text{ باشد که بتوانیم بنویسیم:} \\ \text{و } n &\text{ مضرب } 3 \text{ باشد که بتوانیم بنویسیم:} \\ \text{پس } n &\text{ هم مضرب } 4 \text{ و هم مضرب } 3 \text{ پس مضرب } 12 \text{ است:} \\ \left[\frac{99}{12} \right] - \left[\frac{9}{12} \right] &= 8 \quad \text{تعداد ارقام} \end{aligned}$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به مفهوم ب. ب. م می‌توان جواب را یافت:

$$\begin{aligned} (3n^2 - 2n + 6, 3n + 5) &= d, d \in \mathbb{N} - \{1\} \\ \begin{cases} d | 3n^2 - 2n + 6 \\ d | (3n + 5)n \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} d | 3n^2 - 2n + 6 \\ d | 3n^2 + 5n \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d | 7n - 6 \\ d | 3n + 5 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} \times 3 \\ \times (-7) \end{smallmatrix}} \begin{cases} d | 7n - 6 \\ d | -53 \end{cases} \xrightarrow{d \neq 1} d = 53 \end{aligned}$$

۲۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} m &= \text{رقمی } 3 \Rightarrow 100 \leq m < 1000 \Rightarrow 100 \leq 29b + 17 < 1000 \Rightarrow 2/8 \leq b < 33/8 \\ \begin{cases} m = b \times 29 + 17, 0 \leq 17 < b \\ m = 5k \Rightarrow m \equiv 0 \Rightarrow 29b + 17 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 2 \end{cases} \end{aligned}$$

اشتراک
 $\longrightarrow b = 22, 27, 32 \quad (\text{جواب } 3)$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$5^3 \equiv 125 \pmod{41} \xrightarrow{\text{به توان } 6} 5^{18} \equiv 64 \pmod{41} \xrightarrow{\times 5^2} 5^{20} \equiv 575 \pmod{41} \equiv 1$$



۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. معادله سیاله را به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم.

$$9x + 13y = 725 \Rightarrow 13y \equiv 725 \Rightarrow 4y \equiv 5 \equiv -4 \xrightarrow{\div 4} y \equiv -1 \Rightarrow y = 9k - 1$$

حالا y را در معادله قرار داده و x را پیدا می‌کنیم:

$$9x + 13(9k - 1) = 725 \Rightarrow 9x + 117k - 13 = 725 \Rightarrow 9x = -117k + 738 \Rightarrow x = -13k + 82$$

با توجه به این که جواب‌های طبیعی معادله خواسته شده است، پس x و y باید بزرگ‌تر از صفر باشند.

$$x > 0 \Rightarrow -13k + 82 > 0 \Rightarrow 13k < 82 \Rightarrow k < \frac{82}{13} \approx 6.3 \quad (1)$$

$$y > 0 \Rightarrow 9k - 1 > 0 \Rightarrow k > \frac{1}{9} \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) مقادیر قابل قبول برای k عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم سمت راست رابطه عاد کردن را در هر عدد صحیح می‌توان ضرب کرد. داریم:

$$\begin{array}{l} \alpha \mid 5n + 4 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 11} \alpha \mid 55n + 44 \\ \alpha \mid 11n + 3 \xrightarrow{\text{سمت راست } \times 5} \alpha \mid 55n + 15 \end{array} \xrightarrow{(-)} \alpha \mid 29$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{cases} 1 & \text{غ ق ق} \\ 29 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 29$$

یعنی هر دو عدد بر ۲۹ بخش پذیرند. بنابراین:

$$5n + 4 \equiv 0 \Rightarrow 5n \equiv -4 \equiv 25 \xrightarrow{\div 5} n \equiv 5 \Rightarrow n = 29k + 5$$

می‌خواهیم n عددی طبیعی و دورقمی باشد:

$$10 \leq n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 29k + 5 \leq 99 \Rightarrow k = 1, 2, 3$$

یعنی به ازای سه عدد طبیعی رابطه برقرار است.

۳۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اول (۴۲۹، ۶۲۷) را پیدا می‌کنیم. برای این کار دو عدد را تجزیه می‌کنیم:

$$(627, 429) = (3 \times 11 \times 19, 3 \times 11 \times 13) = 33$$

حالا کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۳۳ و ۱۵۴ را پیدا می‌کنیم:

$$[33, 154] = [3 \times 11, 11 \times 14] = 3 \times 11 \times 14 = 462$$

۳۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 7^{13} + a \equiv 0 \Rightarrow -3 + a \equiv 0 \Rightarrow a \equiv 3 \\ 7^2 = 49 \equiv 3 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 21 \equiv -2 \xrightarrow{\text{توان } 4} 7^{12} \equiv 16 \equiv -7 \xrightarrow{\times 7} 7^{13} \equiv -49 \equiv -3 \end{cases}$$



۳۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$220x + 140y = 19000 \xrightarrow{\div 20} 11x + 7y = 950 \xrightarrow{\text{پیمانه 7}} \cancel{7}^1 x + \cancel{7}^1 y = \cancel{19000}^3$$

$$x \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow x = 7q + 3$$

$$x \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y = -11q + 131 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 7q + 3 \geq 0 \Rightarrow q \geq -\frac{3}{7} \\ y \geq 0 \rightarrow -11q + 131 \geq 0 \Rightarrow q \leq \frac{131}{11} = 11/00 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}} q = 0, 1, 2, \dots, 11 \Rightarrow \text{حالت ۱۲}$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} \alpha | 13n + 3 \xrightarrow{\times 7} \alpha | -31 : \alpha \begin{cases} 1 \times \\ 31 \checkmark \end{cases} \\ \alpha | 7n + 4 \xrightarrow{\times (-13)} \end{array}$$

$$31 | 7n + 4 \Rightarrow 7n + 4 \equiv 0 \pmod{31} \Rightarrow 7n \equiv -4 \pmod{31} \Rightarrow 7n \equiv 27 \pmod{31} \xrightarrow{\div 7} n \equiv 5 \pmod{31} \xrightarrow{\text{اولین طبیعی}} n = 26$$

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{array}{l} a \equiv 5 \pmod{6} \Rightarrow a \equiv 29 \pmod{66} \\ a \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 29 \pmod{66} \Rightarrow R = 29 \end{array}$$

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a \equiv b \pmod{[m,n]}$$

$$a \equiv b \pmod{n}$$

توجه: