

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



۱	۲	۳	۴
۱ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۵ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۸ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۳ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۵ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۷ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۸ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۱ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ - <input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۳ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۴ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ - <input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ - <input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



$$4^3 \times 2^{-2x} = \frac{1}{64}$$

۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با ساده کردن معادله داده شده داریم:

$$(2^2)^3 \times 2^{-2x} = \frac{1}{2^6}$$

$$2^6 \times 2^{-2x} = 2^{-6} \Rightarrow 2^{6-2x} = 2^{-6} \Rightarrow 6-2x = -6 \Rightarrow 6+6 = 2x \Rightarrow 12 = 2x \Rightarrow 6 = x$$

۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با توجه به دنباله هندسی بودن دنباله داریم:

$$r^{m+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow (\sqrt{a})^{m+1} = \frac{a^{12}}{a^6} \Rightarrow (\sqrt{a})^{m+1} = a^6 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} a^{m+1} = a^{12}$$

$$\Rightarrow m+1 = 12 \Rightarrow m = 11$$

۳- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. همه اعداد را به صورت یک عدد توان دار بر مبنای ۲ می نویسیم:

$$2^x \times 4^x \times 8^x \times \dots \times 2048^x = 2^x \times (2^2)^x \times (2^3)^x \times \dots \times (2^{11})^x$$

$$= 2^x \times 2^{2x} \times 2^{3x} \times \dots \times 2^{11x} = 2^{x+2x+3x+\dots+11x} = 2^{66x}$$

$$x+2x+3x+\dots+11x = (1+2+3+\dots+11)x = \frac{11 \times (11+1)}{2} x = 66x$$

توجه:

۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جملات $\frac{x}{25}$ ، x ، $5x+20$ سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند؛ پس داریم:

$$x^2 = \left(\frac{x}{25}\right)(5x+20) \Rightarrow x^2 = \left(\frac{x}{25}\right)(5x) + \left(\frac{x}{25}\right)(20) \Rightarrow x^2 = \frac{x^2}{5} + \frac{4x}{5}$$

$$\xrightarrow{\times 5} 5x^2 = x^2 + 4x \Rightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق} \\ x=1 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{x=1} 1, z, 25 \Rightarrow z^2 = 1 \times 25 \Rightarrow z^2 = 25 \Rightarrow z = 5$$

$$\xrightarrow{x=1} \frac{1}{25}, y, 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{25} \times 1 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow y = \frac{1}{5}$$

$$x+y+z = 1 + \frac{1}{5} + 5 = \frac{31}{5} = 6\frac{1}{5}$$



۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با ساده کردن رادیکال‌ها داریم:

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3} \times \sqrt[4]{(1^2)^{\frac{1}{3}}}}{(\sqrt[4]{27})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{\sqrt{2^2 \times 3}} \times \sqrt[4]{(2^6)^{\frac{1}{3}}}}{(\sqrt[4]{2^6})^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[4]{2^2 \times 3} \times \sqrt[4]{2^2}}{(\sqrt[4]{3^4})^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{(2^2 \times 3)^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{3}}} = 2$$

۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

از آن‌جا که $2y - 1$, $2y + 1$, $4y - 1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی هستند، داریم:

$$(2y + 1)^2 = (2y - 1)(4y - 1) \Rightarrow 4y^2 + 4y + 1 = 8y^2 - 6y + 1$$

$$4y^2 - 10y = 0 \Rightarrow 2y(2y - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2y - 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2} \end{cases}$$

اگر $y = 0$ باشد، این سه جمله به صورت $-1, 1, -1$ خواهند شد که دنباله‌ی هندسی افزایشی نیست. پس $y = 0$ غیرقابل قبول است. با تقسیم دو جمله‌ی متوالی این دنباله‌ی هندسی، نسبت مشترک (r) را به دست می‌آوریم:

$$r = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$r = \frac{2y - 1}{4x} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{4}{4x} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{\frac{3z}{2}}{4y - 1} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{2}{9} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{3z}{18} \Rightarrow z = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} x = \frac{2}{3} \\ z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow xz = 6$$



۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_5 = a_1 \times \frac{1-r^5}{1-r}$$

$$\frac{a_6}{a_7} = 16 \Rightarrow \frac{a_1 r^5}{a_1 r} = 16 \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$\text{اگر } r = 2 \Rightarrow 55 = a_1 \times \frac{1-2^5}{1-2} \Rightarrow 55 = \frac{-31}{-1} a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{55}{31} \notin \mathbb{Z}$$

$$r = -2 \Rightarrow 55 = a_1 \times \frac{1-(-2)^5}{1-(-2)} \Rightarrow 55 = \frac{1+32}{3} a_1 \Rightarrow 55 = 11a_1 \Rightarrow a_1 = 5 \in \mathbb{Z}$$

با داشتن $a_1 = 5$ و $r = -2$ دنباله به صورت روبه‌رو است:

$$5, -10, 20, -40, 80, -160$$

که تمام جملات آن اعداد صحیح است. اختلاف جملات دوم و ششم برابر است با:

$$|a_7 - a_6| = |-160 - (-10)| = |-150| = 150$$

۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با تشکیل $f\left(\frac{x}{3}\right)$ و $g(x-1)$ داریم:

$$f(x) = 27^x = (3^3)^x = 3^{3x} \Rightarrow f\left(\frac{x}{3}\right) = 3^{3 \times \frac{x}{3}} = 3^x$$

$$g(x-1) = 3^{4(x-1)+2} = 3^{4x-4+2} = 3^{4x-2}$$

حاصل عبارت خواسته شده عبارت است از:

$$f\left(\frac{x}{3}\right) \times g(x-1) = 3^x \times 3^{4x-2} = 3^{x+4x-2} = 3^{5x-2}$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به شکل $f(-2) = \frac{9}{4}$ است، بنابراین:

$$a^{-2} = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \Rightarrow f(3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$$

$$\Rightarrow 2x-2 = -3 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -0.5$$

۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اطلاعات سؤال را می‌نویسیم:

$$r = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}, \quad c = 250000, \quad t = 4$$

$$f(t) = c(1+r)^t \Rightarrow f(4) = 250000 \times \left(1 + \frac{1}{5}\right)^4 = 250000 \times \frac{1296}{625} = 1296 \times 400 = 518400$$



۱۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در نمودار تابع نمایی، هر چه مقدار پایه بیشتر شود، در $x < 0$ ، نمودار به محور x ها نزدیک تر می شود، یعنی در نمودار داده شده داریم:

$$\left. \begin{aligned} 5\sqrt{3} &= \sqrt{5^2 \times 3} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{75} \\ 6\sqrt{2} &= \sqrt{6^2 \times 2} = \sqrt{36 \times 2} = \sqrt{72} \\ 4\sqrt{4} &= \sqrt{4^2 \times 4} = \sqrt{16 \times 4} = \sqrt{64} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} c &= \sqrt{75}, b = \sqrt{72}, a = \sqrt{64} \\ c &= 5\sqrt{3}, b = 6\sqrt{2}, a = 4\sqrt{4} \end{aligned}$$

۱۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با تشکیل تابع $\frac{g}{f}$ داریم:

$$\frac{g}{f} = \frac{5^x}{25^x} = \left(\frac{5}{25}\right)^x = \left(\frac{1}{5}\right)^x$$

پس چون $1 < \frac{1}{5}$ است، نمودار تابع، کاهشی بوده و شبیه نمودار گزینه ۴ است.

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا به کمک نقطه داده شده، مقدار k را به دست می آوریم:

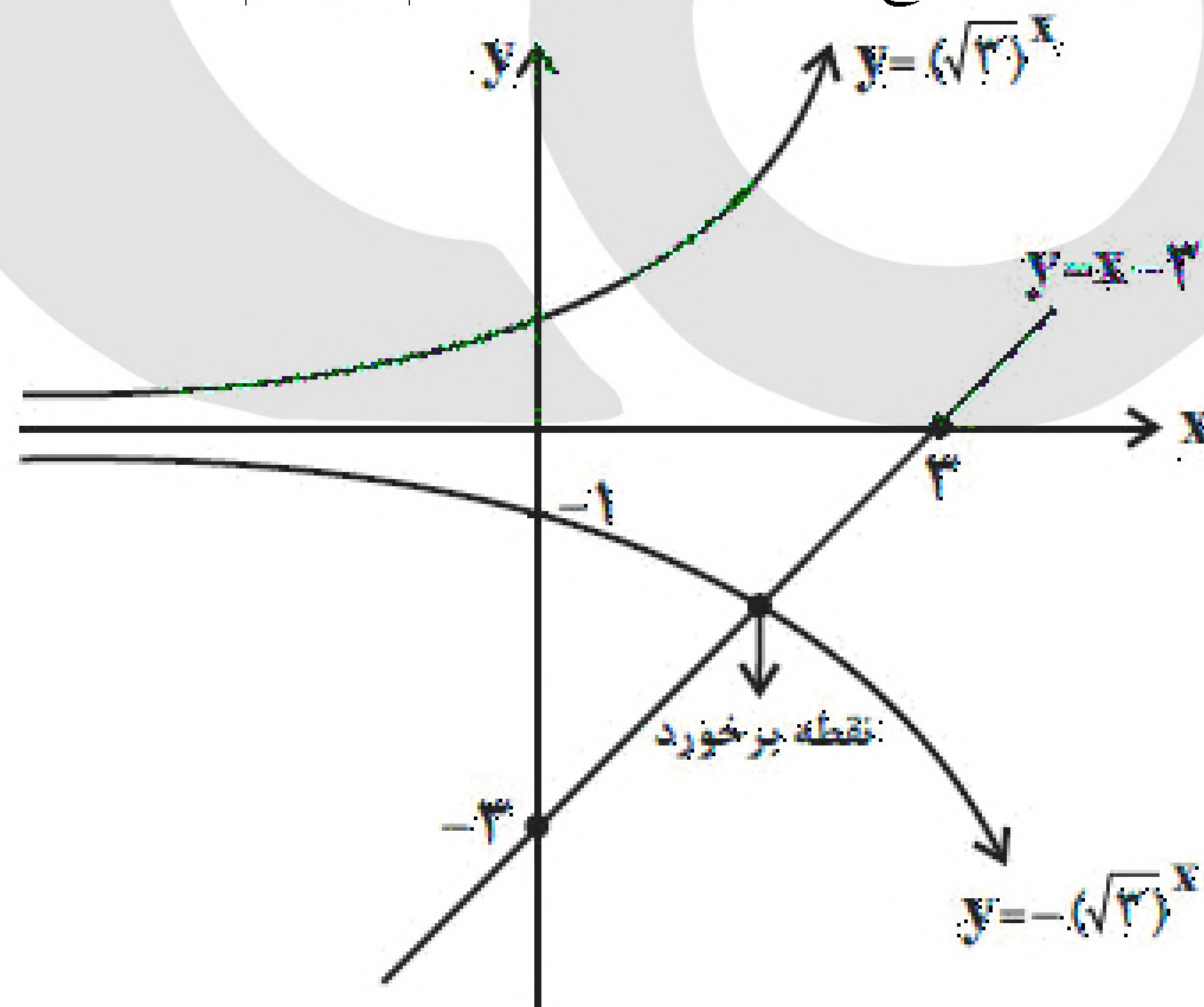
$$f(-2) = 9 \Rightarrow \left(\frac{k}{2}\right)^{-2} = 9 \Rightarrow \left(\frac{2}{k}\right)^{+2} = 9 \Rightarrow \left(\frac{2}{k}\right)^2 = 3^2$$

$$\xrightarrow{k > 0} \frac{2}{k} = 3 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \rightarrow f(x) = \left(\frac{2}{\frac{2}{3}}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\Rightarrow f(1) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$$

بنابراین:

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می کنیم.



پس نقطه برخورد در ربع چهارم واقع است.



«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۱۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. نقطه (۸, ۱۶) روی تابع $f(x) = a^x$ است، پس:

$$f(8) = 16 \Rightarrow a^8 = 16 \Rightarrow a^8 = 2^4 \xrightarrow{a > 0} a = 2^{\frac{4}{8}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x \Rightarrow f(-6) = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-6} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

پس:

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در توابع نمایی $y = a^x$ ، $(a > 1)$ هر چه a بیشتر باشد، به ازای $x > 0$ تابع نمایی بالاتر قرار می گیرد.

$$2 < \frac{5}{2} < 4 < \frac{11}{2}$$

پس $y = \left(\frac{11}{2}\right)^x$ به ازای $x > 0$ ، بالاتر از سایر توابع قرار دارد.

۱۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به حاصل عبارت خواسته شده داریم:

$$\begin{cases} f(x+2) = 2^{x+2} \\ f(x-2) = 2^{x-2} \end{cases} \Rightarrow \frac{f(x+2)}{f(x-2)} = \frac{2^{x+2}}{2^{x-2}} = 2^{x+2-x-2} = 2^4 = 16$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. سه جمله سوم دنباله a_7 و a_8 و a_9 هستند؛ بنابراین:

$$a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 = a_1 r^6 \cdot a_1 r^7 \cdot a_1 r^8 = a_1^3 r^{21} = 125$$

$$(a_1 r^7)^3 = 5^3 \Rightarrow a_1 r^7 = 5 \Rightarrow a_8 = 5$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} a_7 + a_9 = 24 \\ a_9 - a_5 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^6 + a_1 r^8 = 24 \\ a_1 r^8 - a_1 r^4 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 r^6 (1 + r^2) = 24 \\ a_1 r^4 (r^4 - 1) = 16 \quad (*) \end{cases}$$

$$\frac{(r^4 - 1) = (r^2 - 1)(r^2 + 1)}{a_1 r^4 (r^4 - 1)} \rightarrow \frac{a_1 r^6 (1 + r^2)}{a_1 r^4 (r^4 - 1)} = \frac{24}{16} \Rightarrow \frac{r^2}{r^2 - 1} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2r^2 = 3r^2 - 3$$

$$\Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \pm \sqrt{3} \xrightarrow{\text{دنباله افزایشی}} r = \sqrt{3} \xrightarrow{(*)} a_1 (\sqrt{3})^4 (\sqrt{3}^4 - 1) = 16$$

$$\Rightarrow 9a_1 (9 - 1) = 16 \Rightarrow a_1 = \frac{2}{9}$$



$$x = \frac{-5 + 11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 3$$

۲۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در دنباله حسابی داریم:

$$y \times 3 = 12^2 \Rightarrow y = \frac{12^2}{3} = 48$$

در دنباله هندسی داریم:

$$3, a, b, c, 48 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_5 = 48 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_5}{t_1} = \frac{t_1 r^4}{t_1} = \frac{48}{3} \Rightarrow r^4 = 16$$

$$\Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow b = 3 \times (\pm 2)^2 = 12$$

$$3k+1, -2, \dots \Rightarrow t_1 = 3k+1, t_2 = -2$$

۲۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$r = \frac{t_2}{t_1} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{-2}{3k+1} \Rightarrow 3k+1 = -8 \Rightarrow 3k = -9 \Rightarrow k = -3 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -8 \\ r = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$t_5 = t_1 r^4 \Rightarrow t_5 = -8 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{-8}{256} = \frac{-1}{32}$$

جمله پنجم برابر است با:

$$n = 1 \Rightarrow t_2 = -3t_1 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = -3 \Rightarrow t_1 = \frac{4}{3}, r = -3$$

۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی داریم:

$$t_n = t_1 r^{n-1} \Rightarrow 108 = \frac{4}{3} (-3)^{n-1} \Rightarrow (-3)^{n-1} = \frac{324}{4} = 81 \Rightarrow (-3)^{n-1} = (-3)^4$$

$$\Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

۲۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به جمله عمومی یک دنباله هندسی داریم:

$$a_4 - a_2 = 6 \Rightarrow a_1 r^3 - a_1 r = 6 \xrightarrow{r=2} 8a_1 - 2a_1 = 6 \Rightarrow 6a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 1$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$t_n = t_1 r^{n-1}, \frac{t_1 r^4}{t_1 r^2} = \frac{\frac{32}{3}}{24} \Rightarrow r^2 = \frac{32}{3 \times 24} \Rightarrow r^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow r = \pm \frac{2}{3}, t_3 = t_1 r^2$$

$$\Rightarrow 24 = t_1 \times \frac{4}{9} \Rightarrow t_1 = \frac{24 \times 9}{4} \Rightarrow t_1 = 54$$

$$t_7 = t_1 r^6 \Rightarrow t_7 = 54 \times \left(\pm \frac{2}{3}\right)^6 = \frac{128}{27}$$



۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_5 a_2}{a_6 + a_8 + a_4} &= \frac{a_1 r^4 \times a_1 r}{a_1 r^5 + a_1 r^7 + a_1 r^3} = \frac{a_1 r^5}{r^3(1 + r^2 + r^4)} = \frac{a_1 r^2}{1 + r^2 + r^4} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{9}{4}}{1 + \frac{9}{4} + \frac{81}{16}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{133}{16}} = \frac{18}{133} \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{1}{4}, a_4 = \frac{16}{27}$$

۲۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. براساس گفته‌ی سؤال:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow r^{4-1} = \frac{\frac{16}{27}}{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^3 = \frac{64}{27} \Rightarrow r = \frac{4}{3}$$

$$c = a_5 = a_4 \times r = \frac{16}{27} \times \frac{4}{3} = \frac{64}{81} \Rightarrow 3\sqrt{c} = 3 \times \sqrt{\frac{64}{81}} = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۲۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. طبق گفته‌های سؤال:

$$a_4 = 9, r = 3, a_n = 3^{a-nb} \Rightarrow a_4 = a_1 \times r^3 = 9 \Rightarrow 9 = a_1 \times (3^3)$$

$$\Rightarrow 9 = a_1 \times 27 \Rightarrow a_1 = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

$$a_n = 3^{a-nb} \Rightarrow a_1 = 3^{a-b} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-1} = 3^{a-b}$$

براساس جمله‌ی عمومی دنباله:

$$a_4 = 3^{a-4b} \Rightarrow 9 = 3^2 = 3^{a-4b}$$

$$\begin{cases} a - 4b = 2 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + 4b = -2 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3b = -3 \Rightarrow b = -1, a = -2$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$$