

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



۱	۲	۳	۴
۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۲ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۴ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳۶ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۷ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۹ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴۰ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



$$27 \equiv_{13} 1 \Rightarrow 27^{1401} \equiv_{13} 1 \quad (1)$$

$$2022 \equiv_{13} 7 \quad (2)$$

$$(1, 2) \quad 27^{1401} + 2022 \equiv_{13} 1 + 7 \equiv_{13} 8 \Rightarrow r = 8 \quad \text{باقی مانده}$$

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر دو عدد طبیعی را a و b در نظر بگیریم:

$$(a, b) = d \text{ م.م.ب و } \frac{a}{d} = a', \frac{b}{d} = b' \Rightarrow (a', b') = 1$$

$$[a, b] = M \text{ م.م.ک} \Rightarrow [a, b] = a' \cdot b' \cdot d$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 80 \Rightarrow (a' + b')d = 80 \\ a' \cdot b' \cdot d = 315 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a' \cdot b'}{a' + b'} = \frac{63}{16} \Rightarrow \begin{cases} a' = 9 \\ b' = 7 \\ d = 5 \end{cases}$$

$$(a' - b')d = (9 - 7) \times 5 = 10 = \text{اختلاف دو عدد}$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} N \equiv_5 2 \\ N \equiv_7 4 \\ N \equiv_{11} 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} N \equiv_{-3} 5 \\ N \equiv_{-3} 7 \\ N \equiv_{-3} 11 \end{array} \right\} \Rightarrow N \equiv_{[5,7,11]} -3 \Rightarrow N \equiv_{385} -3$$

$$N = 385K - 3 \xrightarrow[\text{عدد طبیعی ۳ رقمی با این شرایط}]{\text{بزرگترین } N} N = 767 \equiv_{23} 8$$

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. فرض کنیم d ب.م.م دو عدد مفروض است، باید $d \neq 1$ باشد.

$$\left. \begin{array}{l} d | 3n + 1 \\ d | 14n - 9 \end{array} \right\} \Rightarrow d | 14(3n + 1) - 3(14n - 9) \Rightarrow d | 41 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 41$$

غ ق ق

$$\Rightarrow 3n + 1 \equiv_{41} 0 \Rightarrow 3n \equiv_{41} -1 \Rightarrow 3n \equiv_{41} -42 \Rightarrow n \equiv_{41} -14 \Rightarrow n = 41K - 14$$

$$\Rightarrow 100 \leq 41K - 14 \leq 999 \Rightarrow 3 \leq K \leq 24 \Rightarrow \text{تعداد اعداد ۳ رقمی با شرایط مسئله} = (24 - 3) + 1 = 22$$

۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$3x \equiv_7 13 \text{ یا } 7 | 3x - 13 \text{ باشد، باید } x \text{ عدد موردنظر}$$

↓

$$3x \equiv_7 13 - 7 \Rightarrow 3x \equiv_7 6 \xrightarrow{(3,7)=1} x \equiv_7 2 \Rightarrow \boxed{x = 7K + 2, K \in \mathbb{Z}}$$

$$1000 \leq 7K + 2 \leq 9999 \quad \leftarrow x \text{ باید چهار رقمی باشد}$$

$$998 \leq 7K \leq 9997$$

$$143 \leq K \leq 1428$$

$$K = 1428 - 143 + 1 = 1286$$



۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روز ۲۹ مرداد که صفر فرض می‌شود، بنابراین:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{بهمن} & + & \text{دی} & + & \text{آذر} & + & \text{آبان} & + & \text{مهر} & + & \text{شهریور} & + & \text{مرداد} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ ۴ & = & ۱۶۵ & = & ۱۲ & + & ۳۰ & + & ۳۰ & + & ۳۰ & + & ۳۱ & + & ۲ \end{array}$$

در جدول برای روز جمعه کد ۴ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد از آن را تعیین می‌کنیم.

دوشنبه سه‌شنبه چهارشنبه پنجشنبه جمعه شنبه یکشنبه

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

۲۹ مرداد روز دوشنبه بوده است

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. شرط وجود جواب برای این معادله سیاله خطی آن است که:

$$(3a+1, 7a-2) | 23$$

با فرض $d = (3a+1, 7a-2)$:

$$\begin{cases} d | 3a+1 \\ d | 7a-2 \end{cases} \Rightarrow d | 7(3a+1) - 3(7a-2) \Rightarrow d | 13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 13$$

$$13 | 3a+1 \Rightarrow 3a+1 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 3a \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 3a \equiv 12 \pmod{13} \Rightarrow a \equiv 4 \pmod{13} \Rightarrow a = 13K + 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq a \leq 999$$

$$1 \leq 13K + 4 \leq 999 \Rightarrow 0 \leq K \leq 76 \Rightarrow$$

به ازای ۷۷ عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ مقدار $d = 13$ خواهیم داشت و در نتیجه معادله سیاله خطی جواب ندارد، پس به ازای $999 - 77 = 922$ عدد طبیعی a کوچک‌تر از ۱۰۰۰ معادله دارای جواب است.

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} x = 2K+1 \text{ عدد صحیح و فرد} \\ y | x+2 \Rightarrow x+2 = yq \end{array} \right\} \Rightarrow 2K+1+2 = yq \Rightarrow 2(K+1)+1 = yq$$

$$2K'+1 = yq \Rightarrow y = 2K''+1 \text{ صحیح و فرد است.}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 3 &= (2K+1)^2 + (2K'+1)^2 + 3 = 4K^2 + 4K + 1 + 4K'^2 + 4K' + 1 + 3 \\ &= 4K(K+1) + 4K'(K'+1) + 5 = 4(2q) + 4(2q') + 5 \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{2q} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{2q'} \end{aligned}$$

$$= 8(q+q') + 5 = 8q'' + 5 \Rightarrow \text{در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده برابر ۵ است.}$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} m = 7q + 5 \\ m = 8q' + 7 \end{array} \right\} \xrightarrow[\times 7]{\times 8} \left. \begin{array}{l} 8m = 56q + 40 \\ 7m = 56q' + 49 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفریق دو رابطه}} m = 56(q - q') - 9$$

$$\Rightarrow m = 56q'' - 9 \Rightarrow m = 56q'' - 56 + 47 \Rightarrow m = 56(q'' - 1) + 47$$

$$\Rightarrow m = 56K + 47 \Rightarrow \text{باقی‌مانده } m \text{ در تقسیم ۵۶ برابر ۴۷ است.}$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. عدد P در تقسیم بر ۶ دارای ۶ حالت است:

$$\begin{aligned} (۱) \quad P &= ۶K & (۲) \quad P &= ۶K + ۱ & (۳) \quad P &= ۶K + ۲ & (۴) \quad P &= ۶K + ۳ \\ (۵) \quad P &= ۶K + ۴ & (۶) \quad P &= ۶K + ۵ \end{aligned}$$

در حالات (۱) و (۳) و (۵)، P عدد زوج است و اول نیست. در بقیه حالات:

$$(۴) \quad P = ۳(۲K + ۱) \Rightarrow P = ۳K' \Rightarrow ۳|P \Rightarrow P \text{ اول نیست}$$

لذا فقط حالات ۲ و ۶ باقی می ماند، یعنی عدد P در تقسیم بر ۶ دو باقی مانده ۱ یا ۵ را دارد. (توجه کنید عکس مطلب در حالت کلی، درست نیست؛ مثلاً $۲۵ = ۶ \times ۴ + ۱$ ، اما ۲۵ اول نیست).

۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{aligned} m|9K+7 &\rightarrow m|7(9K+7) \rightarrow m|63K+49 \\ m|7K+6 &\rightarrow m|9(7K+6) \rightarrow m|63K+54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow m|(63K+54) - (63K+49)$$

$$\Rightarrow m|5 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = ۱, m = ۵$$

m مجموع مقادیر ۶

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $A = xy + x + y$:

$$A + 1 = xy + x + y + 1 = x(y + 1) + (y + 1) = (y + 1)(x + 1)$$

$$\Rightarrow A + 1 = (x + 1)(y + 1) = \text{عدد مرکب}$$

زیرا $x + 1 \geq ۲$ و $y + 1 \geq ۲$ (می دانیم x و y طبیعی اند)، بنابراین به عدد هریک از گزینه ها یک واحد اضافه می کنیم؛ هر کدام مرکب نباشد ($A + 1$ اول باشد) جواب مسئله است. فقط عدد ۶۰ چنین ویژگی دارد (۶۱ مرکب نیست).

۱۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$xy = v[x, y] \Rightarrow xy = v \times \frac{xy}{d} \Rightarrow d = v \quad \text{ب.م.م.}$$

$$x + y = ۸۴ \Rightarrow \begin{cases} x'd + y'd = ۸۴ \\ (x', y') = ۱, d = v \end{cases} \Rightarrow x' + y' = ۱۲$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = ۱۱ \\ y' = ۱ \end{cases} \Rightarrow |x - y| = |x' - y'| \times d = ۱۰ \times v = ۷۰ \text{ Max}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = ۷ \\ y' = ۵ \end{cases} \Rightarrow |x - y| = |x' - y'| \times d = ۲ \times v = ۱۴ \text{ Min}$$

$$\text{Max} - \text{Min} = ۷۰ - ۱۴ = ۵۶$$



$$\left. \begin{array}{l} x = \text{تعداد سوالات ۷ امتیازی} \\ y = \text{تعداد سوالات ۳ امتیازی} \end{array} \right\} \Rightarrow 7x + 3y = 73$$

۱۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$7x \equiv 73 \Rightarrow x \equiv 1 \Rightarrow \boxed{x = 3K + 1} \quad (1)$$

جاگذاری در معادله سیاله

$$7(3K + 1) + 3y = 73 \Rightarrow 7(3K) + 3y = 66$$

$$7K + y = 22 \Rightarrow y = 22 - 7K \quad (2)$$

$$1, 2 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3K + 1 \geq 0 \\ 22 - 7K \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{K \in \mathbb{Z}} 0 \leq K \leq 3$$

$$K = 0 \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \quad K = 1 \begin{cases} x = 4 \\ y = 15 \end{cases} \quad K = 2 \begin{cases} x = 7 \\ y = 28 \end{cases} \quad K = 3 \begin{cases} x = 10 \\ y = 41 \end{cases}$$

$$\max = 1 + 22 = 23$$

$$\min = 10 + 1 = 11$$

$$\max - \min = 12$$

سؤال

سؤال

۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\left. \begin{array}{l} a \equiv 4 \Rightarrow a \equiv -2 \\ a \equiv 7 \Rightarrow a \equiv -2 \\ a \equiv 10 \Rightarrow a \equiv -2 \end{array} \right\} \Rightarrow a \equiv [4, 7, 10] \xrightarrow{\text{ک.م.م سه عدد}} \downarrow \Rightarrow a \equiv 36 - 2 \Rightarrow a \equiv 34$$

$$a = 36K - 2, K \in \mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \text{بزرگترین عدد } a \text{ سه عددی} = 970 \\ \text{کوچکترین عدد } a \text{ دو رقمی} = 34 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{اختلاف دو عدد موردنظر سوال} = 936$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\overline{x413y} \equiv x + 4 + 1 + 3 + y \equiv x + y + 8 \equiv 0 \Rightarrow x + y \equiv 1 \quad \begin{cases} x + y = 1 \quad (1) \\ \text{یا} \\ x + y = 10 \quad (2) \end{cases}$$

$$\overline{67yx1} \equiv 1 - x + y - 7 + 6 \equiv 0 \Rightarrow y - x \equiv 0 \Rightarrow y - x = 0 \Rightarrow x = y \quad (3)$$

(توجه داشته باشید که $x \neq 0$ و y رقم‌های کوچکتر یا مساوی ۹ هستند.) $1, 2, 3 \Rightarrow x = y = 5$

$$\overline{xy4} \equiv 554 \equiv 1 \Rightarrow \text{باقیمانده} = 1$$



۱۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. تیرماه دارای ۳۱ روز است: $31 = 4 \times 7 + 3$. بنابراین تیرماه در صورتی شامل ۵ جمعه است که روزهای اول یا دوم یا سوم این ماه جمعه باشد:

بیستم بهمن شنبه است $\Rightarrow 1 \equiv 232 \equiv 7 \Rightarrow 30 + 2 \times 31 + 4 \times 30 + 20$ اول تیر، جمعه باشد
 ↓ ↓ ↓ ↓
 تیر مهر، آبان، مرداد و شهریور آذر، دی

جمعه	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

با روش فوق در دو حالت باقیمانده: بیستم بهمن هم جمعه است \Rightarrow اگر دوم تیر، جمعه باشد

بیستم بهمن پنجشنبه است \Rightarrow اگر سوم تیر، جمعه باشد

به این ترتیب بیستم بهمن پنجشنبه یا جمعه یا شنبه است.

۱۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. این معادله هم‌نهشتی در Z وقتی جواب دارد که:

$\Rightarrow a$ الزاما عددی فرد است $\Rightarrow (3a^2 + 2, 8) | 7 \Rightarrow (3a^2 + 2, 8) = 1$ ب.م.م

جاگذاری در معادله $(a^2 = 8K + 1)$ مربع هر عدد فرد، مضرب ۸ به علاوه یک است

$$(3(8K + 1) + 2) \times 8 \equiv 7 \Rightarrow (24K + 5) \times 8 \equiv 7 \Rightarrow 5 \times 8 \equiv 7 \Rightarrow 5 \times 8 \equiv 15$$

$$\xrightarrow{\text{ب.م.م } (5, 8) = 1} x \equiv 3$$

$$x = 8K' + 3 \Rightarrow 100 \leq 8K' + 3 \leq 999 \Rightarrow 97 \leq 8K' \leq 996$$

$$13 \leq K' \leq 124 \Rightarrow K' = (124 - 13) + 1 = 112 \text{ عدد سه رقمی}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۹- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر به توان یک عدد، مضربی از ۴ اضافه یا کم شود رقم یکان تغییر نمی‌کند. به عبارت

$$a^n \equiv a^{n+4k} \Rightarrow a^{n+4k} - a^n \equiv 0$$

دیگر:

بنابراین اگر رقم یکان $a^m - a^n$ برابر با صفر باشد آن‌گاه $m - n$ مضربی از ۴ است.

حالا همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$\text{گزینه ۱: } 78 - 56 = 22 \neq 4k$$

$$\text{گزینه ۲: } 37 - 23 = 14 \neq 4k$$

$$\text{گزینه ۳: } 59 - 35 = 24 = 4k$$

$$\text{گزینه ۴: } 57 - 47 = 10 \neq 4k$$



۲۰- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 41^{41} + 42^{42} + 43^{43} + 44^{44} &\equiv (-1)^{41} + 0 + 1 + 2 \equiv -1 + 0 + 1 + 2 \equiv 2 \\ 2 &\equiv 2 \Rightarrow 2^2 \equiv 4 \Rightarrow 2^3 \equiv 8 \equiv 1 \Rightarrow (2^3)^{14} \equiv 1^{14} \Rightarrow 2^{42} \equiv 1 \Rightarrow 2^{44} \equiv 2^2 \equiv 4 \end{aligned}$$

۲۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (5n+7, 4n+3) = d &\Rightarrow \begin{cases} d|5n+7 \\ d|4n+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|20n+28 \\ d|20n+15 \end{cases} \Rightarrow d|20n+28 - (20n+15) \\ &\Rightarrow d|13 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 13 \end{aligned}$$

می‌خواهیم این دو عدد نسبت به هم اول نباشند پس $d \neq 1$ و در نتیجه $d = 13$ است:

$$\begin{aligned} 13|4n+3 &\Rightarrow 4n+3 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 4n \equiv -3 \equiv -16 \pmod{13} \Rightarrow n \equiv -4 \equiv 9 \pmod{13} \\ &\Rightarrow n = 13k + 9 \Rightarrow N = 87 \end{aligned}$$

حالا باید همه گزینه‌ها را بررسی کنیم. شرط وجود جواب معادله سیاله $ax + by = c$ آن است که $(a, b)|c$ بنابراین:

گزینه ۱: $51x + 87y = 712$	$(51, 87) = 3/712$
گزینه ۲: $58x + 87y = 319$	$(58, 87) = 29/319 \quad 319 = 29 \times 11$
گزینه ۳: $39x + 87y = 455$	$(39, 87) = 3/455$
گزینه ۴: $29x + 87y = 264$	$(29, 87) = 29/264$

۲۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. خارج قسمت را با q و باقی‌مانده را با r نمایش می‌دهیم:

$$\begin{aligned} N &= 13q + r; \quad 0 \leq r < 13 \\ q + r &= 17 \Rightarrow q = 17 - r \\ N &= 13(17 - r) + r = 221 - 12r \Rightarrow N - 8 = 213 - 12r \\ &\Rightarrow N - 8 = 192 - 12r + 21 \Rightarrow N - 8 = 12(16 - r) + 21 \end{aligned}$$

با توجه به فرض $0 \leq r \leq 12$ است یعنی فضای نمونه‌ای ۱۳ عضو دارد. برای آن‌که باقی‌مانده تقسیم $N - 8$ بر عدد ۳۶ برابر ۲۱ باشد لازم است $r - 16$ مضرب ۳ باشد که در این صورت $r = 1, 4, 7, 10$ خواهد شد یعنی پیشامد تصادفی ۴ عضو دارد پس احتمال موردنظر $\frac{4}{13}$ می‌شود.



۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
۰	۱	۱	۳	۴	۵	۶

۲۹ روز در مهرماه و سه ما آبان و آذر و دی و ۲۲ روز در بهمن:

در جدول متناظر با عدد ۱ یکشنبه است. بنابراین ۲۲ بهمن در آن سال یکشنبه است. $\Rightarrow 1 \equiv 141 \pmod{7}$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

دو طرف به توان ۳ $\Rightarrow 7 \equiv 64 \pmod{19} \Rightarrow 3^6 \equiv 64 \pmod{19}$ دو طرف به توان ۲ $\Rightarrow 8 \equiv 27 \pmod{19} \Rightarrow 3^3 \equiv 27 \pmod{19}$

دو طرف به توان ۱۱۲ $\Rightarrow 1 \equiv 3^{18} \pmod{19} \Rightarrow 1 \equiv 3^{18} \pmod{19}$ $\left\{ \begin{array}{l} 3^{2016} \equiv 1 \pmod{19} \\ \times \\ 3^6 \equiv 7 \pmod{19} \end{array} \right.$

$\Rightarrow 3^{2022} \equiv 7 \pmod{19} \Rightarrow r_1 = 7$

$5^2 \equiv -1 \pmod{13} \xrightarrow{\text{دو طرف به توان } 700} 5^{1400} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\times 5^1} 5^{1401} \equiv 5 \pmod{13} \Rightarrow r_2 = 5$

$r_1 + r_2 = 7 + 5 = 12$

روش دوم:

فرما $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ عدد اول p

عدد اول ۱۹ $\Rightarrow 3^{18} \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\text{توان } 112} 3^{2016} \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\times 3^6} 3^{2022} \equiv 3^6 \equiv 7 \pmod{19} = r_1$

عدد اول ۱۳ $\Rightarrow 5^{12} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\text{توان } 700} 5^{1400} \equiv 1 \pmod{13} \xrightarrow{\times 5} 5^{1401} \equiv 5 \pmod{13} = r_2$

$\Rightarrow r_1 + r_2 = 12$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر ب.م.م دو عدد a, b برابر d باشد، آن‌گاه:

$$(a, b) = d \Rightarrow [a, b] = a'b'd : (a', b') = 1, \frac{b}{d} = b', \frac{a}{d} = a'$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ب.م.م} & \text{ک.م.م} & \text{ب.م.م} \\ a + b = 136 \Rightarrow a'd + b'd = 136 \Rightarrow (a' + b')d = 136 & (1) & \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$17 \times 8$$

$$a'b'd = 60d \Rightarrow a'b' = 60 \quad (2) \Rightarrow$$

$a' \text{ یا } b'$	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$a' \text{ یا } b'$	۶۰	۳۰	۲۰	۱۵	۱۲	۱۰

$$1, 2 \Rightarrow a' = 12, b' = 5 \begin{cases} a = 12 \times 8 = 96 \\ b = 5 \times 8 = 40 \end{cases}$$

$$d = 8 \quad (1, 2)$$

$$a - b = 96 - 40 = 56$$

۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} d|3n+1 \xrightarrow{\times 14} d|42n+14 \\ d|14n-9 \xrightarrow{\times (-3)} d|-42n+27 \end{cases} \Rightarrow d|41 \begin{cases} d=1 \\ d=41 \end{cases}$$

چون دو عدد طبیعی موردنظر نسبت به هم اول نیستند ($d \neq 1$):

$$41|3n+1 \Rightarrow 3n+1 \equiv 0 \pmod{41} \Rightarrow 3n \equiv -1 \pmod{41} \Rightarrow 3n \equiv -42 \pmod{41} \Rightarrow n \equiv -14 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow n = 41k - 14 \Rightarrow 1000 \leq 41k - 14 \leq 9999 \Rightarrow 1004 \leq 41k \leq 10003 \Rightarrow 25 \leq k \leq 243$$

$$n \text{ تعداد} = 243 - 25 + 1 = 219 \quad \text{عدد}$$



۲۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. تعداد کیسه‌های ۲ کیلویی را x و تعداد کیسه‌های ۵ کیلویی را y در نظر می‌گیریم:

$$2x + 5y = 51$$

$$5y \equiv 51 \Rightarrow y \equiv 1 \Rightarrow y = 2K + 1$$

$$2x + 5(2K + 1) = 51 \Rightarrow x = 23 - 5K$$

بسته‌بندی موردنظر به ۵ روش امکان‌پذیر است.

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 23 - 5K \geq 0 \Rightarrow K \leq \frac{23}{5} \\ 2K + 1 \geq 0 \Rightarrow K \geq -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow 0 \leq K \leq 4$$

۲۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b + \binom{n}{2} a^{n-2} \cdot b^2 + \binom{n}{3} a^{n-3} \cdot b^3 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$

$$t_4 = \text{جمله چهارم} = \binom{8}{3} (2\sqrt{2})^5 (-\sqrt{3})^3 : (2\sqrt{2} - \sqrt{3})^8 \quad \text{بنابراین در بسط عبارت}$$

$$t_6 = \text{جمله ششم} = \binom{8}{5} (2\sqrt{2})^3 (-\sqrt{3})^5$$

$$\text{چون } \binom{8}{3} = \binom{8}{5} = 56$$

$$t_4 - t_6 = 56 (2\sqrt{2})^3 (-\sqrt{3})^3 (1 - (-\sqrt{3})^2) \Rightarrow t_4 - t_6 = 56 (16\sqrt{2}) (-3\sqrt{3}) (-2)$$

$$\Rightarrow t_4 - t_6 = 5376 \sqrt{6} \Rightarrow M_{\text{مقدار نهایی}} = \sqrt{6} (t_4 - t_6) = 32256$$

$$32256 = 17 \times 1897 + 7 \Rightarrow r = 7$$



۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با فرض $A = \overline{a35b2}$ زمانی A بر ۳۶ بخش پذیر است که بر ۴ و ۹ به طور همزمان بخش پذیر باشد:

$$A \equiv 0 \Rightarrow \overline{b2} \equiv 0 \Rightarrow 10b + 2 \equiv 0 \Rightarrow 10b \equiv -2 \xrightarrow[\text{دو طرف تقسیم بر ۲}]{(10, 4) = 2} 5b \equiv -1$$

$$\Rightarrow b \equiv -1 \Rightarrow b = 2K - 1 \Rightarrow b = 1, 3, 5, 7, 9$$

$$A \equiv 0 \Rightarrow a + 3 + 5 + b + 2 \equiv 0 \Rightarrow a + b + 1 \equiv 0$$

$$b = 1 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow 73512$$

$$b = 3 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 53532$$

$$b = 5 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 33552$$

$$b = 7 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow 13572 = \min$$

$$b = 9 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 83592 = \max$$

$$\max - \min = 70020$$

۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n \text{ عددی فرد است} \Rightarrow n | 2K + 3 \xrightarrow{n | m + 2} n | 2K + 1 \text{ با فرض } K \in \mathbb{Z} : m = 2K + 1$$

$$\Rightarrow n = 2K' + 1, K' \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 + 13 &= (2K + 1)^2 + (2K' + 1)^2 + 13 = \underbrace{4K^2 + 4K + 1}_{= 4K(K+1)} + \underbrace{4K'^2 + 4K' + 1}_{= 4K'(K'+1)} + 13 \\ &= 4K(K+1) + 4K'(K'+1) + 15 = \underbrace{8q + 8q' + 8 + 7}_{= 8(q+q'+1)+7} = 8q'' + 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = 7}$$

$$a = 17q_1 + 5 \xrightarrow{\times 3} 3a = 3 \times 17q_1 + 15 \quad (1)$$

$$b = 17q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5b = 5 \times 17q_2 + 15 \quad (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 3a - 5b = 17(3q_1 - 5q_2) + 0 \Rightarrow 3a - 5b = 17q \Rightarrow r = 0$$

۳۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} 221 &= 13 \times 17 \\ 357 &= 3 \times 7 \times 17 \Rightarrow (221, 357) = 17 \end{aligned}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$221x + 357y = 17 \xrightarrow{\div 17} \boxed{13x + 21y = 1}$$

$$13x \equiv 1 \Rightarrow -8x \equiv -20 \Rightarrow 2x \equiv 5 \Rightarrow 2x \equiv -16$$

$$x \equiv -8 \Rightarrow x = 21K - 8 \xrightarrow[\text{دو رقمی طبیعی } x]{10 \leq x \leq 99} 10 \leq 21K - 8 \leq 99 \Rightarrow 18 \leq 21K \leq 107$$

$$\Rightarrow 1 \leq K \leq 5$$

برای x ، پنج عدد طبیعی دو رقمی ۱۳ و ۳۴ و ۵۵ و ۷۶ و ۹۷ جواب معادله سیاله‌اند.



۳۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

تعداد ظرف‌های ۱۵۰۰ لیتری را x و تعداد ظرف‌های ۲۵۰۰ لیتری را y می‌نامیم و باید تعداد جواب‌های معادله سیاله خطی $۱۵۰۰x + ۲۵۰۰y = ۳۷۰۰۰$ که ساده شده آن $۳x + ۵y = ۷۴$ است را حل کنیم و در مجموعه اعداد صحیح و نامنفی تعداد جواب‌ها را به دست آوریم ($x \geq 0, y \geq 0$):

$$۵y \equiv ۷۴ \rightarrow ۲y \equiv ۲ \rightarrow y \equiv ۱ \rightarrow \boxed{y = ۳k + ۱}, k \in \mathbb{Z}$$

$$۳x + ۵(۳k + ۱) = ۷۴ \rightarrow ۳x + ۵(۳k) = ۶۹ \rightarrow \boxed{x = ۲۳ - ۵k}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} ۳k + ۱ \geq 0 \rightarrow k \geq -\frac{1}{3} \\ ۲۳ - ۵k \geq 0 \rightarrow k \leq \frac{۲۳}{5} \end{cases} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} 0 \leq k \leq ۴ \rightarrow$$

k	۰	۱	۲	۳	۴
x	۲۳	۱۸	۱۳	۸	۳
y	۱	۴	۷	۱۰	۱۳

بنابراین به ۵ روش می‌توان انجام داد.

۳۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مجموع حاصل ضرب دو عدد طبیعی با یکی از آن دو عدد را سه برابر کرده:

$$\frac{۳(xy + x)}{۲}$$

نصف حاصل:

$$\frac{۳(xy + x)}{۲} - y^2$$

مربع عدد دیگر را کسر نموده‌ایم:

$$(x - y)^2$$

مجذور تفاضل دو عدد:

۳۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. بررسی گزینه‌ها:

$$۱) x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{۳y^2}{۴} \geq 0$$

$$۲) x^2 + xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow ۲x^2 + ۲y^2 + ۲xy \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + ۲xy + x^2 + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$$

$$۳) x^2 + y^2 + xy \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 + \frac{۳x^2}{۴} \geq 0$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) هم‌ارز حکم نیست.



۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$3x^2 - 5x - 2 \equiv 0 \Rightarrow (3x + 1)(x - 2) \equiv 0$$

$$\begin{cases} x \equiv 2 \Rightarrow x = 41k + 2 \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow x = 43 \\ k = 2 \Rightarrow x = 84 \\ 3x \equiv -1 \Rightarrow 3x \equiv -14 \Rightarrow x = 41k - 14 \\ \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \Rightarrow x = 27 \\ k = 2 \Rightarrow x = 68 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین اعداد دورقمی قابل قبول برای x شامل ۴۳، ۸۴، ۲۷ و ۶۸ هستند و مجموع ارقام آن‌ها ۴۲ است.

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$(18a + 3, 18a + 12) = d \Rightarrow \begin{cases} d | 18a + 12 \\ d | 18a + 3 \end{cases} \Rightarrow d | 9 \Rightarrow d = 1, 3, 9$$

اما d نمی‌تواند عدد ۹ باشد زیرا که $18a + 3$ مضرب ۹ نیست بنابراین $d = 3$.

۳۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} 77 \equiv 12 \\ 61 \equiv 1 \end{cases} \Rightarrow 5x \equiv 1 \Rightarrow 5x \equiv 25 \xrightarrow[(5,12)=1]{\div 5} x \equiv 5 \Rightarrow x = 12k + 5$$

۳۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. باید تعداد جواب‌های طبیعی معادله $21x + 14y = 147$ را بیابیم:

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\div 7} 3x + 2y &= 21 \Rightarrow 3x \equiv 21 \\ \xrightarrow[\div 3]{(2,3)=1} x &\equiv 7 \Rightarrow x = 2k + 1 \end{aligned}$$

در معادله سیاله قرار می‌دهیم.

$$3(2k + 1) + 2y = 21 \Rightarrow 2y = 18 - 6k \Rightarrow y = 9 - 3k$$

باید جواب‌های طبیعی را بیابیم، بنابراین:

$$x \geq 1 \Rightarrow 2k + 1 \geq 1 \Rightarrow k \geq 0 \quad (1)$$

$$y \geq 1 \Rightarrow 9 - 3k \geq 1 \Rightarrow k \leq \frac{8}{3} \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow k = 0, 1, 2$$

۳ جواب طبیعی داریم.

۴۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (4m + 3, 3m + 2) &= d \\ \Rightarrow d | 4m + 3 &\xrightarrow{\times 3} d | 12m + 9 \xrightarrow{-} d | 1 \Rightarrow d = 1 \\ d | 3m + 2 &\xrightarrow{\times 4} d | 12m + 8 \end{aligned}$$

ب م م $(4m + 3)$ ، $(3m + 2)$ همواره برابر ۱ است و این یعنی به ازای هر عدد دو رقمی m این رابطه برقرار است و تعداد اعداد دو رقمی برابر است با ۹۰ تا.