

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



۱- در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله دوم ۵۷ و جمله دهم ۳۹ است. جمله بیست و یکم دنباله کدام است؟

- (۱) ۸۱ (۲) ۸۵ (۳) ۸۷ (۴) ۸۳

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سه جمله دوم دنباله، جمله‌های چهارم و پنجم و ششم هستند.

$$a_4 + a_5 + a_6 = 57 \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 4d + a_1 + 5d = 57 \Rightarrow 3a_1 + 12d$$

$$\Rightarrow a_1 + 4d = 19$$

$$a_1 + 9d = 39$$

از طرفی $a_{10} = 39$ یعنی:

دستگاه تشکیل داده و جمله اول (a_1) و قدرنسبت (d) را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} a_1 + 4d = 19 \\ a_1 + 9d = 39 \end{cases} \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_{21} = a_1 + 20d = 3 + 80 = 83$$

برای جمله ۲۱ام داریم:

۲- در دنباله‌ای با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = 3a_n - 2$ اگر جمله چهارم برابر ۸۲ باشد، جمله اول کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴) ۱۰

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. برای به دست آوردن جمله اول به ترتیب جمله سوم و دوم را باید به دست آوریم:

$$\xrightarrow{n=3} a_{3+1} = 3 \times a_3 - 2 \Rightarrow a_4 = 3 \times a_3 - 2 \Rightarrow 82 = 3 \times a_3 - 2$$

$$\Rightarrow 84 = 3 \times a_3 \Rightarrow 28 = a_3$$

$$\xrightarrow{n=2} a_{2+1} = 3 \times a_2 - 2 \Rightarrow a_3 = 3 \times a_2 - 2 \Rightarrow 28 = 3 \times a_2 - 2 \Rightarrow 30 = 3 \times a_2 \Rightarrow 10 = a_2$$

$$\xrightarrow{n=1} a_{1+1} = 3 \times a_1 - 2 \Rightarrow a_2 = 3 \times a_1 - 2 \Rightarrow 10 = 3 \times a_1 - 2 \Rightarrow 12 = 3a_1 \Rightarrow 4 = a_1$$

۳- مجموع سه جمله اول یک دنباله حسابی افزایشی برابر ۳۰ و حاصل ضربشان ۸۴۰ است. جمله چندم این دنباله برابر ۵۰ است؟

- (۱) دهم (۲) دوازدهم (۳) سیزدهم (۴) پانزدهم

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ۳ جمله اول دنباله حسابی را بر طبق قاعده زیر در نظر می‌گیریم:

$$t - d, t, t + d$$

جمله وسط را t در نظر گرفته و بر حسب اختلاف مشترک (d) می‌نویسیم:

$$(t - d) + t + (t + d) = 30 \Rightarrow 3t = 30 \Rightarrow t = 10$$

$$(t - d) \times t \times (t + d) = 840 \Rightarrow (10 - d)(10 + d) = 84 \Rightarrow 100 - d^2 = 84$$

$$\Rightarrow 100 - 84 = d^2 \Rightarrow 16 = d^2 \xrightarrow{d > 0} 4 = d$$

$$t = 10 \Rightarrow a_1 = 6, \quad \underbrace{(10 - 4)}_6, \quad \underbrace{10}_{10}, \quad \underbrace{(10 + 4)}_{14}$$

$$a_n = 50 \Rightarrow a_1 + (n - 1)d = 50 \Rightarrow (n - 1) \times 4 = 50 - 6 \Rightarrow n - 1 = \frac{44}{4} \Rightarrow n - 1 = 11 \Rightarrow n = 12$$



۴- جمله بیستم دنباله مثلی با جمله چندم دنباله $a_n = 2n - 10$ برابر است؟

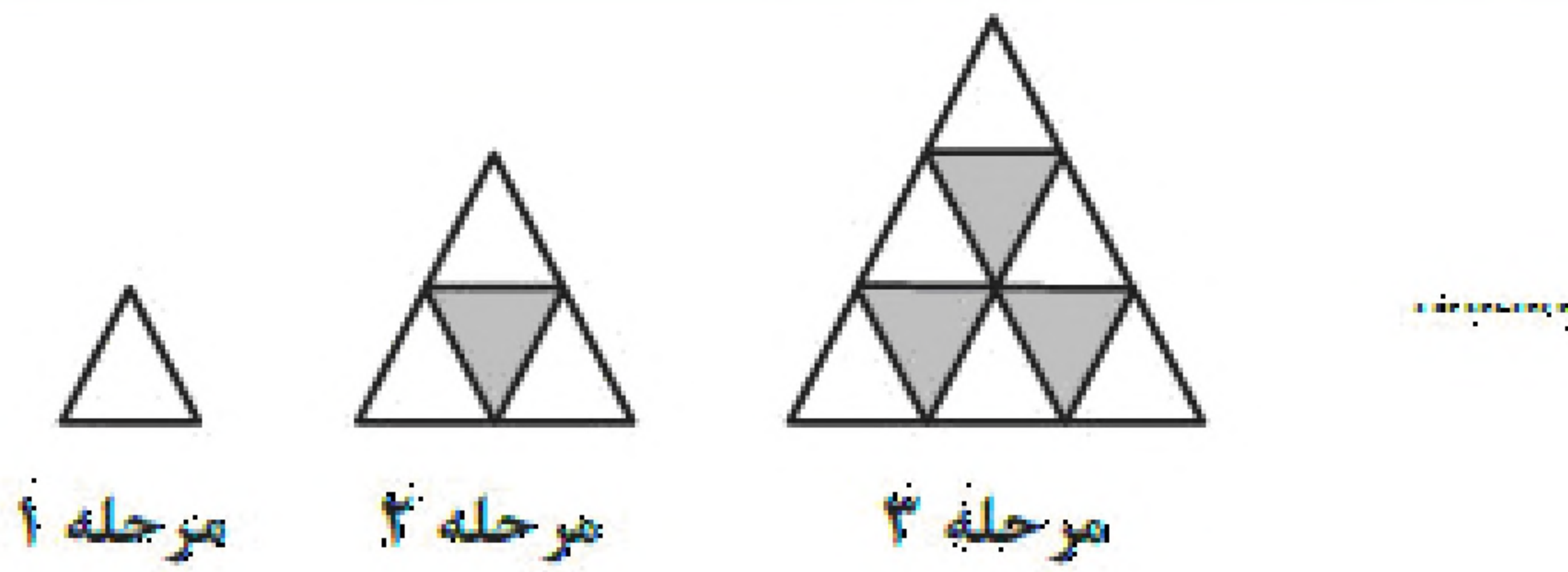
(شکل الگوی مثلی



۷- تعداد مثلث‌های سفید در مرحله بیستم کدام است؟

- (۱) ۱۹۰
(۲) ۲۱۰
(۳) ۲۰۰
(۴) ۲۲۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$۱ \text{ در مرحله } ۱ = ۱ = \frac{۱ \times ۲}{۲}$$

$$۳ \text{ در مرحله } ۲ = ۲ + ۱ = ۳ = \frac{۲ \times ۳}{۲}$$

$$۶ \text{ در مرحله } ۳ = ۳ + ۲ + ۱ = ۶ = \frac{۳ \times ۴}{۲}$$

$$۱۰ \text{ در مرحله } ۴ = ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۰ = \frac{۴ \times ۵}{۲}$$

...

$$۲۰ \text{ در مرحله } ۲۰ = ۲۰ + ۱۹ + ۱۸ + \dots + ۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + ۲۰$$

$$= \frac{۲۰ \times ۲۱}{۲} = ۲۱۰$$

تعداد مثلث‌های سفید

$$a_n = ۱ + ۲ + ۳ + \dots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

در الگوی داده شده برای شکل n ام داریم:

۸- جمله چندم دنباله $a_n = \frac{۳n-۱}{۵n+۷}$ برابر $\frac{۷}{۱۲}$ است؟

- (۱) ۵۸
(۲) ۶۰
(۳) ۶۱
(۴) ۶۲

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. جمله n ام را برابر $\frac{۷}{۱۲}$ قرار می‌دهیم:

$$\frac{۳n-۱}{۵n+۷} = \frac{۷}{۱۲} \Rightarrow ۳۶n - ۱۲ = ۳۵n + ۴۹ \Rightarrow n = ۴۹ + ۱۲ = ۶۱$$



۹- جمله چندم دنباله $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ، ۸ واحد کم‌تر از مجموع جمله هفتم دنباله فیوناتچی و جمله چهارم دنباله

$b_n = n^2$ است؟

(۴) هفتم

(۳) ششم

(۲) پنجم

(۱) چهارم

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} : \text{جمله عمومی دنباله } a_n$$

$$F_7 = 13 \Rightarrow \dots, 13, 8, 5, 3, 2, 1, 1 : \text{دنباله فیوناتچی}$$

جمله هفتم

$$b_n = n^2 : \text{جمله عمومی دنباله } b_n \Rightarrow b_4 = 16 \Rightarrow a_n = F_7 + b_4 - 8$$

$$\Rightarrow a_n = 13 + 16 - 8 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 21 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+7) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=6 & \checkmark \\ n=-7 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۰- اگر جملات سوم و پنجم دنباله $t_n = (a-1)n^2 + bn$ به ترتیب از راست به چپ برابر ۳ و ۶ باشد، جمله دهم آن کدام است؟

(۴) ۱۷

(۳) ۱۶

(۲) ۱۵

(۱) ۱۸

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. جملات سوم و پنجم دنباله $t_n = (a-1)n^2 + bn$ ، به ترتیب برابر ۳ و ۶ هستند، پس:

$$t_3 = (a-1)(3)^2 + b(3) = 3 \Rightarrow 9a - 9 + 3b = 3 \Rightarrow 9a + 3b = 12 \xrightarrow{\div 3} 3a + b = 4 \quad (1)$$

$$t_5 = (a-1)(5)^2 + b(5) = 6 \Rightarrow 25a - 25 + 5b = 6 \Rightarrow 25a + 5b = 31 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{1, 2} \begin{cases} 3a + b = 4 \\ 25a + 5b = 31 \end{cases} \xrightarrow{\times (-5)} \begin{cases} 3a + b = 4 \\ -15a - 5b = -20 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} \begin{cases} 3a + b = 4 \\ 10a = 11 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{11}{10}, b = \frac{7}{10}$$

$$t_n = \frac{1}{10}n^2 + \frac{7}{10}n$$

$$t_{10} = \frac{1}{10}(10)^2 + \frac{7}{10}(10) = 10 + 7 = 17$$

جمله دهم دنباله برابر است با:



۱۱- اگر جمله اول دنباله‌ای برابر یک و بین جملات، رابطه $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ برقرار باشد، جمله نوزدهم دنباله کدام است؟

- (۱) ۴۴۱ (۲) ۳۶۱ (۳) ۴۰۰ (۴) ۳۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. داریم $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ بنابراین می‌توان نوشت:

$$n = 1 \Rightarrow a_2 = a_1 + 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2$$

$$n = 2 \Rightarrow a_3 = a_2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9 = 3^2$$

$$n = 3 \Rightarrow a_4 = a_3 + 2(3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16 = 4^2$$

$$\Rightarrow a_{19} = 19^2 = 361$$

۱۲- دنباله $x, 5, y, z, 17, k, \dots$ حسابی است. حاصل $x + y + z - k$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۶ (۴) ۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بین دو عدد ۵ و ۱۷، دو جمله آمده است، بنابراین اختلاف مشترک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{17 - 5}{2 + 1} = \frac{12}{3} = 4$$

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

حالا کل دنباله را بازنویسی می‌کنیم:
در این صورت داریم:

$$x = 1, y = 9, z = 13, k = 21 \Rightarrow x + y + z - k = 2$$

۱۳- مجموع n جمله اول دنباله‌ای حسابی با جمله عمومی $a_n = 8n - 1$ از رابطه $S_n = kn^2 + hn$ به دست می‌آید. $k + h$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۷ (۳) ۴ (۴) ۳

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با استفاده از جمله عمومی، جمله اول و اختلاف مشترک را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n = 8n - 1 \Rightarrow a_1 = 8 \times (1) - 1 = 7$$

$$a_2 = 8 \times (2) - 1 = 15$$

$$d = a_2 - a_1 = 8$$

نکته ۱: در جمله عمومی دنباله حسابی، ضریب n برابر اختلاف مشترک است.

نکته ۲: رابطه مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ است.

با استفاده از نکته ۲ و با توجه به صورت سؤال داریم:

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \times 7 + (n-1) \times 8) = \frac{n}{2}(6 + 8n) \Rightarrow S_n = 3n + 4n^2 = hn + kn^2$$

$$\Rightarrow k = 4, h = 3 \Rightarrow h + k = 7$$



۱۴- اگر جملات سوم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب با جملات چهارم دنباله $a_n = n^2$ و جمله هشتم دنباله $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ برابر باشند، جمله دهم این دنباله حسابی کدام است؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۳۸ (۳) ۴۴ (۴) ۴۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

جمله سوم دنباله حسابی $a_n = n^2 \Rightarrow a_4 = 4^2 = 16$

جمله هشتم دنباله حسابی $b_n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow b_8 = \frac{8(8+1)}{2} = 36$

با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_3 = 16 \\ a_8 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 16 \\ a_1 + 7d = 36 \end{cases} \Rightarrow 5d = 20 \Rightarrow d = 4$$

$$a_1 + 2(4) = 16 \Rightarrow a_1 = 8$$

$$\Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 8 + 9(4) = 44$$

جمله دهم برابر است با:

۱۵- در دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{1-2n}{3}$ ، مجموع جملات سیزدهم و سیام کدام است؟

- (۱) -۲۸ (۲) -۳۲ (۳) -۱۶ (۴) -۱۸

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. ابتدا جملات سیزدهم و سیام را حساب و سپس با هم جمع می‌کنیم:

$$a_n = \frac{1-2n}{3} \Rightarrow a_{13} = \frac{1-2(13)}{3} = \frac{-25}{3}$$

$$a_n = \frac{1-2n}{3} \Rightarrow a_{30} = \frac{1-2(30)}{3} = \frac{-59}{3}$$

$$\Rightarrow a_{13} + a_{30} = \frac{-25}{3} + \frac{-59}{3} = \frac{-84}{3} = -28$$

۱۶- واسطه حسابی بین جملات سوم و هشتم دنباله حسابی $2, -2, -6, \dots$ کدام است؟

- (۱) -۱۶ (۲) -۱۲ (۳) ۶ (۴) ۹

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$2, -2, -6, \dots \Rightarrow a_1 = 2, d = a_2 - a_1 = -2 - 2 = -4$$

$$\text{واسطه حسابی خواسته شده} = \frac{a_3 + a_8}{2} = \frac{(a_1 + 2d) + (a_1 + 7d)}{2} = \frac{2a_1 + 9d}{2}$$

$$= \frac{2(2) + 9(-4)}{2} = \frac{4 - 36}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$



۱۷- می‌دانیم d اختلاف مشترک جملات دنباله حسابی a_n و $a_1 = d + 1$ است. در صورتی که $\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} = \frac{1}{2}$ باشد،

جمله پنجم دنباله کدام است؟

۱۶ (۴)

۱۴ (۳)

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. با توجه به جمله عمومی دنباله حسابی و رابطه داده شده، داریم:

$$\frac{a_1 + a_2}{a_3 + a_4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a_1 + a_1 + d}{a_1 + 2d + a_1 + 3d} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2a_1 + d}{2a_1 + 5d} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a_1 + 2d = 2a_1 + 5d$$

$$a_1 = d + 1$$

$$\Rightarrow 2a_1 = 3d \xrightarrow{a_1 = d + 1} 2d + 2 = 3d \Rightarrow d = 2 \Rightarrow a_1 = 2 + 1 = 3$$

$$\Rightarrow a_5 = a_1 + 4d = 3 + 4 \times 2 = 11$$

جمله پنجم برابر است با:

۱۸- در میان سی جمله اول دنباله حسابی $3, 5, 7, \dots$ و سی جمله اول دنباله حسابی $2, 5, 8, \dots$ چند جمله مساوی وجود دارد؟

۱۰ (۴)

۱۱ (۳)

۱۲ (۲)

۹ (۱)

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا اولین جمله مشترک را می‌یابیم که ۵ است. دنباله جملات مشترک یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک (قدر نسبت) کوچکترین مضرب مشترک اختلاف مشترک قدر نسبت دو دنباله است.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 = 2 \\ d_2 = 3 \end{array} \right\} \text{م.م.ک} = 6 \Rightarrow C_n = C_1 + (n-1)d$$

دنباله جملات مشترک

$$\Rightarrow C_n = 5 + (n-1)(6) \Rightarrow C_n = 6n - 1$$

$$a_{30} = 3 + 2 \times 29 = 61$$

$$b_{30} = 2 + 3 \times 29 = 89$$

پس $6n - 1$ باید کوچکتر مساوی ۶۱ باشد.

$$6n - 1 \leq 61 \Rightarrow 6n \leq 62 \Rightarrow n \leq \frac{62}{6} \Rightarrow n \leq 10 \Rightarrow 10 \text{ جمله مشترک دارند.}$$



۱۹- مجموع جملات دوم و چهارم یک دنباله حسابی ۸ و حاصل ضرب جملات سوم و نهم آن ۳۲ است. اختلاف مشترک این دنباله کدام است؟

$$\frac{3}{4} (1) \quad \frac{2}{3} (2) \quad \frac{1}{2} (3) \quad \frac{4}{3} (4)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با توجه به اطلاعات سؤال داریم:

$$a_2 + a_4 = 8 \Rightarrow a_1 + d + a_1 + 3d = 8 \Rightarrow 2a_1 + 4d = 8 \Rightarrow a_1 + 2d = 4 \Rightarrow a_3 = 4$$

$$a_3 \times a_9 = 32 \xrightarrow{a_3 = 4} a_9 = \frac{32}{4} = 8$$

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 4 \\ a_1 + 8d = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 2d = -4 \\ a_1 + 8d = 8 \end{cases} \Rightarrow 6d = 4 \Rightarrow d = \frac{2}{3}$$

۲۰- اگر $2\sqrt{2}$ و $\frac{x+\sqrt{2}}{4}$ و $\sqrt{2}$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، اختلاف مشترک مثبت این دنباله کدام است؟

$$\sqrt{2} (1) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (2) \quad \frac{\sqrt{2}}{4} (3) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2} (4)$$

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. اگر a و b و c سه جمله متوالی دنباله حسابی باشند، آنگاه:

$$2b = a + c$$

$$2 \times \frac{(x+\sqrt{2})}{4} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{x+\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{1} \Rightarrow x + \sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = 6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2} + \sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}, \frac{6\sqrt{2}}{4}, 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow d = \frac{6\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

جمله‌ها عبارت‌اند از:



۲۱- جمله عمومی دو دنباله به صورت $a_n = \frac{1}{4} \times 3^{n-1}$ و $a_n = \frac{10n+2}{6}$ هستند. در یکی از این دنباله‌ها که حسابی

است، حاصل $\frac{a_1 \times a_3}{a_2}$ کدام است؟

$$\frac{7}{25} \quad (4)$$

$$\frac{6}{25} \quad (3)$$

$$\frac{7}{11} \quad (2)$$

$$\frac{32}{11} \quad (1)$$

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم جمله عمومی هر دنباله حسابی باید به شکل $a_n = a_1 + (n-1)d$ باشد، ولی جمله عمومی $a_n = \frac{1}{4} \times 3^{n-1}$ را نمی‌توان به شکل گفته شده نوشت، پس دنباله $a_n = \frac{10n+2}{6}$ حسابی است و خواهیم داشت:

$$a_n = \frac{10n+2}{6} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \rightarrow a_1 = \frac{10(1)+2}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ n=2 \rightarrow a_2 = \frac{10(2)+2}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3} \\ n=3 \rightarrow a_3 = \frac{10(3)+2}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 \times a_3}{a_2} = \frac{2 \times \frac{16}{3}}{\frac{11}{3}} = \frac{32}{11}$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

۲۲- جمله چندم دنباله حسابی ...، ۶۸، ۷۰ برابر ۱۲۰۰- است؟

$$۶۳۶ \quad (4)$$

$$۳۶۶ \quad (3)$$

$$۶۵۴ \quad (2)$$

$$۴۵۶ \quad (1)$$

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در دنباله حسابی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow -1200 = 70 + (n-1)(-2) \Rightarrow -1200 = 70 - 2n + 2$$

$$\Rightarrow 2n = 72 + 1200 \Rightarrow 2n = 1272 \Rightarrow n = \frac{1272}{2} = 636$$



۲۳- در یک دنباله حسابی، جمله چهارم برابر ۱۰ و اختلاف مشترک سه برابر جمله اول است، جمله دهم این دنباله کدام است؟

(۴) ۳۱

(۳) ۲۸

(۲) ۲۵

(۱) ۲۳

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در دنباله حسابی داریم:

$$\begin{cases} a_4 = a_1 + 3d = 10 \\ d = 3a_1 \end{cases} \Rightarrow a_1 + 3(3a_1) = 10 \Rightarrow 10a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = 1 \Rightarrow d = 3$$

با توجه به جمله عمومی داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 1 + 9 \times (3) = 28$$

۲۴- بین دو عدد ۳ و ۱۸، سه عدد قرار داده‌ایم که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند. واسطه ششم کدام است؟ (اختلاف مشترک دنباله حسابی مثبت است.)

(۴) ۱۵

(۳) ۱۲

(۲) ۱۰

(۱) ۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون اختلاف مشترک مثبت است، پس $a_1 = 3$ است. اگر بین دو عدد a و b ، تعداد k

$$d = \frac{b-a}{k+1} \Rightarrow d = \frac{18-3}{10} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

واسطه حسابی درج کنیم؛ آنگاه:

واسطه ششم، همان جمله هفتم این دنباله حسابی است. چون اختلاف مشترک مثبت است، جمله اول عدد ۳ است.

$$\Rightarrow a_7 = a_1 + 6d = 3 + 6\left(\frac{3}{2}\right) = 3 + 9 = 12$$

بنابراین:

۲۵- جمله صدم دنباله ...، ۹، ۱۲، ۱۵ کدام است؟

(۴) ۲۸۵

(۳) -۲۹۷

(۲) -۲۸۳

(۱) -۲۸۲

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. دنباله ...، ۹، ۱۲، ۱۵ دنباله حسابی است:

$$d = 12 - 15 = -3, a_1 = 15$$

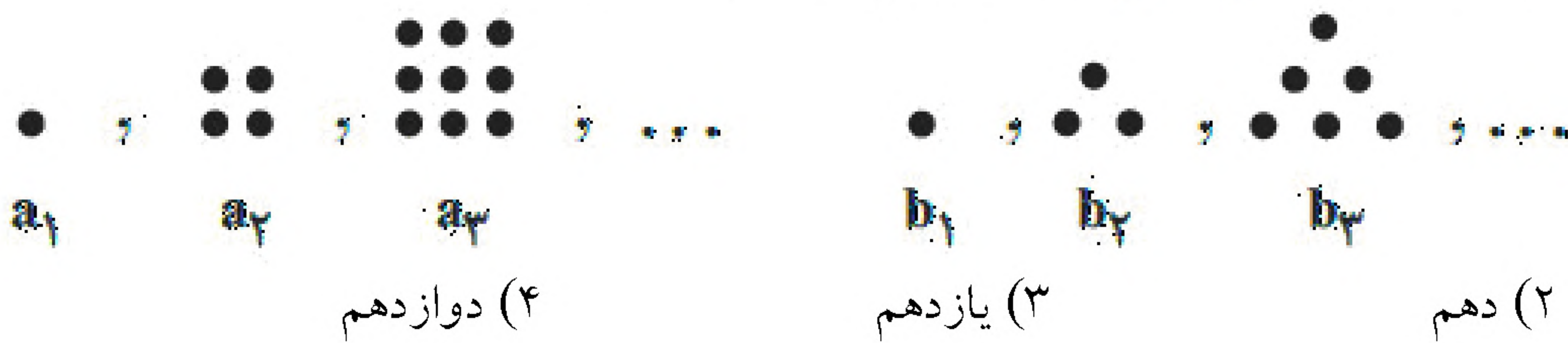
$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

با توجه به جمله عمومی دنباله داریم:

$$\xrightarrow{n=100} a_{100} = a_1 + 99d = 15 + 99(-3) = 15 - 297 = -282$$



۲۶- اگر از مجموع جمله هفتم دنباله فیبوناتچی و جمله هفتم دنباله a_n (در شکل مقابل) هفت واحد کم کنیم، به جمله چندم دنباله b_n می‌رسیم؟ (الگوهای دنباله‌های a_n و b_n مطابق شکل‌های زیر است.)



گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$a_1 = 1 = 1^2, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2 \Rightarrow a_n = n^2 \Rightarrow a_7 = 7^2 = 49$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 \Rightarrow 13 + 49 - 7 = 55$$

جمله هفتم

دنباله b_n به دنباله مثلثی معروف است که جمله عمومی آن به صورت $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است؛ در نتیجه:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n+1) = 110 \Rightarrow n = 10$$

۲۷- اگر جمله اول دنباله‌ای $a_1 = 1$ و بین جملات، رابطه $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$ برقرار باشد، جمله نوزدهم دنباله کدام است؟

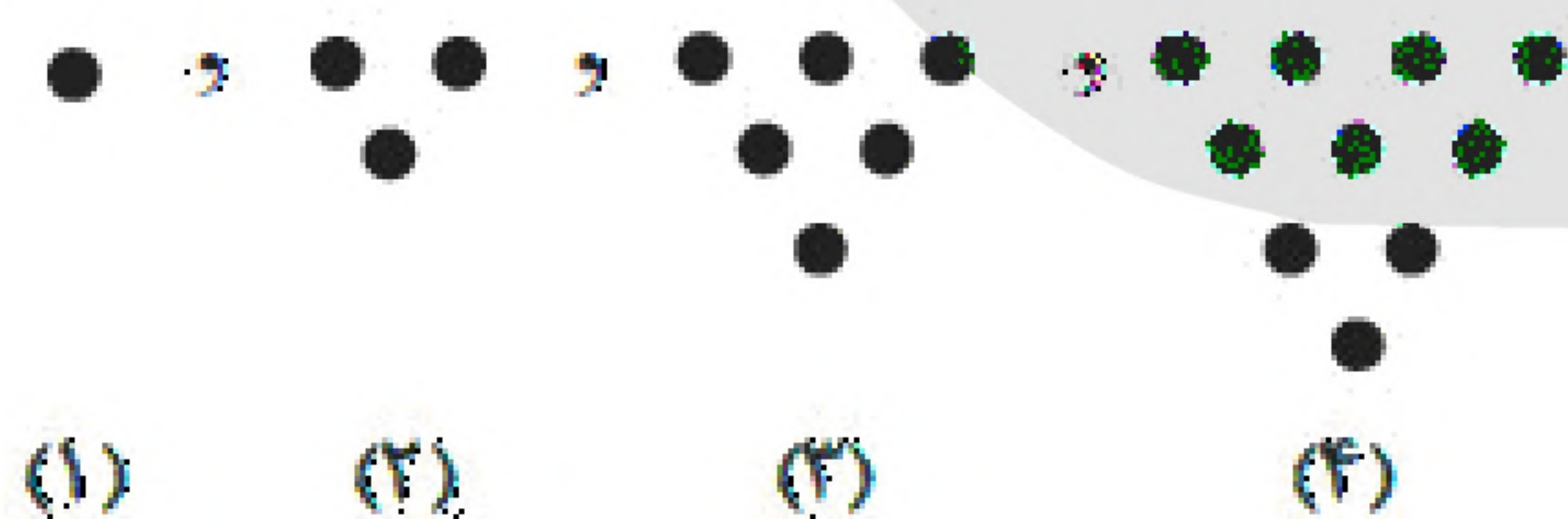
- (۱) ۴۴۱ (۲) ۳۶۱ (۳) ۴۰۰ (۴) ۳۲۴

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. داریم $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ ؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\left. \begin{aligned} n=1 &\Rightarrow a_2 = a_1 + 2(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4 = 2^2 \\ n=2 &\Rightarrow a_3 = a_2 + 2(2) + 1 = 4 + 4 + 1 = 9 = 3^2 \\ n=3 &\Rightarrow a_4 = a_3 + 2(3) + 1 = 9 + 6 + 1 = 16 = 4^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_n = n^2$$

$$\Rightarrow a_{19} = 19^2 = 361$$

۲۸- در کدام مرحله از الگوی مقابل، تعداد نقاط برابر ۳۲۴۰ است؟



- (۱) ۷۵
(۲) ۷۰
(۳) ۸۰
(۴) ۸۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. الگوی داده شده مربوط به یک الگوی مثلثی است که جمله عمومی آن به صورت $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌باشد که در آن n ، تعداد دایره‌ها در مرحله n ام است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 3240 \Rightarrow n(n+1) = 6480 = 80 \times 81 \Rightarrow n = 80$$



۲۹- اگر چهار نقطه ابتدایی مربوط به چهار جمله اول دنباله $a_n = \begin{cases} 4, & n = 2, 3, 5, 8 \\ 3, & n = 1, 4, 6, 7 \end{cases}$ را در نمودار مختصاتی

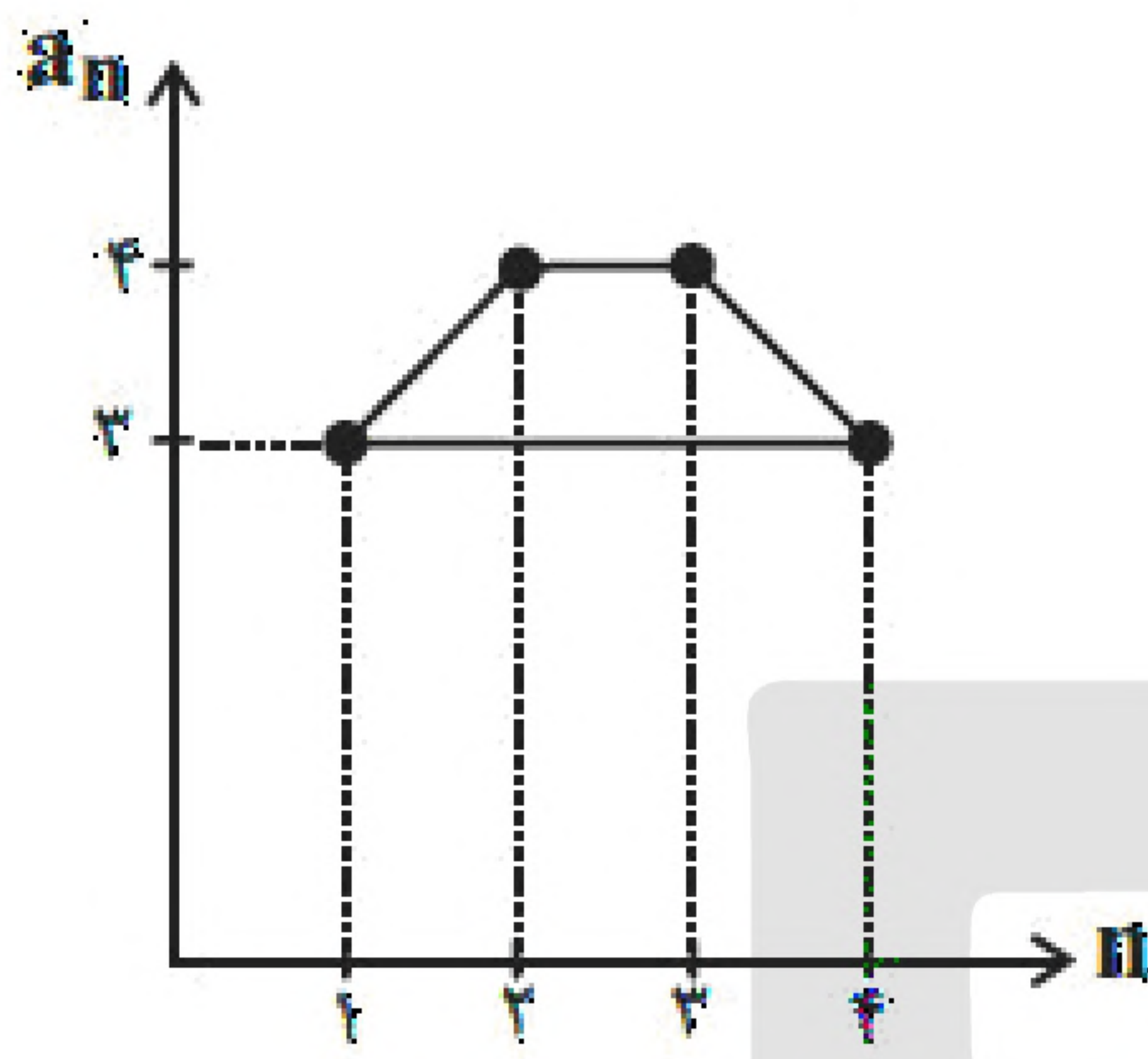
نظیر آن به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک چهارضلعی ایجاد می‌شود. مساحت این چهارضلعی کدام است؟ (نقاط چهار جمله رأس‌های چهارضلعی هستند.)

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱ (۲)

۰/۵ (۱)



گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با توجه به دنباله a_n می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 4$$

$$a_3 = 4, \quad a_4 = 3$$

با وصل کردن این نقاط به هم، یک دوزنقه ایجاد می‌شود.

$$S = \frac{\text{ارتفاع} \times (\text{قاعده بزرگ} + \text{قاعده کوچک})}{2}$$

$$= \frac{(1+3) \times 1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

۳۰- در یک دنباله با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = \frac{2}{a_n} - 3n$ با فرض $a_{20} = 100$ ، مقدار جمله نوزدهم کدام است؟

$\frac{3}{171}$ (۴)

$\frac{2}{157}$ (۳)

۱۱۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با قرار دادن $n = 19$ در رابطه داده شده، داریم:

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n} - 3n \xrightarrow{n=19} a_{20} = \frac{2}{a_{19}} - 3(19) \Rightarrow 100 = \frac{2}{a_{19}} - 57 \Rightarrow \frac{2}{a_{19}} = 157 \Rightarrow a_{19} = \frac{2}{157}$$

۳۱- اگر جمله چهارم دنباله $a_n = \frac{nk-3}{n+6}$ برابر $\frac{3}{8}$ باشد، مقدار جمله شانزدهم این دنباله کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{1}{5}$ (۳)

$\frac{13}{15}$ (۲)

$\frac{12}{11}$ (۱)

گزینه ۱ پاسخ صحیح است. جمله چهارم دنباله a_n برابر $\frac{3}{8}$ است، پس به جای n ها عدد ۴ و به جای a_n عدد $\frac{3}{8}$ را

$$\frac{3}{8} = \frac{4k-3}{4+6} \Rightarrow 8(4k-3) = 30 \Rightarrow 32k-24 = 30 \Rightarrow 32k = 54 \Rightarrow k = \frac{54}{32} = \frac{27}{16}$$

قرار می‌دهیم:

جمله شانزدهم برابر است با:

$$a_n = \frac{\frac{27}{16}n-3}{n+6} \xrightarrow{n=16} a_{16} = \frac{\frac{27}{16}(16)-3}{16+6} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}$$



۳۲- اگر به قدرنسبت یک دنباله‌ی حسابی، ۳ واحد افزوده شود، جمله‌ی هفتم آن با فرض ثابت بودن جمله‌ی اول، چه تغییری می‌کند؟

- (۱) ۱۸ واحد افزایش (۲) ۳ واحد افزایش (۳) ۲۱ واحد افزایش (۴) ۳ برابر می‌شود.

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$t_v = t_1 + 6d \xrightarrow{d' = d + 3} t'_v = t_1 + 6(d + 3) = t_1 + 6d + 18 = t_v + 18$$

بنابراین، ۱۸ واحد به جمله‌ی هفتم افزوده می‌شود.

۳۳- بین اعداد $\frac{1}{6}$ و $\frac{13}{5}$ می‌خواهیم m عدد طوری قرار دهیم که دنباله‌ی هندسی a_n با قدرنسبت $\sqrt{3}$ تشکیل شود، در

این صورت m کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{6} \circ \circ \dots \circ \frac{27}{2}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{t_m}$

$$\frac{1}{6} \times q^{m+1} = \frac{27}{2} \Rightarrow (\sqrt{3})^{m+1} = 81 = 3^4 \Rightarrow 3^{\frac{m+1}{2}} = 3^4$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{2} = 4 \Rightarrow m = 7$$

۳۴- مجموع پنج جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی صفر است و مجموع مربعات آنها ۱۲۱۰ است. تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله‌ی این دنباله کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۲۲ (۴) ۴۴

گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

جملات را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$-2d, -d, 0, d, 2d$$

$$\text{مجموع مربعات: } (-2d)^2 + (-d)^2 + 0 + (d)^2 + (2d)^2 = 10d^2 = 1210$$

$$\Rightarrow d^2 = 121 \Rightarrow d = \pm 11$$

جملات به صورت زیر خواهند بود:

$$-22, -11, 0, 11, 22$$

$$44 = 22 - (-22) = \text{تفاضل بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین جمله}$$



۳۵- در یک دنباله حسابی، جمله چهارم از جمله دهم، ۲۴ واحد کم‌تر است. جمله سی‌ام از جمله هجدهم چه قدر بیش‌تر است؟

- (۱) ۴۲ (۲) ۵۲ (۳) ۴۸ (۴) ۴۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$t_{10} - t_4 = 24 \Rightarrow (t_1 + 9d) - (t_1 + 3d) = 24 \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

$$t_{30} - t_{18} = (t_1 + 29d) - (t_1 + 17d) = 12d = 12 \times 4 = 48$$

بنابراین:

۳۶- کارفرمایی به یک کارگر مبتدی، در هفته اول ۷۵۰ واحد پول دستمزد می‌دهد. متعهد می‌شود که از هفته دوم، در صورت رضایت کاری هر هفته ۲۵ واحد پول بر دستمزد وی اضافه کند تا به دستمزد ثابت ۲۰۰۰ واحد پول برسد. با رضایت کاری پس از چند هفته، به دستمزد ثابت می‌رسد؟

- (۱) ۴۸ (۲) ۴۹ (۳) ۵۰ (۴) ۵۱

گزینه ۴ پاسخ صحیح است. دستمزد کارگر در هر هفته، مقدار ثابتی اضافه می‌شود، پس دستمزد وی در هفته‌های متوالی، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول $t_1 = 750$ و قدرنسبت $d = 25$ می‌دهد:

$$t_n = 750 + (n - 1)(25) \Rightarrow 2000 = 750 + (n - 1) \times 25 \Rightarrow n - 1 = \frac{2000 - 750}{25} = 50 \Rightarrow n = 51$$

پس کارگر در پایان هفته ۵۱ ام به دستمزد ۲۰۰۰ واحد می‌رسد.

۳۷- در الگوی خطی $t_n = (2 + a)n^2 + an - b$ که جمله چهارم آن برابر با ۸ است، چند جمله نامنفی وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۰

گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در الگوی خطی، جمله n^2 و درجات بالاتر از آن را نداریم، پس ضریب جمله n^2 باید صفر باشد، بنابراین: $a + 2 = 0$ ، در نتیجه: $a = -2$. پس جمله عمومی الگوی خطی برابر است با: $t_n = -2n - b$ ، از طرفی $t_4 = 8$ است:

$$-2 \times 4 - b = 8 \Rightarrow b = -16 \Rightarrow t_n = -2n + 16$$

$$t_n \geq 0 \Rightarrow -2n + 16 \geq 0 \Rightarrow 2n \leq 16 \Rightarrow n \leq 8 \Rightarrow \text{۸ جمله نامنفی دارد.}$$

۳۸- اگر دنباله حسابی ...، ۲۹، ۳۳، ۳۷ فقط یازده جمله منفی داشته باشد، جمله آخر دنباله کدام است؟

- (۱) -۴۳ (۲) -۴۷ (۳) -۵۳ (۴) -۵۷

گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$37, 33, 29, \dots \Rightarrow d = -4$$

$$t_n = 37 + (n - 1)(-4) \Rightarrow t_n = -4n + 41$$

$$t_n < 0 \Rightarrow -4n + 41 < 0 \Rightarrow 4n > 41 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \geq 11$$

اولین جمله منفی، جمله یازدهم است. از آنجا که این دنباله یازده جمله منفی دارد، جمله آخر آن، برابر است

$$t_{11} = -4 \times 11 + 41 = -43$$

با:



۳۹- در دنباله حسابی هرگاه $a_n = 2n - 3$ به طوری که $S_{2n} = 5S_n$ ، عدد طبیعی n کدام است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۸ (۳) ۶ (۴) ۱۴

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S_{2n} = \frac{2n}{2}(2a_1 + (2n-1)d) = n(-2 + 2(2n-1)) \Rightarrow S_{2n} = 4n^2 - 2n$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(-2 + 2(n-1)) = -n + n^2 - n = n^2 - 2n$$

$$\Rightarrow S_{2n} = 5S_n \Rightarrow 4n^2 - 2n = 5n^2 - 10n \Rightarrow n^2 = 6n \Rightarrow n = 6$$

۴۰- در یک دنباله حسابی مجموع پنجاهویک جمله ابتدایی آن صفر است. جمله هشتم دنباله چند برابر جمله بیستم دنباله است؟

- (۱) ۳/۵ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴/۵

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$a_8 = ka_{20} \Rightarrow a_1 + 7d = k(a_1 + 19d)$$

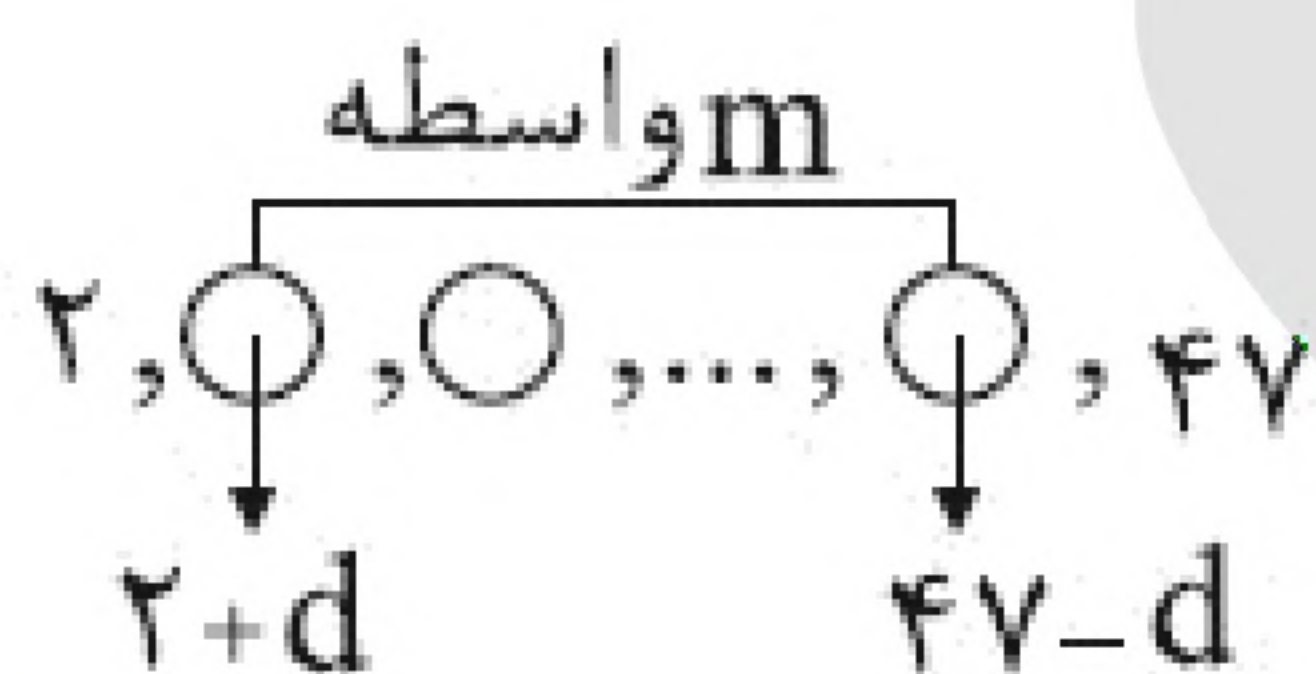
$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{51} = \frac{51}{2}(2a_1 + 50d) = 0 \Rightarrow a_1 = -25d$$

$$\Rightarrow -25d + 7d = k(-25d + 19d) \Rightarrow -18d = k(-6d) \Rightarrow k = 3$$

۴۱- بین دو عدد ۲ و ۴۷، m واسطه‌ی حسابی طوری قرار می‌دهیم که بزرگ‌ترین واسطه، ۶ برابر کوچک‌ترین واسطه شود. m کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۱۰

گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



$$\frac{47 - d}{2 + d} = 6 \Rightarrow 47 - d = 12 + 6d \Rightarrow 35 = 7d \Rightarrow d = 5$$

می‌دانیم وقتی بین a و b ، m واسطه‌ی حسابی درج می‌کنیم، قدرنسبت دنباله به صورت $d = \frac{b-a}{m+1}$ به دست

$$d = \frac{47-2}{m+1} = 5 \Rightarrow \frac{45}{m+1} = 5 \Rightarrow m+1 = 9 \Rightarrow m = 8$$

می‌آید، بنابراین: