

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

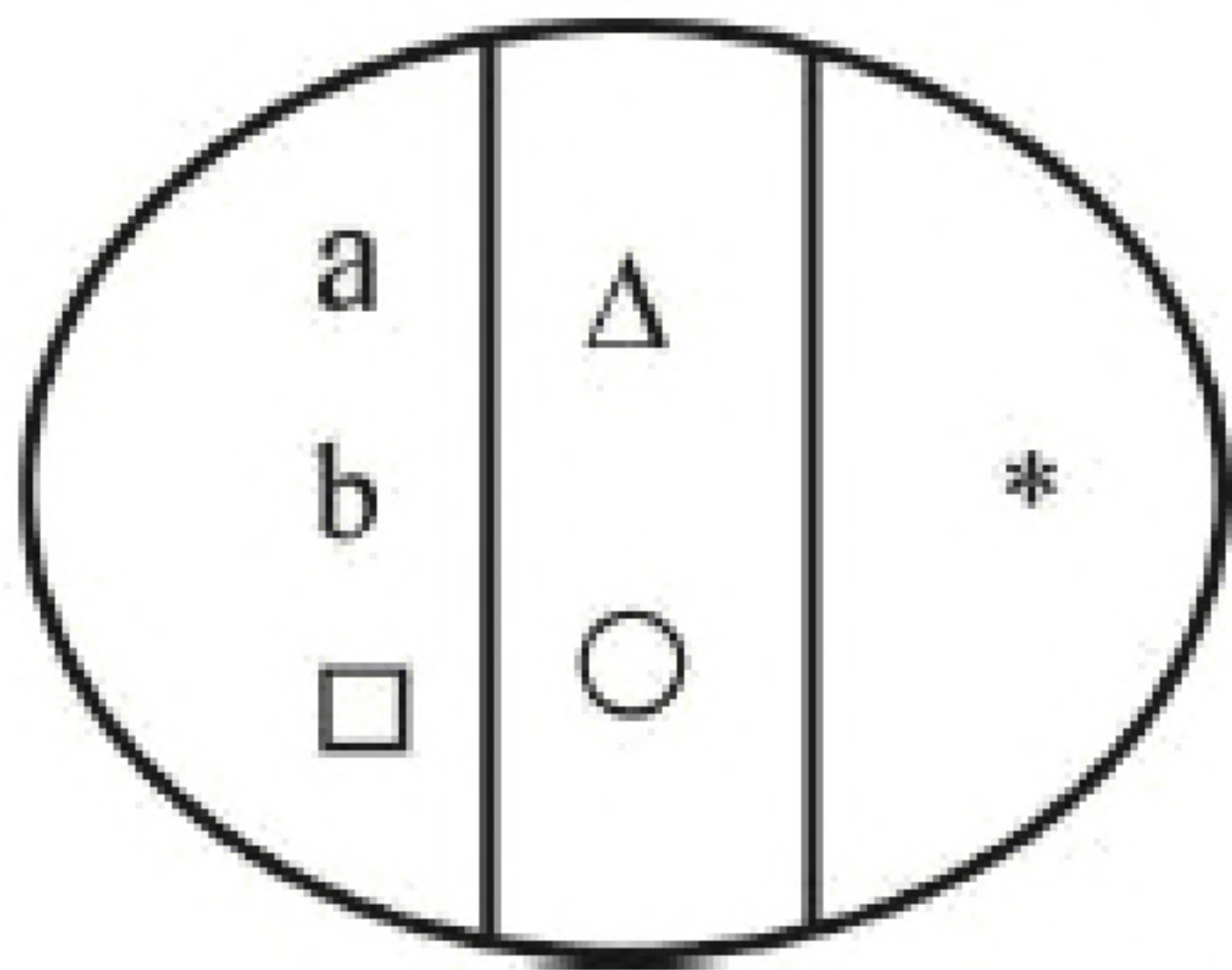
۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۶ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



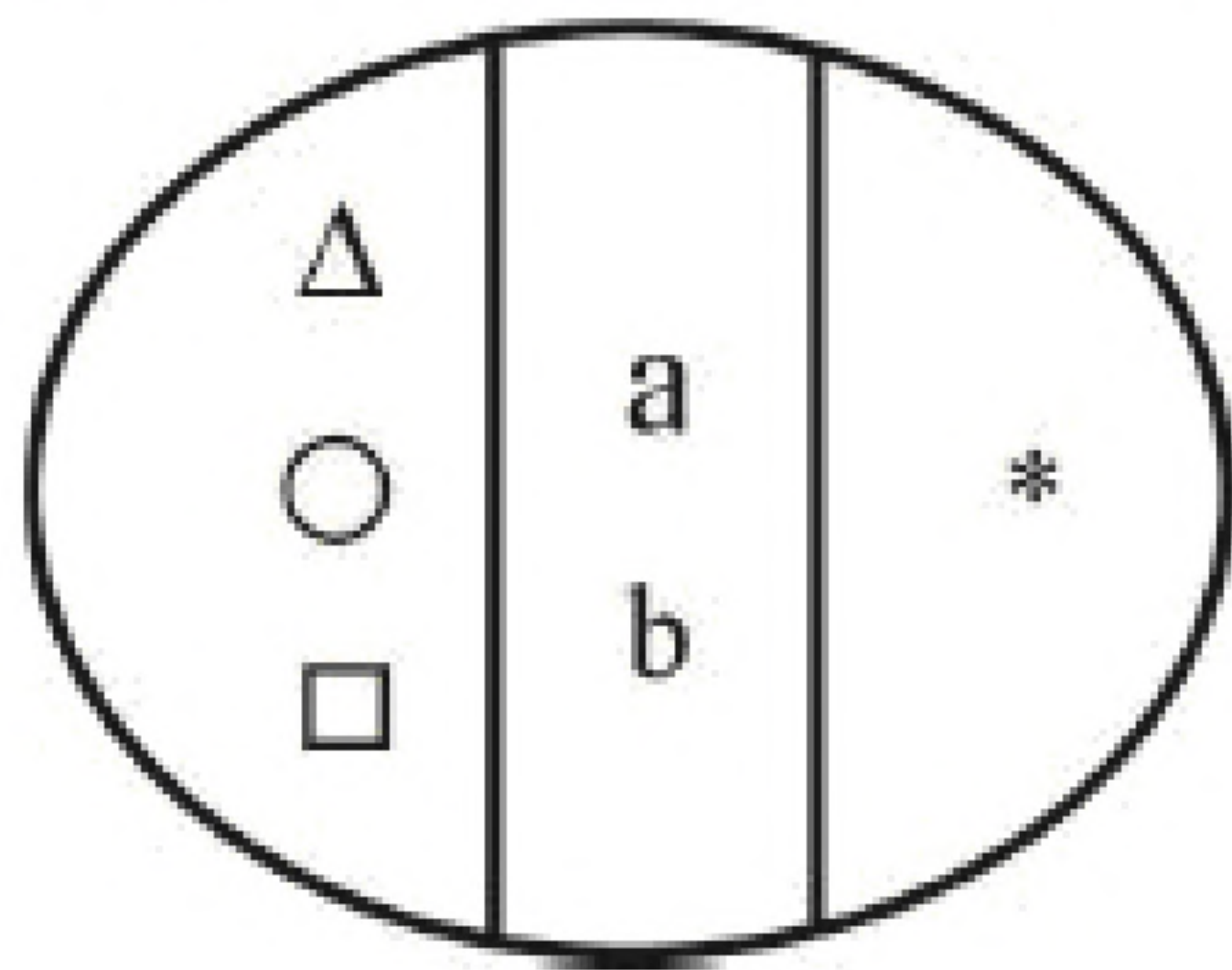
۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای افراز مجموعه A تحت شرایط موردنظر، دو حالت زیر امکان پذیر است:



a, b در کلاس ۳ عضوی باشند

$$\binom{4}{1} \binom{3}{2} \binom{1}{1} = 4 \times 3 \times 1 = 12$$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل افرازاها} = 12 + 4 = 16$$



a, b در کلاس ۲ عضوی باشند

$$\binom{4}{3} \binom{1}{1} = 4 \times 1 = 4$$

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\text{تعداد حالات} = \frac{\binom{8}{3} \times \binom{5}{3} \times \binom{2}{2}}{2!} = 280$$

چون دو مجموعه ۳ عضوی شبیه هم هستند
افراز موردنظر: $A = \{-, -, -\}, \{-, -, -\}, \{-, -\}$

$$A \cup (A \cap B) \xrightarrow{\text{قانون جذب}} A$$

$$(B \cap A) \cup (B - A) = (B \cap A) \cup (B \cap A') = B \cap (A \cup A') = B \cap U = B$$

$$\text{عبارت موردنظر} = (A' \cap B) \cup (A \cap B) = (A' \cup A) \cap B = U \cap B = B$$

$$\text{متمم عبارت موردنظر} = B'$$

۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. مضرب‌های ۳، دو عدد ۳ و ۶ هستند که آن‌ها را جداگانه در دو مجموعه {۳} و {۶} قرار می‌دهیم و به این ترتیب دو بخش افراز ایجاد می‌شود که هریک از اعداد ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ می‌تواند در یکی از این دو بخش حضور داشته باشد. یعنی ۲ انتخاب برای هریک از این ۵ عضو. تعداد کل حالات افراز با این شرایط $2^5 = 32$ است.



۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به خواص مجموعه‌ها خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 & [(A \cap B' \cap C')] \cup [(B \cup C) \cap A] \\
 & \quad \text{عکس دمورگان} \\
 & = [A \cap (B' \cap C')] \cup [(B \cup C) \cap A] \\
 & = [A \cap (B \cup C)'] \cup [(B \cup C) \cap A] \\
 & \quad \text{جابه جایی} \\
 & = [A \cap (B \cup C)'] \cup [A \cap (B \cup C)] \\
 & \quad \text{فاکتورگیری} \\
 & = A \cap [(B \cup C)' \cup (B \cup C)] = A \cap U = A
 \end{aligned}$$

به یاد داشته باشیم اجتماع هر مجموعه با متمم همان مجموعه برابر مجموعه‌ی مرجع خواهد بود.

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. S را می‌توان به ۵ زیرمجموعه‌ی $\{1, 9\}, \{2, 8\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{5\}$ تقسیم نمود. حال اگر ۵ عدد هر کدام از یکی از این ۵ زیرمجموعه انتخاب کنیم، هیچ دو عددی در میان آن‌ها با مجموع ۱۰ وجود ندارد، ولی با انتخاب عدد ششم قطعاً دو عدد با این مشخصات پیدا می‌شود.

۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

گزینه‌های ۲ و ۳ به راحتی با مثال نقض رد می‌شوند و بنابراین $A = B$ را الزاماً نتیجه نمی‌دهند.

مثال نقض برای گزینه‌ی ۴:

$$\begin{aligned}
 A &= \{2\}, B = \{3\}, C = \{2, 3\} \\
 A \times (B - C) &= (A - C) \times B = \emptyset \Rightarrow A = B
 \end{aligned}$$

که این نتیجه درست نیست.

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $A \times B$ شامل زوج مرتب‌هایی مانند (x, y) است که $x \in [0, 3]$ و $y \in \{1, 2, 3\}$.

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

نکته: اگر مجموعه‌ی A دارای n عضو باشد، آن‌گاه $P(A)$ دارای 2^n عضو می‌باشد.

$$|x|^2 - |x| = 0 \Rightarrow |x|(|x| - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

$$A = \{-1, 0, 1\}$$

$$P(A) = 2^3 = 8, P(P(A)) = 2^8$$



۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
نکته:

$$\begin{aligned} ۱) A - B &= A \cap B' \\ ۲) (A \cap B)' &= A' \cup B' \\ [(A' - B) \cup (B - A)']' &= [(A' \cap B') \cup (B \cap A)]' \\ &= (A' \cap B')' \cap (A \cap B)' = (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A - \{B\} = \{a, b, \{a\}, \{a, b\} - \{\{a, b\}\} = \{a, b, \{a\}\}$$

تعداد زیرمجموعه‌های سره‌ی غیرتهی یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با:

$$2^n - 2 = 2^3 - 2 = 6$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به تعریف ضرب دکارتی مؤلفه‌ی X نقاط داده شده عضوهای مجموعه‌ی A و مؤلفه‌ی Y نقاط داده شده، عضوهای مجموعه‌ی B هستند:

$$A = \{-1, 0, 1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$$

اکنون می‌دانیم:

$$(A \times A) \cap (B \times B) = (A \cap B) \times (A \cap B) = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$$

بنابراین ۴ عضو خواهد داشت.

۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

قانون جذب

$$I) A \cap (A \cup B') \equiv A$$

$$\begin{aligned} II) (B \cap C) \cup (B' \cup A) &= (B \cup (B' \cup A)) \cap (C \cup (B' \cup A)) \\ &= ((B \cup B') \cup A) \cap ((C \cup B' \cup A)) \\ &= U \cap (C \cup (B' \cup A)) = A \cup (B' \cup C) \end{aligned}$$

جذب

$$(I), (II) : A \cap [A \cup (B' \cup C)] \equiv A$$

متمم مجموعه‌ی حاصل A' است.

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{aligned} (A \times B) \cup (A \times (B - C)) &= A \times (B \cup (B - C)) \\ \frac{(B - C) \subseteq B}{(B - C) \cup B = B} &\rightarrow A \times (B \cup (B - C)) = A \times B \end{aligned}$$



۱۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2^n - 2^{n-3} = 448 \Rightarrow 2^{n-3} \times 2^3 - 2^{n-3} = 448$$

$$\Rightarrow 2^{n-3} (8 - 1) = 448 \Rightarrow 2^{n-3} = 64 = 2^6$$

$$n - 3 = 6 \Rightarrow n = 9 \Rightarrow A \text{ تعداد زیرمجموعه‌های } = 2^9$$

از طرفی اگر دو عضو به مجموعه‌ی A اضافه کنیم، داریم:

$$\text{جواب} = 2^{11} - 2^9 = 2048 - 512 = 1536$$

۱۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. افرازهای مجموعه‌ی $\{a, b, c, d\}$ به طوری که a و b در یک زیرمجموعه قرار گیرند، عبارتند از:

$$\{a, b\}, \{c, d\}$$

$$\{a, b\}, \{c\}, \{d\}$$

$$\{a, b, c\}, \{d\}$$

$$\{a, b, d\}, \{c\}$$

$$\{a, b, c, d\}$$

یعنی ۵ افراز با این شرایط وجود دارد.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا به محاسبه‌ی اعضای مجموعه‌های A_3 و A_5 می‌پردازیم:

$$A_3 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -3, 2^m \leq 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

$$A_5 = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq -5, 2^m \leq 5\} = \{-3, -2, -1, 0, 1\} = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\Rightarrow A_3 \cap A_5 = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$$

مجموعه‌ی $A_3 \cap A_5$ دارای ۵ عضو بوده، پس مجموعه‌ی توانی آن دارای $2^5 = 32$ عضو خواهد بود.

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای این که مجموعه $\{b, b^2, 4\}$ دو عضوی شود، حالت‌های زیر رخ می‌دهد.

$$b = 4 \Rightarrow \{a, a^2\} = \{4, 16\} \Rightarrow a = 4 \quad (\text{الف})$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \Rightarrow \{a; a^2\} = \{2; 4\} \Rightarrow a = 2 \\ b = -2 \Rightarrow \{a; a^2\} = \{-2; 4\} \Rightarrow a = -2 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

بنابراین حداکثر مقدار $a + b$ برابر ۸ است.

۱۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} m + n = 3 \\ m - n = 1 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = 1 \Rightarrow mn = 2$$



۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. این سؤال را با روش کدگذاری حل می‌کنیم. چون در روش کدگذاری برای هر رقم یک کد ۰ و ۱ نظیر می‌شود، پس در این کد ۱۰ رقمی ۴ رقم ۱ و ۶ رقم ۰ داریم. ابتدا ۶ رقم را در یک ردیف قرار می‌دهیم. سپس از ۷ مکان ایجاد شده که به صورت مربع در زیر نشان داده شده است، چهار مکان از ۷ مکان را انتخاب کرده و به جای آن عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$\square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square$$

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم مجموعه‌های ۳ عضوی دارای ۵ افرز هستند، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه‌ی A را باید پیدا کرد که برابر است با:

$$\binom{7}{3} = 35$$

۲۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. $A \cup B \neq B$ فرض خلف

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

- یک مجموعه از زیرمجموعه‌های A، برای افرز بودن باید سه شرط زیر را داشته باشد:
- (۱) اشتراک دوبه‌دوی زیرمجموعه‌ها تهی باشد.
 - (۲) اجتماع آنها برابر با A باشد.
 - (۳) هیچ‌یک از زیرمجموعه‌ها تهی نباشد.
- بررسی گزینه‌ها:

- (۱) اشتراک دو زیرمجموعه‌ی $\{1, 2\}$ و $\{1, 6\}$ تهی نیست، پس افرز نمی‌باشد.
- (۲) زیرمجموعه‌ی تهی وجود دارد که با شرط (۳) تناقض دارد، پس افرز نیست.
- (۳) اجتماع هر سه زیرمجموعه برابر A نمی‌باشد، پس افرز نیست.
- (۴) اشتراک دوبه‌دوی زیرمجموعه‌ها تهی، هر کدام از زیرمجموعه‌ها ناتهی و اجتماع آنها برابر با A می‌باشد، در نتیجه افرز مجموعه‌ی A است.

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانید که اجتماع همه‌ی افرزها برابر مجموعه A خواهد بود. بنابراین مجموعه A به صورت $A = \{a, b, c, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ است.

پس ۵ عضوی است. افرزهای فاقد مجموعه تک‌عضوی به صورت زیر است:

$$5 = 3 + 2 \rightarrow \text{تعداد} = \binom{5}{2} \times \binom{3}{3} = 10$$

$$5 = 5 \rightarrow 1 \rightarrow \binom{5}{5} = 1$$

$$\Rightarrow 11 = \text{تعداد کل افرزهای فاقد تک‌عضوی}$$



۲۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$i = 1 \Rightarrow A_1 = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{3} > -1 \text{ و } 2^n \leq 3 \right\} = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$i = 3 \Rightarrow A_3 = \left\{ n \in \mathbb{Z} \mid \frac{n}{3} > -3 \text{ و } 2^n \leq 9 \right\} = \{-8, -7, \dots, 3\}$$

بنابراین مجموعه‌ی $A_3 \times A_1$ دارای $4 \times 12 = 48$ عضو است.

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. می‌دانیم:

$$(x, y) = (z, t) \text{ اگر و تنها اگر } x = z, y = t$$

$$(m, n) = (p, q) \Rightarrow \begin{cases} m = p \\ n = q \end{cases} \Rightarrow mn = pq \Rightarrow mn - pq = 0$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases} C \subseteq A \cap B \\ A \cap B \subseteq A \end{cases} \Rightarrow C \subseteq A \Rightarrow A' \subseteq C'$$

۲۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$A \cap B = \{a, \{b\}\} \cap \{\{a\}, b\} = \{\}$$

بنابراین $2^0 = 1$ زیرمجموعه دارد.

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا مجموعه‌ی A را مشخص می‌کنیم.

$$|x - 1| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x - 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow n(A) = 3 \Rightarrow n(P(A)) = 2^3 = 8$$

از طرفی می‌دانیم که:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$P(A) \text{ عضو } 3 \text{ حداقل} = 2^8 - \binom{8}{0} - \binom{8}{1} - \binom{8}{2} = 256 - 1 - 8 - 28 = 219$$



۳۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. برای محاسبه تعداد اعداد بخش پذیر بر k در مجموعه اعداد از ۱ تا n از رابطه $\left[\frac{n}{k} \right]$ استفاده می کنیم.

$$A \cap B = 6 \text{ مضرب هر دو یعنی مضرب } 6 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{999}{6} \right] - \left[\frac{99}{6} \right]}{900}$$
$$= \frac{166 - 16}{900} = \frac{150}{900}$$

$$B = 3 \text{ مضرب } 3 \Rightarrow P(B) = \frac{\left[\frac{999}{3} \right] - \left[\frac{99}{3} \right]}{900} = \frac{333 - 33}{900} = \frac{300}{900}$$

$$P(A \cup B) = P(A' \cap B)' = 1 - P(B - A) = 1 - P(B) + P(A \cap B)$$
$$= 1 - \frac{300}{900} + \frac{150}{900} = \frac{750}{900} = \frac{5}{6}$$