

# گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

## یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

[www.Dyavari.com](http://www.Dyavari.com)

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴





	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>







۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$k = a(a + 1) \Rightarrow 4k + 1 = 4a(a + 1) + 1 \\ = 4a^2 + 4a + 1 = (2a + 1)^2 \text{ مربع کامل است.}$$

گزینه‌های دیگر مثال نقض دارند.

- ۱)  $a = 1, b = 2 \Rightarrow a \times b = 2$  مربع کامل نیست.  
۳)  $a = 1, b = 2 \Rightarrow 4k + 1 = (4 \times 1 \times 2) + 1 = 9$  زوج نیست  
۴)  $a = 1, b = 2 \Rightarrow 4k - 1 = (4 \times 1 \times 2) - 1 = 7$  مربع کامل نیست.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

شرط تشکیل مثلث این است که جمع هر دو ضلع از ضلع سوم بزرگ‌تر باشد.

$$\left. \begin{array}{l} 4 + 7 > x \Rightarrow x < 11 \\ 4 + x > 7 \Rightarrow x > 3 \\ 7 + x > 4 \Rightarrow x > -3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 3 < x < 11$$

پس طول ضلع سوم نمی‌تواند ۳ باشد.  
روش دوم:

$$7 - 4 < x < 7 + 4 \Rightarrow 3 < x < 11$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} 5 \quad 5 \\ a \equiv 1 \equiv -4 \\ 3 \quad 3 \\ a \equiv 2 \equiv -4 \\ 7 \quad 7 \\ a \equiv 2 \equiv -4 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv [5, 3, 7] \equiv -4 \Rightarrow a \equiv -4$$

$$\Rightarrow a = 105q - 4 \xrightarrow{q=10 \text{ اولین چهاررقمی}} a = 1046$$

$$\Rightarrow a \equiv 11 \quad 11 \\ \Rightarrow a \equiv 6 - 4 + 0 - 1 \equiv 1$$

پس باقی‌مانده‌ی  $a = 1046$  بر ۱۱ برابر ۱ می‌باشد.





۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

رقم یکان هر عدد برابر است با باقی مانده تقسیم آن عدد بر ۱۰.

$$n = 1 \rightarrow 1! \equiv 1$$

$$n = 2 \rightarrow 1! + 2! \equiv 3$$

$$n = 3 \rightarrow 1! + 2! + 3! \equiv 9$$

$$n = 4 \rightarrow 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 1 + 2 + 6 + 4 \equiv 3$$

اما اگر  $n \geq 5$  باشد.

$$A = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots \equiv 3$$

هم نهشت صفر

پس رقم یکان برابر ۱ یا ۳ یا ۹ می تواند باشد.

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مثال نقض باید در فرض درست دربیاید، اما حکم را رد کند، پس کافی است دو عدد که یکی اول و دیگری غیراول است پیدا کنیم که مجموع آنها مربع کامل باشد، که فقط گزینه (۲) این شرایط را دارد.

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

کافی است عدد  $2 \times 7^{272}$  را بسازیم:

$$7^{18} \equiv 1 \xrightarrow[\text{طرفین به توان ۱۵}]{\text{طرفین } 7^2 \times} 7^2 \times (7^{18})^{15} \equiv 1 \times 7^2 \equiv 11$$

$$7^{272} \equiv 49 \equiv 11 \xrightarrow[\text{طرفین } 2 \times]{\text{طرفین } 7^{272}} 2 \times 7^{272} \equiv 22 \Rightarrow 22 + a \equiv 0 \Rightarrow a \equiv -22 \equiv 16$$

$a_{\min} = 16$  دورقمی

مجموع ارقام  $= 1 + 6 = 7$

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

در روش برهان خلف، خلاف حکم را در نظر گرفته و به تناقض با فرض یا امر بدیهی می رسیم. خلاف حکم یعنی فرض می کنیم  $a < 0$  بوده ولی  $a + \frac{1}{a} > -2$  باشد، داریم:

$$a + \frac{1}{a} > -2 \xrightarrow{\times a} a^2 + 1 < -2a \Rightarrow a^2 + 2a + 1 < 0 \Rightarrow (a + 1)^2 < 0$$

رابطه آخر همواره نادرست است (تناقض)، پس خلاف حکم، نادرست و خود حکم، درست است.





۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$17x + 11y = 21 \Rightarrow 17x \equiv 21 \Rightarrow -5x \equiv 10 \Rightarrow x \equiv -2 \\ \Rightarrow x = -2 + 11q, q \in \mathbb{Z}$$

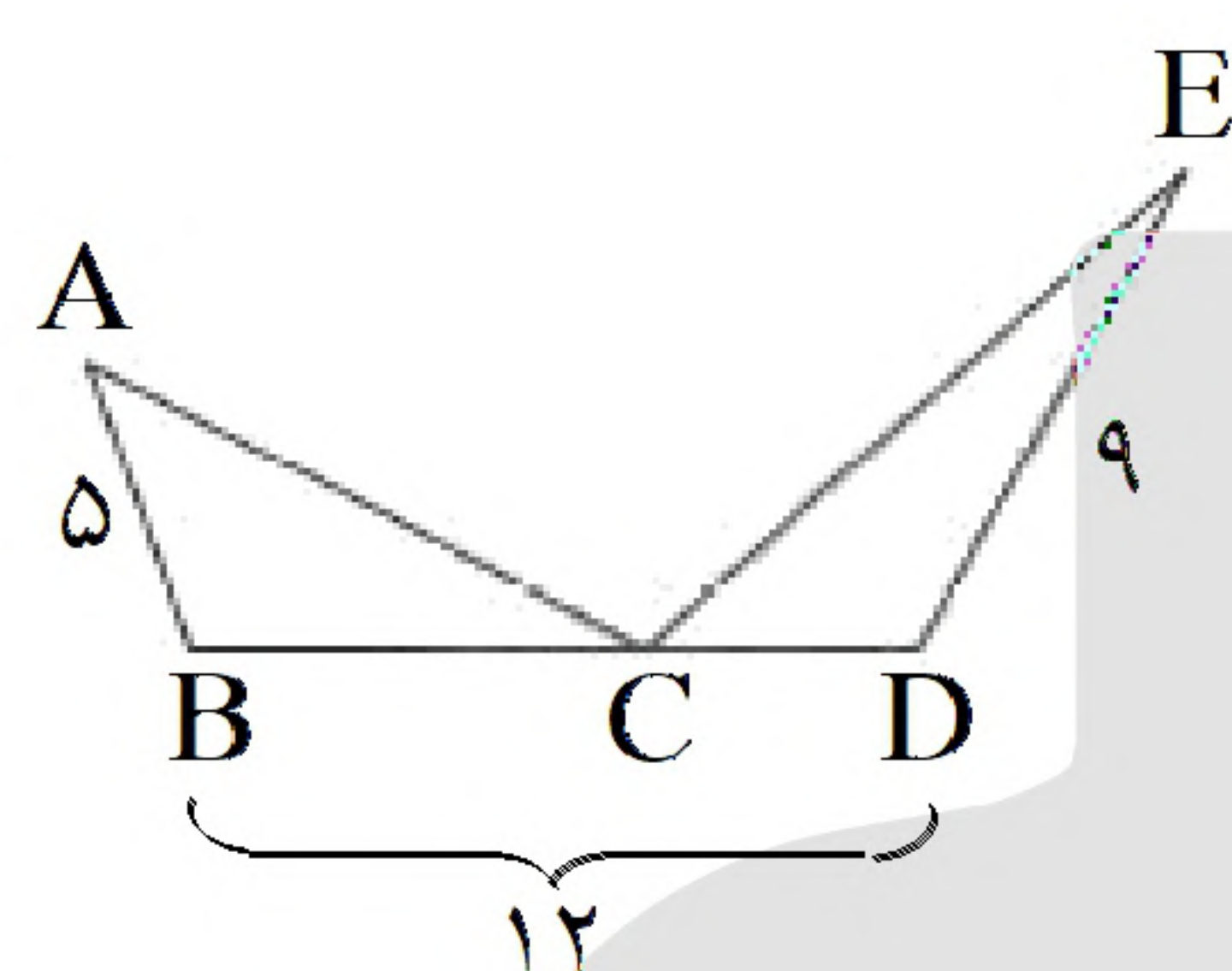
حال  $y$  را محاسبه می‌کنیم:

$$17(-2 + 11q) + 11y = 21 \Rightarrow y = 5 - 17q, q \in \mathbb{Z}$$

پس  $x + y = 3 - 6q$  می‌باشد. اگر  $q = -1$  باشد،  $x + y = 9$  می‌شود.

۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق قضیه‌ی نابرابری در مثلث، داریم:



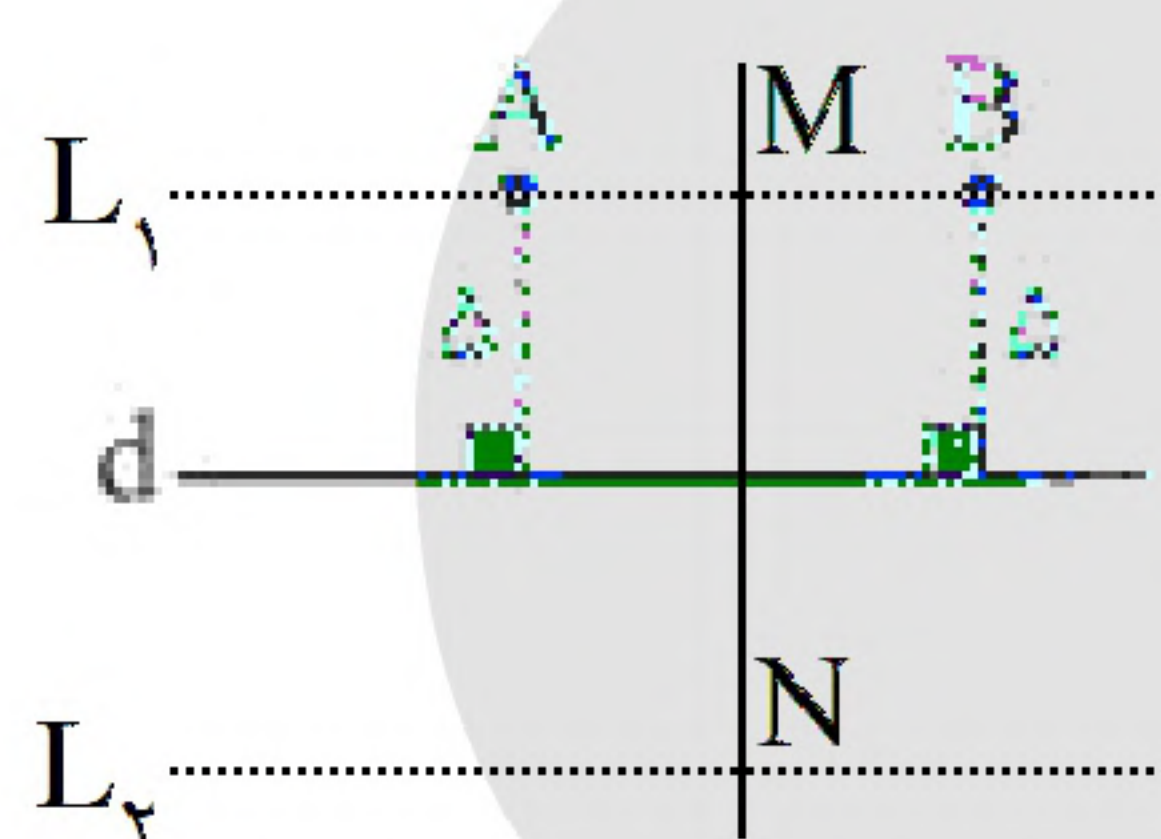
$$\triangle ABC : AC < AB + BC \quad (1)$$

$$\triangle ECD : EC < ED + CD \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow AC + EC < \underbrace{AB}_{5} + \underbrace{ED}_{9} + \underbrace{BC + CD}_{12} \Rightarrow AC + EC < 26$$

$$\Rightarrow \max(AC + EC) = 25$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

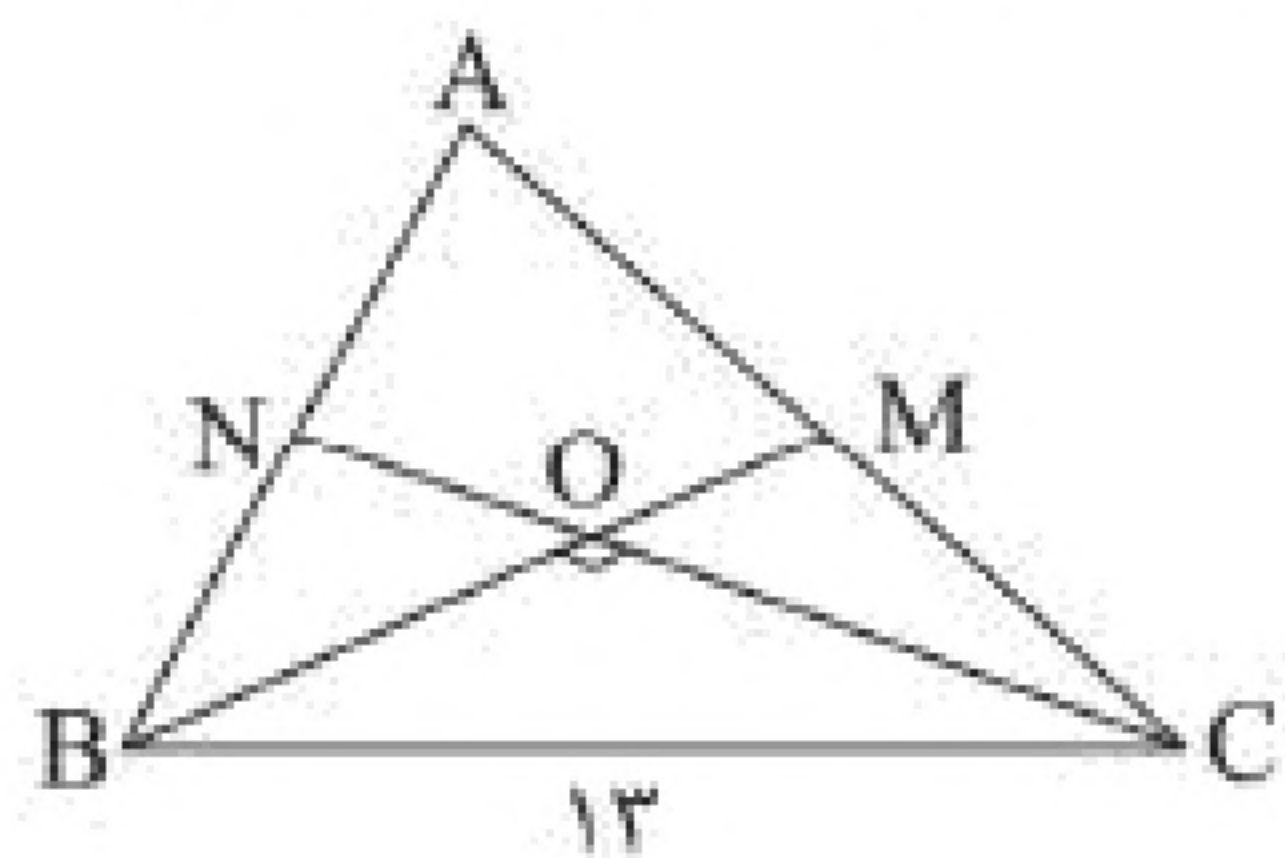


نقطاتی که از  $d$  به فاصله‌ی ۵ باشند، دو خط  $L_1$  و  $L_2$  به فاصله‌ی ۵، موازی با  $d$  و در دو طرف آن هستند.

نقطاتی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله باشند، عمودمنصف پاره‌خط  $AB$  است. مطابق شکل این عمودمنصف، خطوط  $L_1$  و  $L_2$  را در ۲ نقطه‌ی  $M$  و  $N$  قطع می‌کند. پس مسأله دو جواب دارد.

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

در شکل میانه‌های  $BM = m_b = 7/5$  و  $CN = m_c = 18$  است. اگر  $O$  نقطه‌ی تلاقی دو میانه باشد، آن‌گاه داریم:



$$OB = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3}(7/5) = 5$$

$$OC = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3}(18) = 12$$

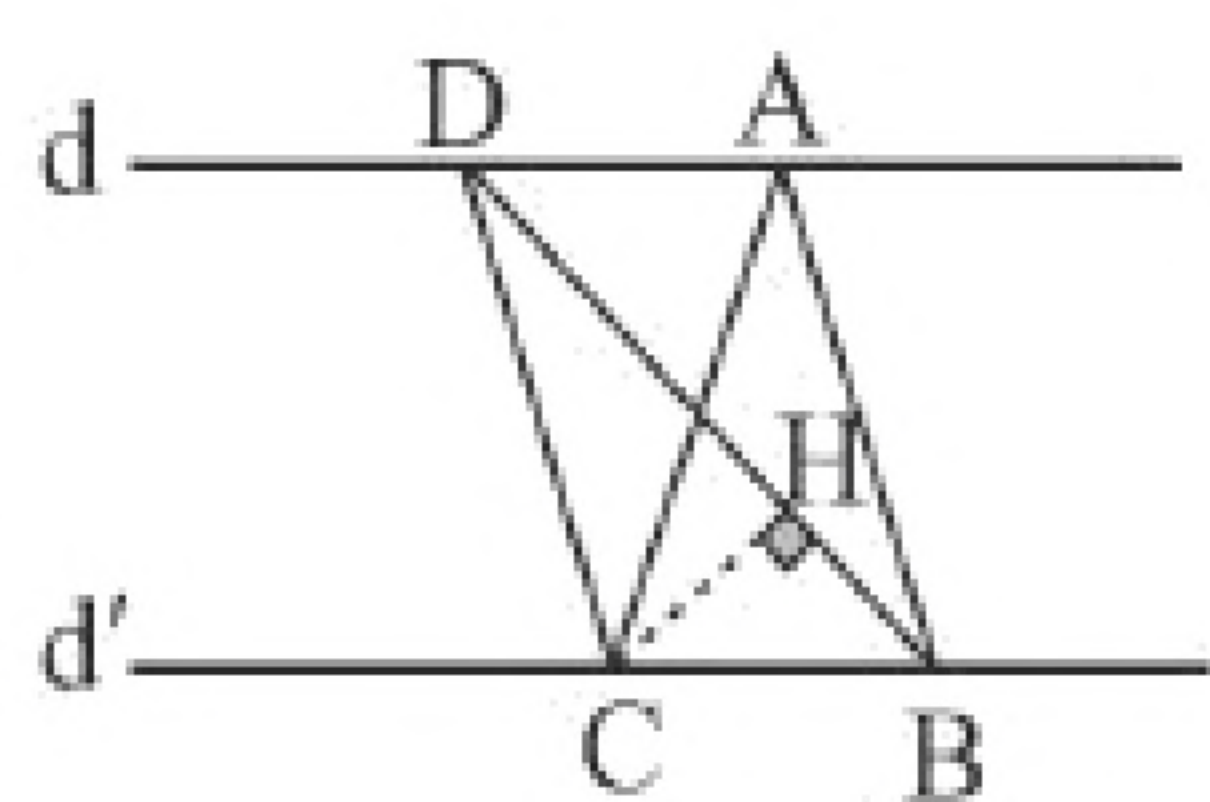
با توجه به این‌که طول اضلاع مثلث  $OBC$  در رابطه‌ی فیثاغورس صدق می‌کنند ( $13^2 = 12^2 + 5^2$ )، پس مثلث  $OBC$  قائم‌الزاویه است. در ضمن می‌دانیم مساحت مثلث  $OBC$ ،  $\frac{1}{3}$  مساحت مثلث  $ABC$  است، بنابراین:

$$S_{\triangle ABC} = 3S_{\triangle OBC} = 3\left(\frac{1}{2}OB \times OC\right) = \frac{3}{2} \times 5 \times 12 = 90$$





۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.



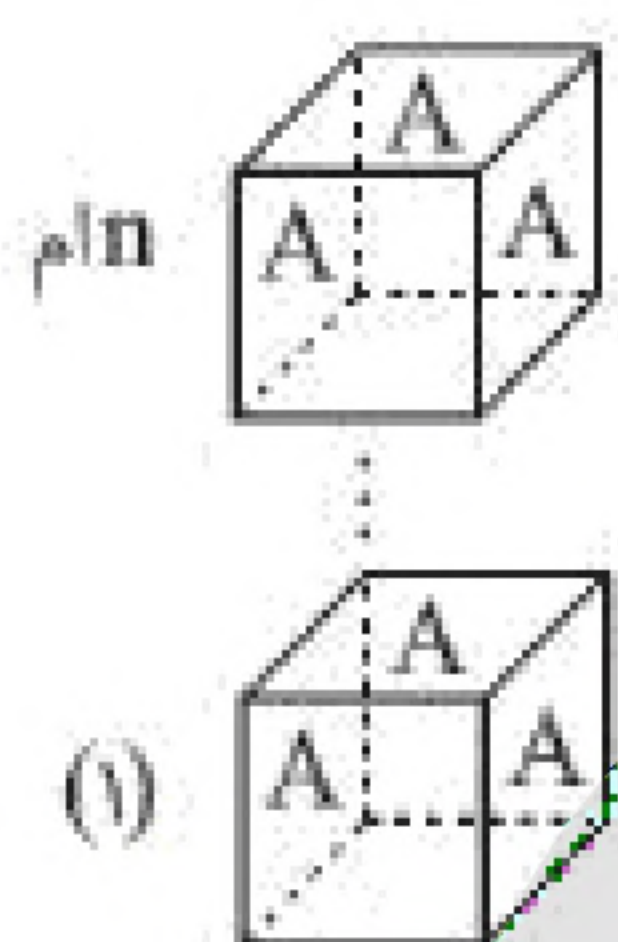
مثلث‌های  $\triangle ABC$  و  $\triangle DBC$ ، دارای ارتفاع (فاصله‌ی دو خط  $d$  و  $d'$ ) و قاعده‌ی برابر  $(BC)$  می‌باشند، پس هم‌مساحتند.

$$S_{\triangle DBC} = S_{\triangle ABC} = 12$$

$$S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} CH \times BD \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times 4 \times BD \Rightarrow BD = 6$$

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

چون مکعب‌ها به صورت ستونی روی هم چیده شده است و مکعب اولی روی زمین است، پس روی ۴ وجه هر مکعب حرف A دیده می‌شود. تا این‌جا روی  $4n$  وجه حرف A دیده می‌شود، اما روی وجه بالایی مکعب n ام هم A دیده می‌شود، پس در کل  $4n + 1$  حرف A دیده می‌شود.



۱۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

اگر  $(a, b) = d$  باشد،  $d|a$  و  $d|b$ ، پس  $d|a+b$ ، پس  $((a, b), a+b) = d$ . همچنین  $d|[a, b]$ ، پس ب‌م این دو عدد برابر d می‌شود، پس  $d = 6$ . حال  $dq_1 = a$  و  $dq_2 = b$ ، پس:

$$(6q_1)^2 - (6q_2)^2 = 36(q_1^2 - q_2^2)$$

حاصل ضرب باید مضرب ۳۶ باشد که در بین گزینه‌ها فقط ۱۰۸ این ویژگی را دارد.

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

توجه: هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ فرم  $6q \pm 1$  دارد که مربع آن‌ها فرم  $24k + 1$  دارد، ولی ۲ و ۳ در این قسمت مثال نقض هستند.

از طرفی عدد  $2^{2^n} + 1$  به ازای  $n = 5$ ، عدد اول نیست. (صفحه اول کتاب درسی)

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\overline{ab3}^{11} \equiv 3 - b + a - \overline{a-b-5}^{11}$$

$$\overline{a \cdot b7}^{11} \equiv 7 - b + a - \overline{7-a-b}^{11}$$

$$\overline{ab3}^{11} \equiv \overline{a \cdot b7}^{11} \Rightarrow a - b - 5 \equiv 7 - a - b \Rightarrow 2a \equiv 12$$

$$\xrightarrow{\div 2} a \equiv 6 \Rightarrow a = 6$$

$$(2, 11) = 1$$

$$\overline{5aa23}^3 \equiv \overline{56623}^3 \equiv 5 + 6 + 6 + 2 + 3 \equiv 22 \equiv 1$$





۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + \frac{b^2}{4} + \frac{3b^2}{4} = a^2 + ab + b^2$$

گزینه (۲): اگر  $a < 0$ ، سمت راست، نادرست ولی سمت چپ، درست است.

گزینه (۳): اگر  $a = 2$  و  $b = -2$  باشد، سمت راست، درست ولی سمت چپ، نادرست است.

گزینه (۴): اگر  $x = 0$  و  $y = 1$  باشد، سمت راست، نادرست ولی سمت چپ، درست است.

۱۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a = b \times 25 + 20, r < b \Rightarrow 20 < b \Rightarrow 21 \leq b$$

$$\begin{aligned} a \equiv 3 &\Rightarrow 25b + 20 \equiv 3 \Rightarrow 25b \equiv -17 \Rightarrow -3b \equiv -24 \Rightarrow b \equiv 8 \equiv 11 \\ &\Rightarrow b = vk + 1 \end{aligned}$$

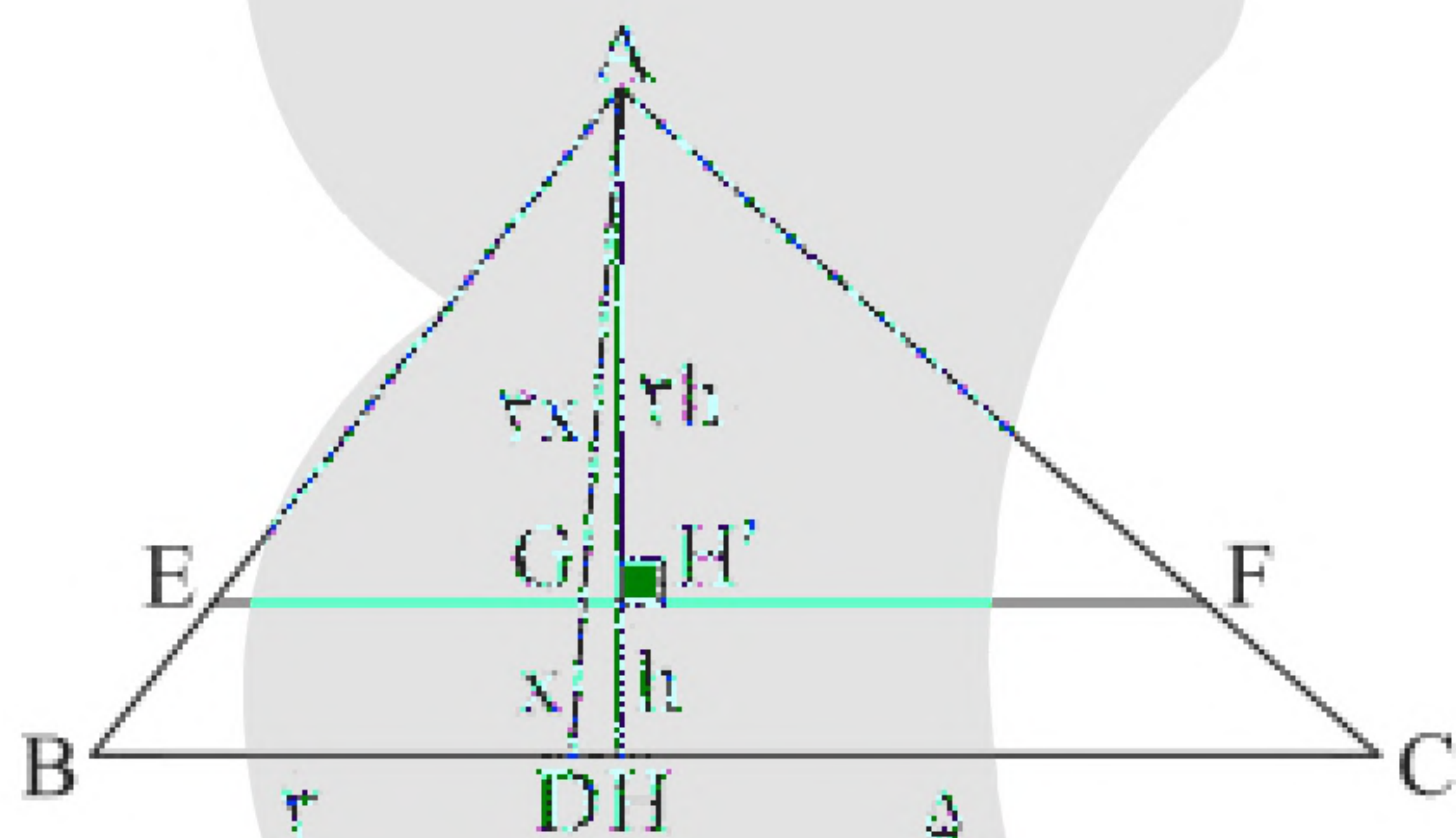
از طرفی  $b \leq 21$ ، بنابراین:

$$b_{\min} = 7 \times 3 + 1 = 22 \Rightarrow a_{\min} = 22 \times 25 + 20 = 570$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5 + 7 + 0 = 12$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

فرض کنیم  $GD = x$ ، در این صورت  $GA = 3x$ ، با رسم ارتفاع  $AH$  و استفاده از قضیه تالس نتیجه می‌گیریم  $HH' = h$  و  $AH' = 3h$  داریم:



$$\begin{aligned} \triangle ABD : EG \parallel BD &\xrightarrow{\text{تالس}} \frac{EG}{BD} = \frac{AG}{AD} \\ \Rightarrow \frac{EG}{3} &= \frac{3x}{4x} \Rightarrow EG = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

پس:

$$S_{\triangle AEG} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(3h)(EG) = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}(3h)\left(\frac{9}{4}\right) = 2 \Rightarrow h = \frac{16}{27}$$

از طرف دیگر:

$$EF \parallel BC \Rightarrow \triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{EF}{8} = \frac{3h}{4h} \Rightarrow EF = 6 \Rightarrow GF = 6 - \frac{9}{4} = \frac{15}{4}$$

بنابراین:

$$S_{DGFC} = \frac{1}{2}h(GF + DC) = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{27}\right)\left(\frac{15}{4} + 5\right) = \frac{8}{27} \times \frac{35}{4} = \frac{70}{27}$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

مثلث قائم‌الزاویه برای گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ می‌تواند مثال نقض باشد اما برای گزینه‌ی ۳ چون خودش حداقل یک زاویه‌ی بیشتر از  $60^\circ$  دارد، نمی‌تواند مثال نقض باشد.





۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.  
۲۱ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ که بر ۶ بخش پذیر نیست. (مثال نقض)  
برای اثبات نادرستی از مثال نقض استفاده می کنیم.

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.  
نکته:

$$a \equiv^m b \wedge b \equiv^m c \Rightarrow a \equiv^m c$$

$$a \equiv^m b \wedge c \equiv^m d \Rightarrow a \pm c \equiv^m b \pm d$$

(ب)

$$\left. \begin{array}{l} a^3 \equiv^m c^2 \xrightarrow{\times c} a^3 c \equiv^m c^5 \\ c^5 \equiv^m b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow a^3 c \equiv^m b^2$$

(ج)

$$\left. \begin{array}{l} a^3 \equiv^m c^2 \xrightarrow{\text{توان } 2} a^6 \equiv^m c^4 \\ c^5 \equiv^m b^2 \xrightarrow{\times c^3} c^8 \equiv^m b^2 c^3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^6 \equiv^m b^2 c^3$$

(الف)

$$\left. \begin{array}{l} a^3 c \equiv^m b^2 \\ a^6 \equiv^m b^2 c^3 \end{array} \right\} \Rightarrow a^3 c + a^6 \equiv^m b^2 + b^2 c^3 \Rightarrow a^3 (c + a^3) \equiv^m b^2 (1 + c^3)$$

هر سه رابطه برقرارند.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.  
با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال خواهیم داشت:

$$2000x + 5000y = 29000 \xrightarrow{\div 1000} 2x + 5y = 29 \quad (1)$$

اگر این معادله را به معادله هم‌نهمی تبدیل کنیم، خواهیم داشت:

$$5y \equiv 29 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 2k + 1$$

y به دست آمده را در رابطه (۱) جایگذاری می کنیم و خواهیم داشت:

$$2x + 10k + 5 = 29 \Rightarrow 2x = -10k + 24 \Rightarrow x = -5k + 12$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

$$\quad \quad \quad x + y = 13 \quad \quad \quad x + y = 10 \quad \quad \quad x + y = 7$$





۲۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

اولاً:  $۸۸ = ۱۱ \times ۸$ . حال باید ارقام را یک در میان مثبت و منفی کنیم تا جمع حاصل مضرب ۱۱ شود.  
ثانیاً: اگر عددی مضرب ۸ باشد قطعاً مضرب ۴ است، پس دو رقم سمت راست باید مضرب ۴ باشد. عددی مضرب ۸ است که سه رقم سمت راست، مضرب ۸ باشد. برای این که مضرب ۴ باشد باید  $a = ۲$  یا  $a = ۶$  باشد.

$$a = ۲ \Rightarrow \overline{۱۲۲b۵۲} \stackrel{۱۱}{=} ۰ \Rightarrow ۲ - ۵ + b - ۲ + ۲ - ۱ \stackrel{۱۱}{=} ۰ \Rightarrow b = ۴$$

$$a = ۶ \Rightarrow \overline{۱۶۲b۵۶} \stackrel{۱۱}{=} ۰ \Rightarrow ۶ - ۵ + b - ۲ + ۶ - ۱ \stackrel{۱۱}{=} ۰ \Rightarrow b = ۷$$

ولی به ازای هیچ کدام از اعداد به دست آمده، ۳ رقم سمت راست مضرب ۸ نیست.

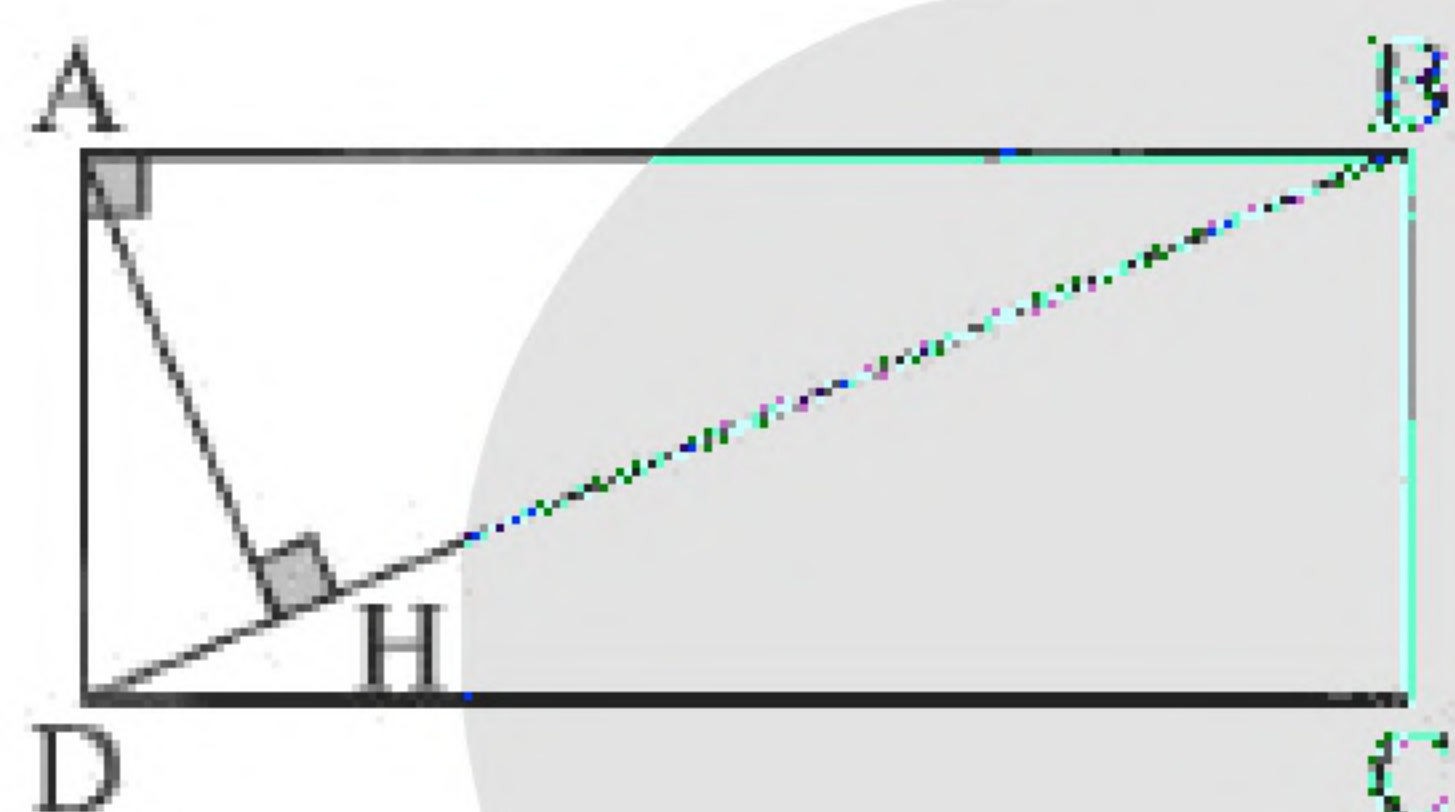
«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه  $\triangle ABD$ ، داریم:

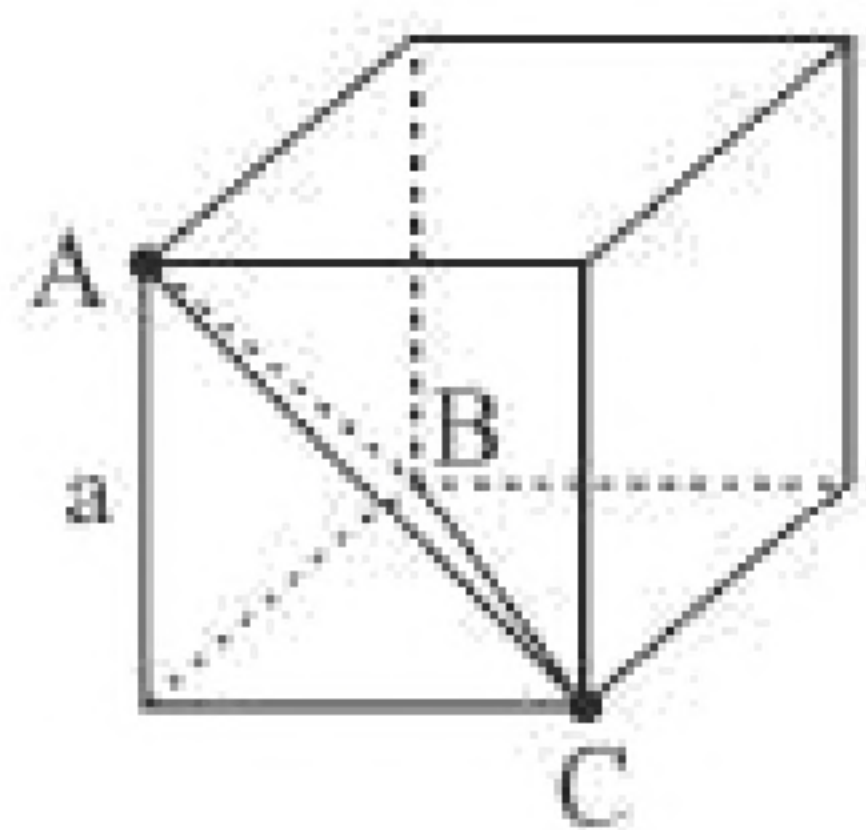
$$AH^2 = BH \times DH = ۱۴/۴ \times ۲/۵$$

$$\Rightarrow AH = \frac{۱۲ \times ۵}{۱۰} = ۶$$



۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مقطع حاصل از صفحه گذرا از رأس های A، B و C مثلث متساوی الاضلاع ABC است زیرا اگر ضلع مکعب a باشد، آن گاه  $AB = AC = BC = a\sqrt{۲}$  و مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع AB برابر  $\frac{\sqrt{۳}}{۴}AB^2$  است بنابراین:



$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{۱۲} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۴}AB^2 = ۲\sqrt{۳}$$

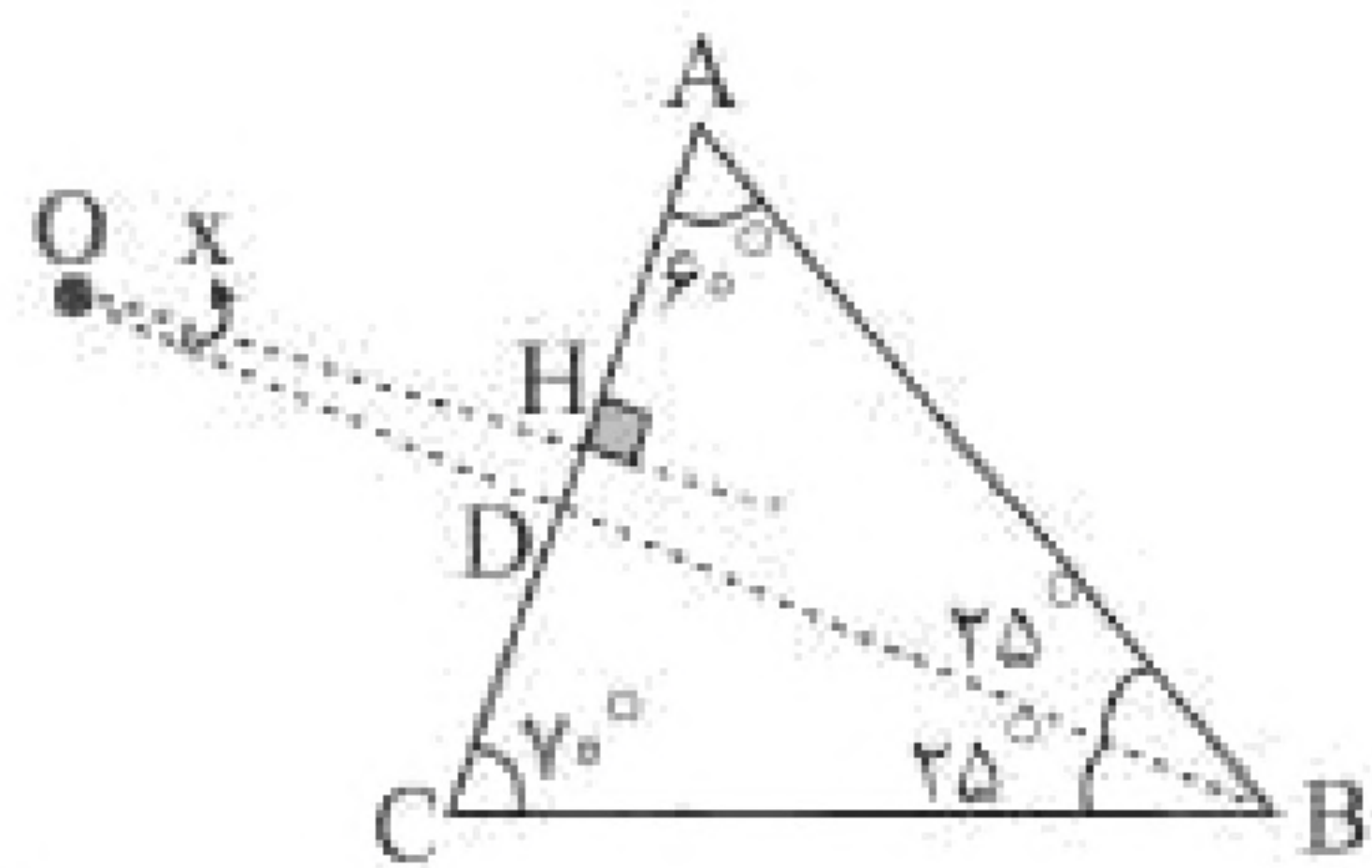
$$\xrightarrow{AB = a\sqrt{۲}} \frac{\sqrt{۳}}{۴}(a\sqrt{۲})^2 = ۲\sqrt{۳} \Rightarrow a^2 = ۴ \Rightarrow a = ۲$$

پس حجم مکعب برابر با  $a^3 = ۲^3 = ۸$  است.





۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.  
با رسم مثلث ABC داریم:



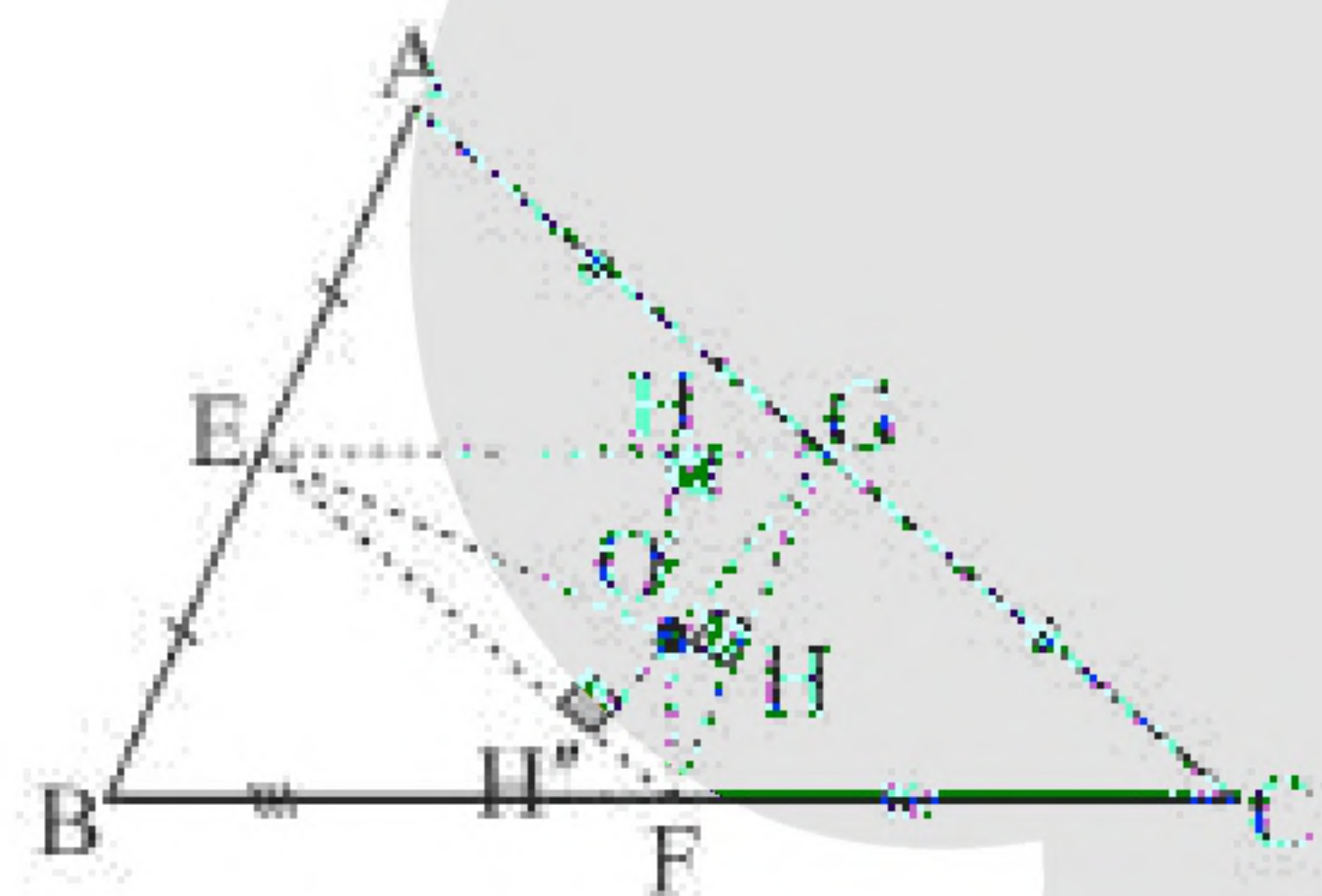
در مثلث  $\triangle CDB$ ، زاویه D برابر است با:

$$180^\circ - (70^\circ + 25^\circ) = 85^\circ$$

با توجه به متقابل به رأس بودن این زاویه با زاویه  $\angle ODH$  در مثلث  $\triangle ODH$  داریم:

$$x = 180^\circ - (90^\circ + 85^\circ) = 5^\circ$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



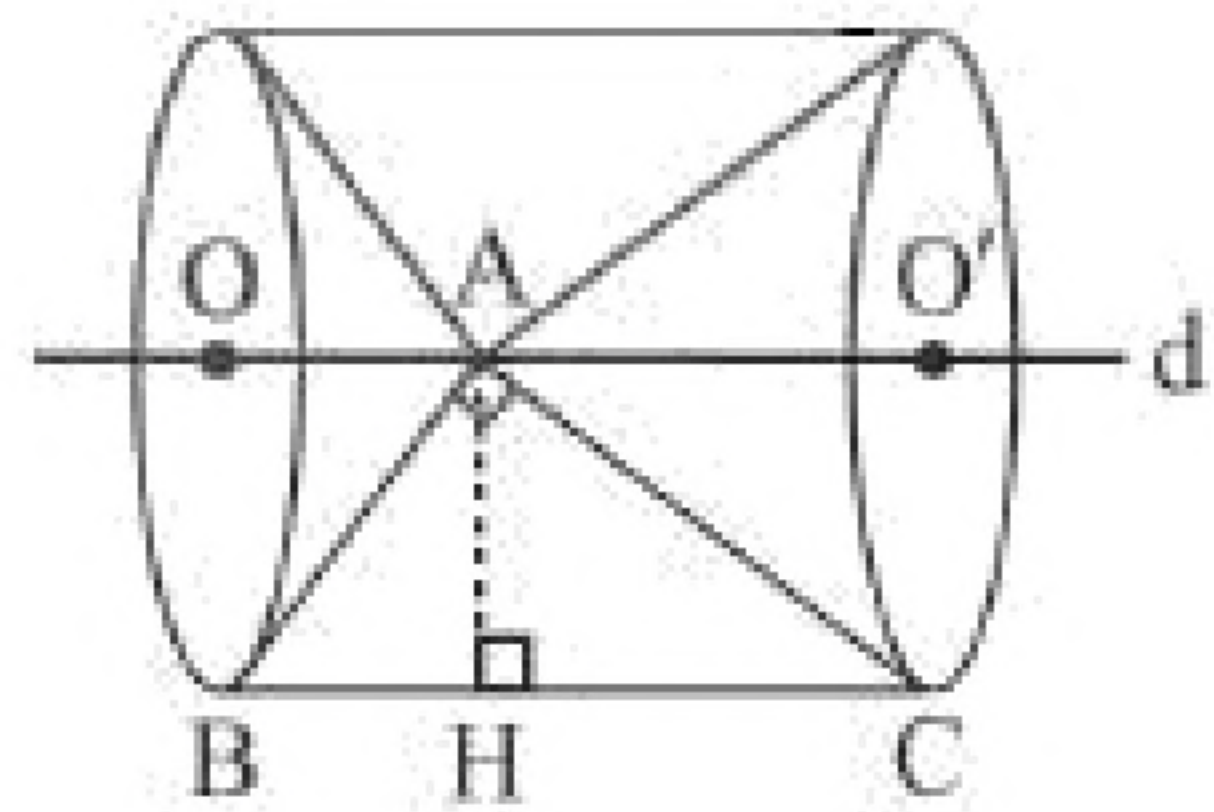
با توجه به شکل می‌دانیم  $AB \parallel FG$  می‌باشد و چون EH ضلع AB را نصف کرده است، پس عمود منصف AB می‌باشد. به همین صورت  $FH'$  و  $GH''$  عمود منصف‌های اضلاع BC و AC هستند، در نتیجه نقطه O محل هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث ABC بوده و از سه رأس آن به یک فاصله است.





۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مثلث  $ABC$  در رأس  $A$  قائم‌الزاویه است زیرا  $5^2 = 3^2 + 4^2$  و فیثاغورس برقرار است. مطابق شکل از دوران مثلث  $ABC$  حول خط  $d$ ، یک استوانه که دو مخروط از آن جدا شده ایجاد می‌شود. طول ارتفاع  $AH$  برابر با طول شعاع قاعده دو مخروط و استوانه است، بنابراین:



(حجم مخروط دوم + حجم مخروط اول) - حجم استوانه = حجم خواسته شده

$$\begin{aligned} \text{حجم خواسته شده} &= \pi(AH)^2(OO') - \left( \frac{1}{3}\pi(AH)^2(AO) + \frac{1}{3}\pi(AH)^2(AO') \right) \\ &= \pi(AH)^2(OO') - \left( \frac{1}{3}\pi(AH)^2(OO') \right) = \frac{2}{3}\pi(AH)^2(OO') \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه می‌نویسیم:

$$AH \times BC = AB \times AC \Rightarrow 5AH = 12 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$$

پس:

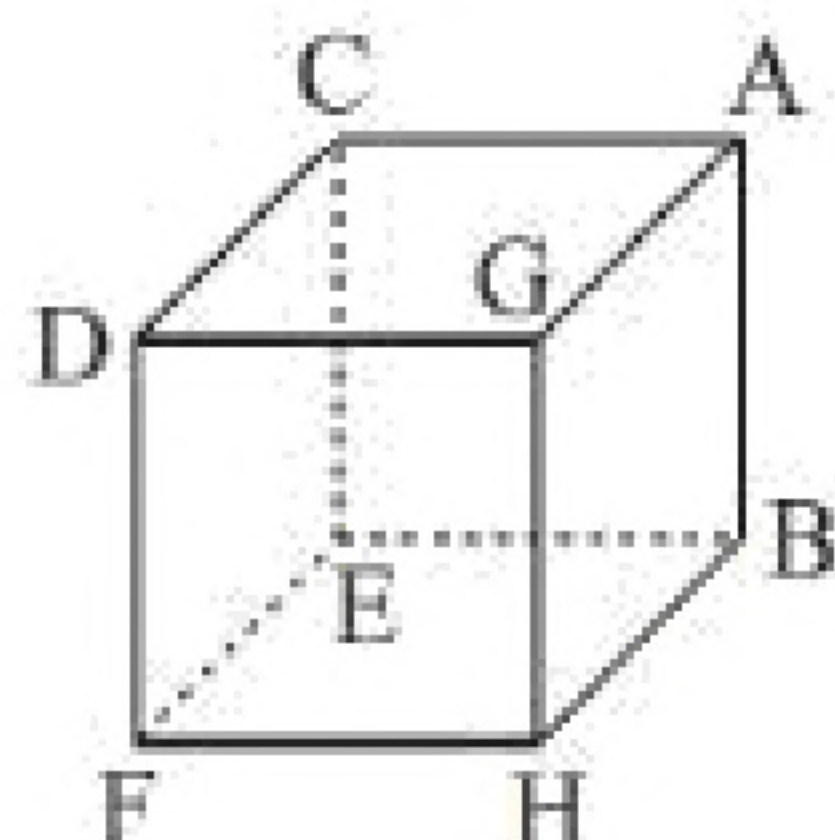
$$\text{حجم خواسته شده} = \frac{2}{3}\pi \left( \frac{12}{5} \right)^2 \times 5 = \frac{2}{3}\pi \times \left( \frac{12 \times 12}{5 \times 5} \right) (5) = \frac{96}{5}\pi$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 144m = 96n &\xrightarrow{\div 48} 3m = 2n \Rightarrow 3|2n \xrightarrow{(3,2)=1} 3|n \Rightarrow n = 3k \\ 10 \leq n \leq 99 &\Rightarrow 10 \leq 3k \leq 99 \Rightarrow 4 \leq k \leq 33 \\ \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} &= 33 - 4 + 1 = 30 \end{aligned}$$

۳۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

یال  $AB$  (یک یال مشخص) با وجه‌های بالا و پایین مکعب متقاطع است، پس با دو وجه متقاطع است.



یال  $AB$  با یال‌های  $CD$ ،  $EF$ ،  $FH$  و  $DG$  متنافر است زیرا یال  $AB$  با ۴ یال متنافر است.





۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\overline{xy \cdot xy} \equiv \overline{xy \cdot y} \Rightarrow y - x + 0 - x \equiv y - 0 + y - x \Rightarrow y + x \equiv 0$$

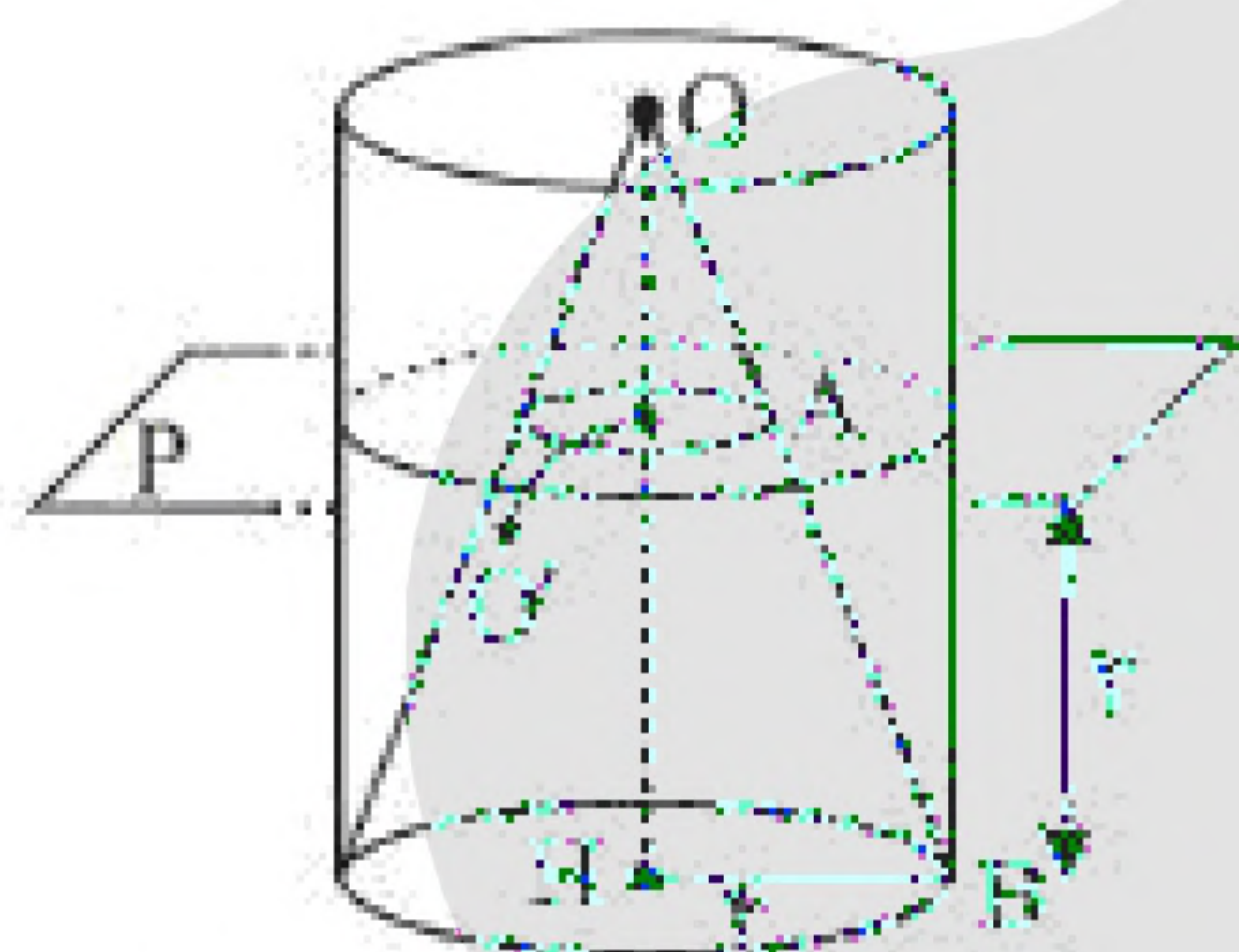
مقادیر X و Y مطابق جدول زیر می باشد.

x	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
y	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲

حداکثر مقدار  $\overline{xy}$ ، ۹۲ و حداقل مقدار آن ۲۹ می باشد که اختلاف آن ها ۶۳ است.

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مطابق شکل، صفحه P به فاصله ۳ از قاعده مخروط حجم حاصل از حذف مخروط درون استوانه را در دو دایره به شعاع ۴ و OA قطع می کند.



برای به دست آوردن مساحت مقطع حاصل باید مساحت های این دو دایره را از هم کم کنیم. ابتدا باید شعاع O'A را به دست آوریم:

$$\triangle OBH: O'A \parallel HB \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OO'}{OH} = \frac{O'A}{HB} \xrightarrow{OO' = 5 - 3 = 2} \frac{2}{5} = \frac{O'A}{4} \Rightarrow O'A = \frac{8}{5}$$

بنابراین:

$$\text{مساحت دایره به شعاع } \left(\frac{8}{5}\right) - (\text{مساحت دایره به شعاع } 4) = \text{مساحت مقطع حاصل}$$

$$= \pi \left(\frac{8}{5}\right)^2 - \pi (4)^2 = 16\pi - \frac{64}{25}\pi = \frac{336}{25}\pi = 13\frac{44}{25}\pi$$

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

می دانیم  $x \geq 6$ ،  $x! \equiv 0$  برقرار است، پس داریم:

$$A \equiv 1! + 2! + 3! + 4! + 5! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 120 \equiv 9 + 144 \equiv 0$$





۳۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

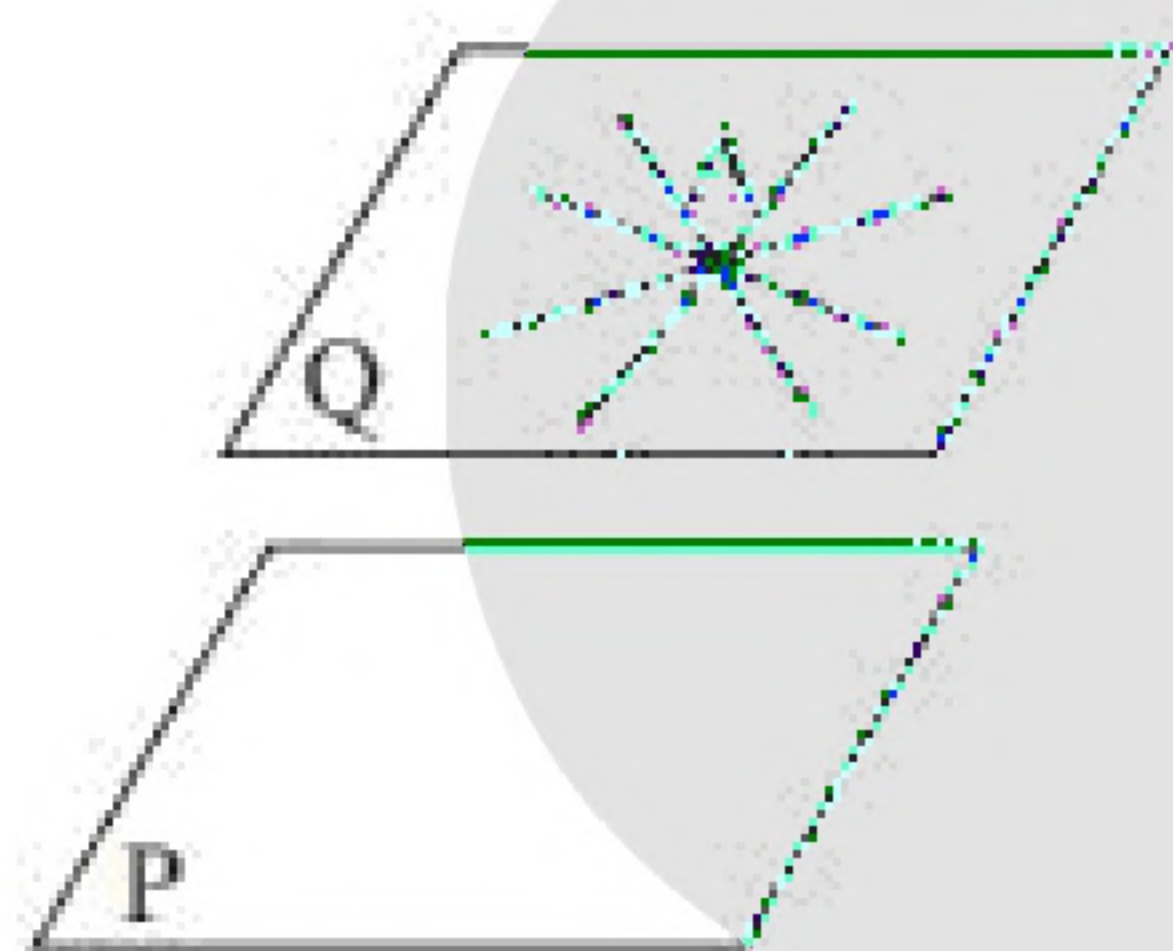
$$\begin{aligned} n = 2k \Rightarrow n^2 - 3n + 7 &= (2k)^2 - 3(2k) + 7 \\ &= 4k^2 - 6k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 3k + 3) + 1 = 2q_1 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 3n + 7 &= (2k + 1)^2 - 3(2k + 1) + 7 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 6k - 3 + 7 = 4k^2 - 2k + 4 + 1 \\ &= 2(2k^2 - k + 2) + 1 = 2q_2 + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |q_2 - q_1| = |(2k^2 - k + 2) - (2k^2 - 3k + 3)| = |2k - 1|$$

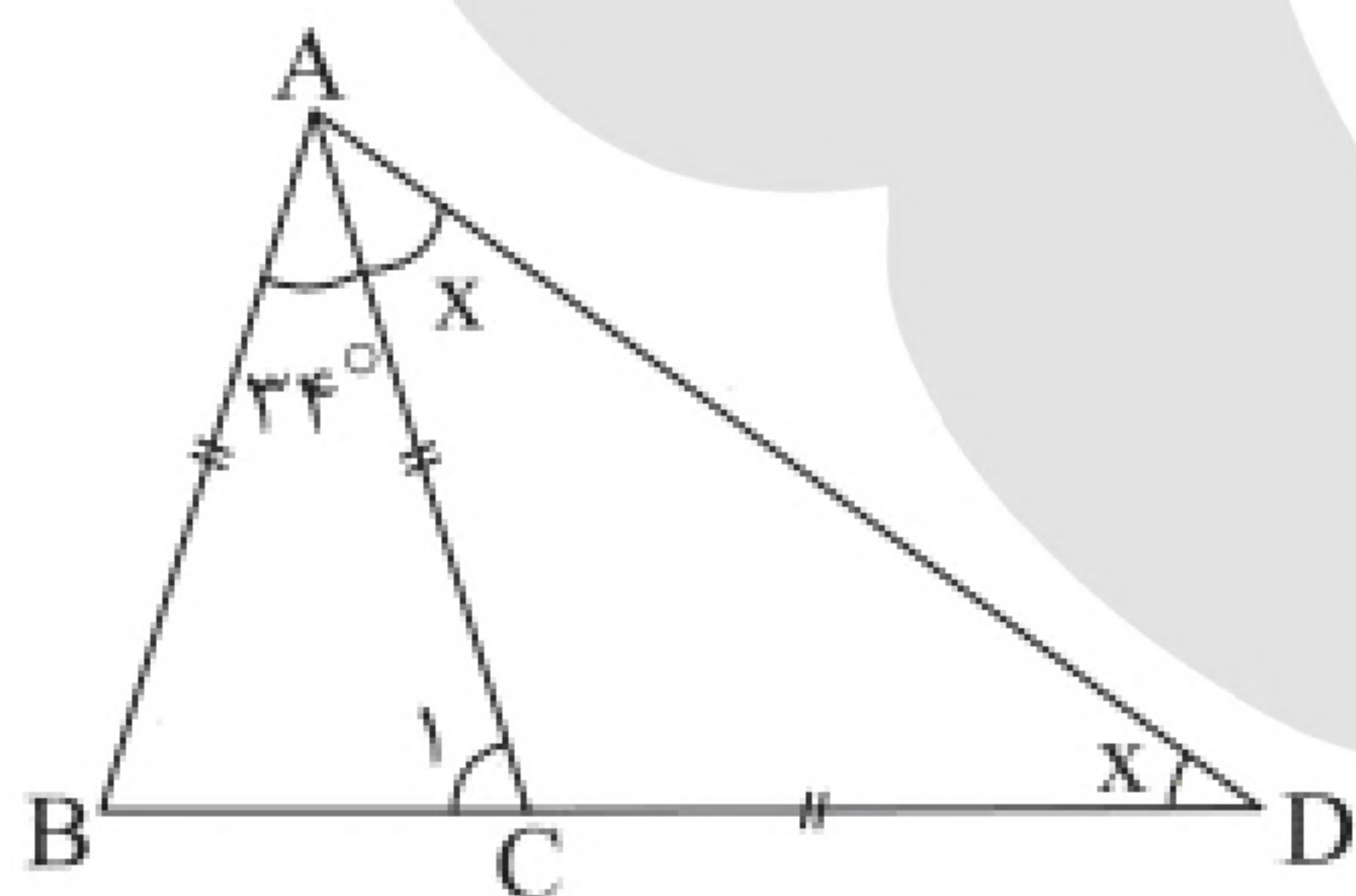
۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

از نقطه A بیرون صفحه P بی‌شمار خط موازی صفحه P و تنها یک صفحه موازی P عبور می‌کند.



۳۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

بنابر فرض سؤال  $AB = AC = CD$  است. در صورتی که زاویه  $\hat{D}AC$  را برابر  $x$  در نظر بگیریم آنگاه  $\hat{D} = x$  و  $\hat{C}_1 = 2x$  در این صورت:



$$\hat{C}_1 = \hat{B} = \frac{180^\circ - 34^\circ}{2} = 73^\circ$$

$$\begin{aligned} \hat{C}_1 &= 2x \\ \longrightarrow 2x &= 73^\circ \Rightarrow x = 36.5^\circ \end{aligned}$$

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$7x - 3y = 11 \Rightarrow 7x \equiv 11 \Rightarrow x \equiv 2 \Rightarrow x = 2 + 3k$$

حال  $x$  را معادله قرار می‌دهیم و  $y$  را محاسبه می‌کنیم.

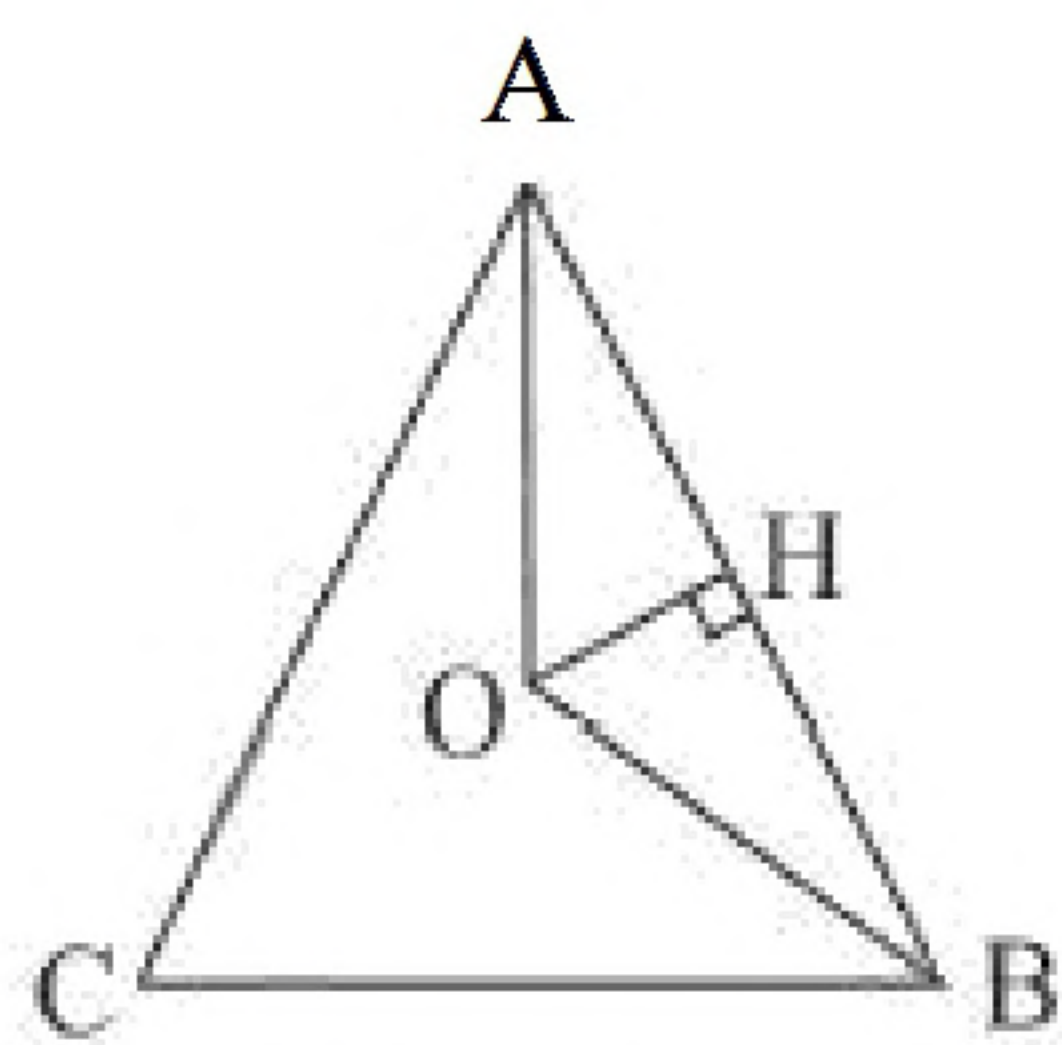
$$7(2 + 3k) + 3y = 11 \Rightarrow y = 1 + 7k \Rightarrow x + y = 3 + 10k$$

برای این که  $x + y$  دورقمی باشد باید  $1 \leq k \leq 9$  قرار گیرد، پس ۹ جواب دارد.





۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.



نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع هر مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است، پس اگر O نقطه تلاقی عمودمنصف‌های مثلث متساوی‌الساقین ABC باشد، آن‌گاه  $OA = OB = OC = 5$  است. فاصله O از ضلع AB برابر با طول عمود OH است. مسلماً OH عمودمنصف AB است پس  $AH = BH = \frac{AB}{2} = 3$  است، بنابراین:

$$\triangle OAH: OA^2 = AH^2 + OH^2 \xrightarrow[AH=3]{OA=5} 25 = 9 + OH^2$$

$$\Rightarrow OH^2 = 16 \Rightarrow OH = 4$$

۴۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم:  $ca \equiv cb \xrightarrow{(c,m)=d} a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$  . همچنین  $[a,b] = |ab|(a,b)$

(۱)  $(d, ab) = d$  چون  $d|ab$ ، پس پیمانه را نیز باید به  $d$  تقسیم کنیم یعنی رابطه  $x \equiv y \pmod{\frac{ab}{d}}$  درست است.

(۲)  $\frac{ab}{d} = [a,b]$ ، پس رابطه  $x \equiv y \pmod{[a,b]}$  درست است.

(۳) به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم چون  $d|[a,b]$ ، پس رابطه سوم هم درست است. پس دوتا از روابط درست هستند.