

گنجینه سوال رایگان

+ پاسخ تشریحی

یاوران دانش



راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴



	۱	۲	۳	۴
۱ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۸ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۹ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۰ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۴ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۵ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۱۸ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۱۹ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۱ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۲ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۳ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۴ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۵ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۶ -	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۲۷ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۸ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
۲۹ -	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
۳۰ -	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>



۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{x}{x-1} + \frac{2}{x+1} = 2 \xrightarrow{\times (x-1)(x+1)} x(x+1) + 2(x-1) = 2(x-1)(x+1)$$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2x - 2 = 2(x^2 - 1) \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

بنابراین حاصل ضرب ریشه‌ها برابر صفر است.

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2x^2 + 2 = 5x \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{+5+3}{4} = 2 \\ x_2 = \frac{+5-3}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{قدرمطلق اختلاف دو عدد} = \left| 2 - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2}$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. جواب $x = 3$ در معادله صدق می‌کند:

$$\frac{m-2}{3 \times 3 - 1} = \frac{3-1}{2} \Rightarrow \frac{m-2}{8} = 1 \Rightarrow m = 10$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. چون $x = 1$ جواب معادله است، پس در آن معادله صدق می‌کند:

$$(m+1) \times 1^2 - (m-1) \times 1 - 2m = 0 \Rightarrow m+1 - m+1 - 2m = 0 \Rightarrow m = 1$$

اکنون $m = 1$ را در معادله قرار داده و جواب معادله را به دست می‌آوریم:

$$2x^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

پس جواب دیگر معادله $x = -1$ است.۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. می‌دانیم معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ دو ریشه حقیقی دارد؛ اگر $\Delta > 0$:

$$2x^2 - 2x + (m-1) = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2(m-1) = 4 - 8m + 8 = 12 - 8m > 0 \Rightarrow m < \frac{3}{2}$$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ مقدار ریشه مضاعف $-\frac{b}{2a}$ است.

$$kx^2 - 2kx + 3 = 0 \xrightarrow{\text{مقدار ریشه مضاعف}} x = -\frac{-2k}{2k} = 1$$

تذکر: $x = 1$ وقتی ریشه مضاعف است که $\Delta = 0$ شود یعنی $k = 3$.



۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با برابر قرار دادن خط و سهمی تعداد نقاط برخورد به دست می آید:

$$x^2 - 2x = -x + m \Rightarrow x^2 - x - m = 0$$

چون همدیگر را فقط در یک نقطه قطع می کنند، پس این معادله درجه ۲ فقط یک جواب دارد. یعنی $\Delta = 0$ است:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(-m) = 0 \Rightarrow 1 + 4m = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون در تابع $y = 3x^2 - 6x + 2$ ضریب x^2 مثبت است، پس سهمی مینیمم دارد و کمترین مقدار آن، عرض رأس سهمی است. بنابراین:

$$S \left| \begin{array}{l} x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-6}{2 \times 3} = 1 \\ y = 3(1)^2 - 6 \times 1 + 2 = -1 \end{array} \right. \quad \text{کمترین مقدار } y :$$

۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. هزینه اولیه تولید ۷ تومان و هزینه تولید هر کالا ۴ تومان است، پس تابع هزینه برابر با:

$$C(x) = 7 + 4x$$

تابع سود به صورت $P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x + k$ است و از آنجا که فاصله دو نقطه سر به سر آن ۱۲ است، یعنی

اختلاف ریشه های معادله $-\frac{1}{4}x^2 + 4x + k = 0$ برابر ۱۲ است، پس:

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 12 \Rightarrow \frac{\sqrt{(4)^2 - 4\left(-\frac{1}{4}\right)(K)}}{\frac{1}{4}} = 12 \Rightarrow \sqrt{16 + K} = 3 \Rightarrow 16 + K = 9 \Rightarrow K = -7$$

$$P(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4x - 7 \quad \text{پس:}$$

$$R(x) = C(x) + P(x) = (7 + 4x) + \left(-\frac{1}{4}x^2 + 4x - 7\right) = -\frac{1}{4}x^2 + 8x$$

برای محاسبه بیشترین مقدار این تابع، ابتدا طول رأس تابع درآمد را حساب می کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2\left(-\frac{1}{4}\right)} = 16$$

حالا $x = 16$ را در $R(x)$ جایگذاری می کنیم تا درآمد ماکزیمم به دست آید:

$$R(16) = -\frac{1}{4}(16)^2 + 8(16) = -\frac{1}{4}(16)(16) + 8(16) = -4(16) + 8(16) = 4 \times 16 = 64$$



۱۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. بیان مسئله به زبان ریاضی:

$$1 - \frac{2r}{3} = \frac{h}{4}$$

$$\frac{2r}{3} + \frac{h}{4} = 1$$

پس داریم:

برای آنکه مساحت مثلث یعنی $s = \frac{1}{2}rh$ ماکزیمم باشد، کافی است، $\frac{2r}{3}$ و $\frac{h}{4}$ هر دو برابر با نصف عدد ۱ باشند، یعنی:

$$\frac{2r}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{3}{4}$$

$$\frac{h}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = 2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right) (2) = \frac{3}{4}$$

پس ماکزیمم $\frac{1}{2}rh$ برابر است:

۱۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در گردنبند موردنظر، سهم پلاتین یک درصد و طبیعتاً سهم طلا ۹۹ درصد است. حالا قرار است، سهم طلا به ۹۰ درصد و سهم پلاتین به ۱۰ درصد برسد. پس باید مقداری پلاتین به گردنبند اضافه شود. ببینید:

$$\frac{\text{وزن فعلی پلاتین}}{\text{وزن گردنبند}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \text{وزن پلاتین} = 0.1 \text{ گرم}$$

حالا فرض کنید X گرم پلاتین اضافه می‌شود. بنابراین وزن پلاتین $0.1 + X$ و وزن کل $10 + X$ می‌شود. پس:

$$\frac{0.1 + X}{10 + X} = \frac{10}{100} \Rightarrow 10 + 100X = 100 + 10X \Rightarrow 90X = 90 \Rightarrow X = 1$$

یعنی باید یک گرم پلاتین اضافه شود.



۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. طبق رابطه فیثاغورت در مثلث قائم الزاویه داریم:

$$(2x-1)^2 + (2x)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow (4x^2 - 4x + 1) + (4x^2) = 4x^2 + 4x + 1$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

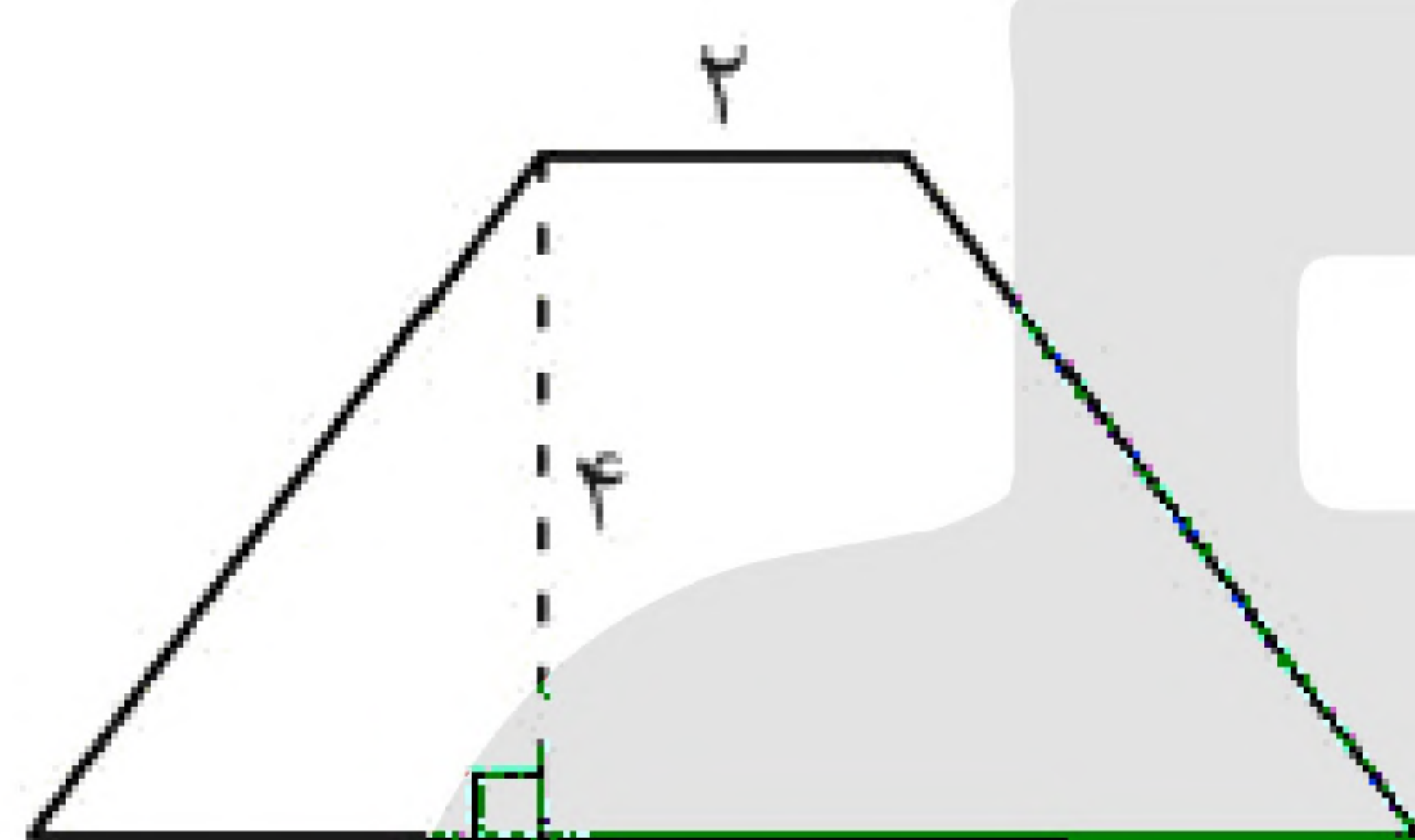
$$\frac{3 \times 4}{2} = 6$$

پس اضلاع مثلث ۳، ۴، ۵ و مساحت آن برابر است با:

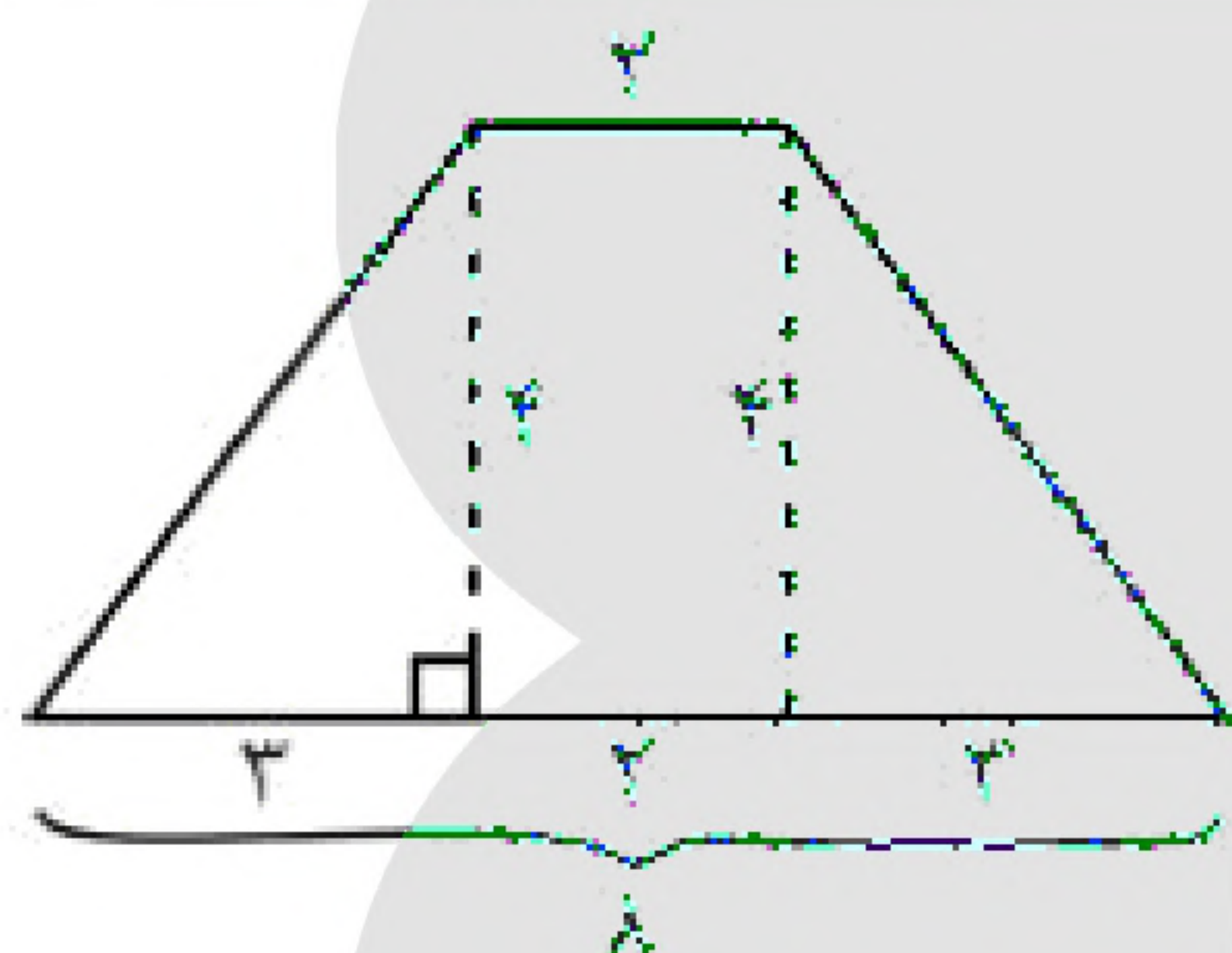
حالا قرار است مساحت مثلث از $\frac{1}{3}$ مساحت دوزنقه، $\frac{2}{3}$ واحد مربع کمتر باشد. یعنی:

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{3} S_{\text{دوزنقه}} - \frac{2}{3} \Rightarrow 6 = \frac{1}{3} S_{\text{دوزنقه}} - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{20}{3} = \frac{1}{3} S_{\text{دوزنقه}} \Rightarrow S_{\text{دوزنقه}} = 20$$

پس در دوزنقه زیر، مساحت برابر با ۲۰ واحد مربع است:



$$\frac{(2 + \text{قاعده بزرگ}) \times 4}{2} = 20 \Rightarrow \text{قاعده بزرگ} = 8$$



حالا برای محاسبه محیط دوزنقه، باید طول ساق‌های آن را حساب کنیم:

با توجه به فیثاغورت در مثلث‌های کناری، طول ساق‌ها برابر با ۵ و محیط برابر است با:

$$2 + 8 + 5 + 5 = 20$$



۱۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$x_0 = -\frac{-2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4a - 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$(2, -1) \in g \Rightarrow -1 = 4a - 4b + 3$$

$$g(x) = -2x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = 2x^2 - x + c$$

$$(2, -1) \in f \Rightarrow -1 = 2(2)^2 - 2 + c \Rightarrow c = -7$$

$$f(x) = 2x^2 - x - 7$$

یادآوری: $P = \frac{c}{a}$ (حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم)

$$g \text{ حاصل ضرب ریشه‌های } = -\frac{3}{2}$$

$$f \text{ حاصل ضرب ریشه‌های } = -\frac{7}{2}$$

$$\text{اختلاف} = \left| -\frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{2} \right) \right| = 2$$

۱۴- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر حاصل جمع دو مقدار مثبت برابر عددی ثابت باشد، حاصل ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که آن دو مقدار با هم برابر باشند.

$$2a + 3b = 120 \Rightarrow 2a = 3b = \frac{120}{2} = 60 \Rightarrow \begin{cases} a = 30 \\ b = 20 \end{cases} \Rightarrow a + b = 50$$

$$2a + 3b = 120 \Rightarrow b = \frac{120 - 2a}{3}$$

راه حل دوم:

$$M = 6ab = 6a \left(\frac{120 - 2a}{3} \right) = -4a^2 + 240a \quad \text{تابع درجه دوم (سه‌می)}$$

$$a_0 = \frac{-240}{2(-4)} = 30 \Rightarrow b = \frac{120 - 60}{3} = 20 \Rightarrow a + b = 50$$

$$R(x) = P(x) + C(x)$$

$$P(100) = 10000 - 46000 + 42000 = 6000$$

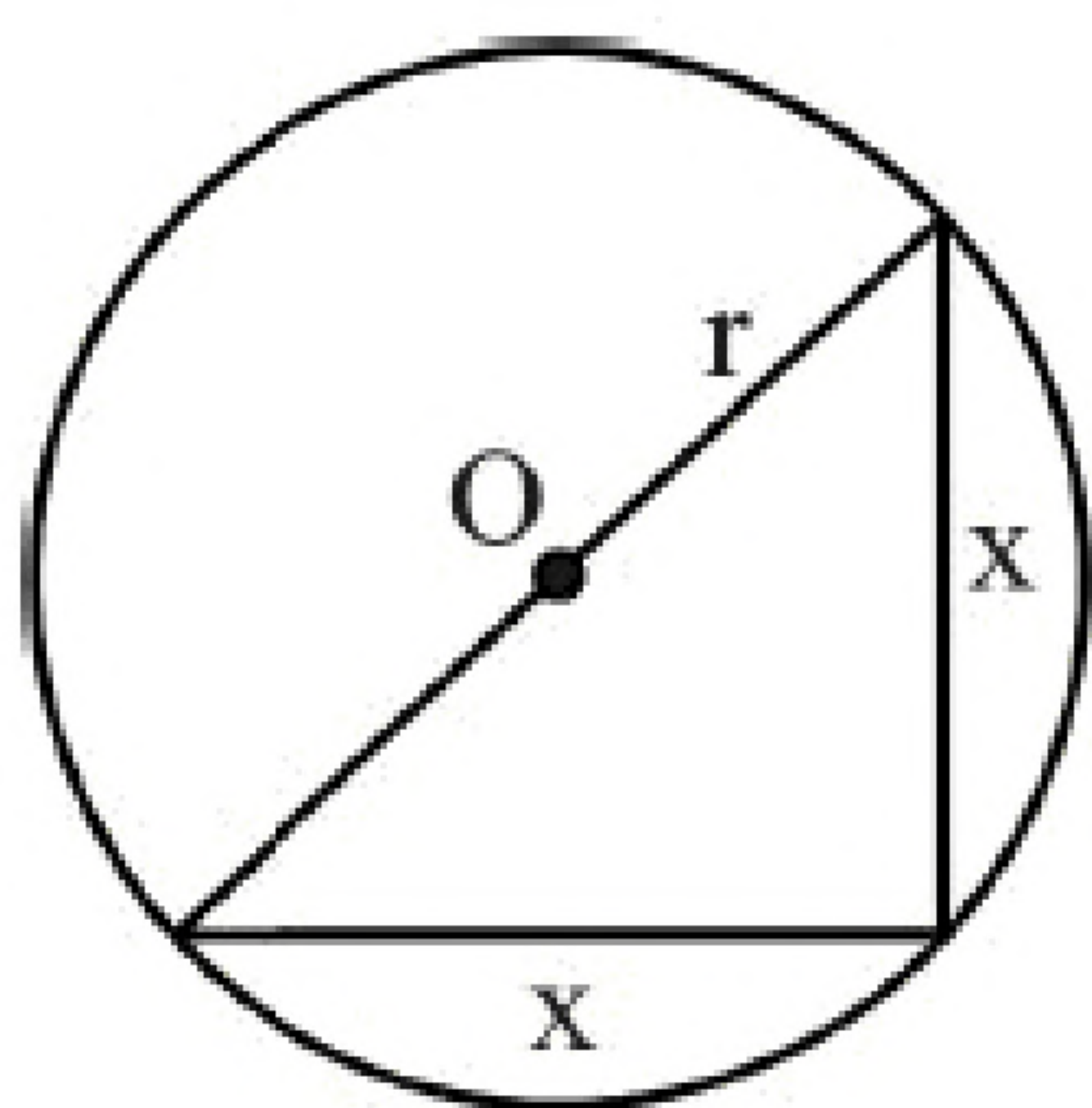
$$C(100) = -2200000 + 8400000 = 6200000$$

$$R(100) = 6000 + 6200000 = 6206000$$

۱۵- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.



۱۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



$$S = \pi r^2 \text{ دایره}$$

$$x^2 + x^2 = (2r)^2 = 4r^2 \Rightarrow 2x^2 = 4r^2 \Rightarrow x^2 = 2r^2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{x^2}{2} = \frac{2r^2}{2} = r^2$$

$$\pi r^2 - r^2 = r^2(\pi - 1) = 36(\pi - 1)$$

$$r^2 = 36 \Rightarrow r = 6$$

$$S = 36\pi \text{ دایره} \Rightarrow \text{مساحت دایره} + \text{مساحت مثلث} = 36\pi + 36 = 36(\pi + 1)$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{a+2} - \frac{7}{99} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{a+2} = -\frac{7}{99}$$

$$\frac{a+2-2a}{a(a+2)} = \frac{-7}{99} \Rightarrow -7a^2 - 14a = -99a + 198$$

$$7a^2 - 85a + 198 = 0 \Rightarrow a = \frac{85 \pm \sqrt{7225 - 5544}}{14} = \frac{85 \pm 41}{14} = \begin{cases} 9 & \text{ق ق} \\ \frac{22}{7} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$a = 9 \Rightarrow a+2 = 11 \Rightarrow 9 \times 11 = 99 \Rightarrow 9 + 9 = 18$$

«بانک سوال موسسه یاوران دانش»

$$2x - 3 = 5 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow 2(4)^2 - 4 \times 4 + 5 = 21$$

$$2x - 3 = -1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 2(1)^2 - 4(1) + 5 = 3$$

$$f(5) = 21, f(-1) = 3$$

$$f(5) - f(-1) = 21 - 3 = 18$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\text{مساحت متوازی الاضلاع} = (x+3) \times 4 = 4x + 12 \quad (1)$$

$$(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 1)^2 + AB^2 \Rightarrow AB^2 = \cancel{x^4} + 2x^2 + \cancel{1} - \cancel{x^4} + 2x^2 - \cancel{1} = 4x^2$$

$$AB = 2x$$

$$\triangle ABC \text{ محیط مثلث} = x^2 + 1 + x^2 - 1 + 2x = 2x^2 + 2x \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1)=(2)} 2x^2 + 2x = 4x + 12 \Rightarrow 2x^2 - 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{ق ق} \\ x = -2 & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\triangle ABC \text{ مساحت مثلث} = \frac{8 \times 6}{2} = 24$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



۲۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$2(x-2)^4 - 6(x^2 - 4x + 4) + 4 = 0 \Rightarrow 2(x-2)^4 - 6(x-2)^2 + 4 = 0, (x-2)^2 = A$$

$$2A^2 - 6A + 4 = 0 \Rightarrow A^2 - 3A + 2 = 0,$$

$$A = 1 \Rightarrow (x-2)^2 = 1 \Rightarrow x-2 = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$A = 2 \Rightarrow (x-2)^2 = 2 \Rightarrow x-2 = \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 + \sqrt{2} \\ x_2 = 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها} = 3 + 1 + 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 8$$

۲۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. فرض: $x_1 > x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{2} = -2 \\ x_1 - x_2 = 6 \end{cases}$$

$$2x_1 = 4 \Rightarrow x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = -4$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-m+1}{2} = 2(-4) = -8$$

$$\Rightarrow -m+1 = -16 \Rightarrow -m = -17 \Rightarrow m = 17$$

$$\Rightarrow m + x_1 - x_2^2 = 17 + 2 - (-4)^2 = 19 - 16 = 3$$

۲۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$\frac{\left(x + \frac{x}{2}\right)x}{2} = 12 \Rightarrow \frac{3}{2}x^2 = 24 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{2x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{8 \times 2}{2} = 8$$

$$\text{مساحت مربع} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 4$$

$$24 = \text{مساحت دوزنقه} + \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

$$32 = 8 \times 4 = \text{مساحت مستطیل صفحه مقوایی}$$

$$8 = 32 - 24 = \text{مساحت قسمت باقی مانده}$$

$$\frac{\text{مساحت قسمت باقی مانده}}{\text{مساحت مثلث}} = \frac{8}{8} = 1$$



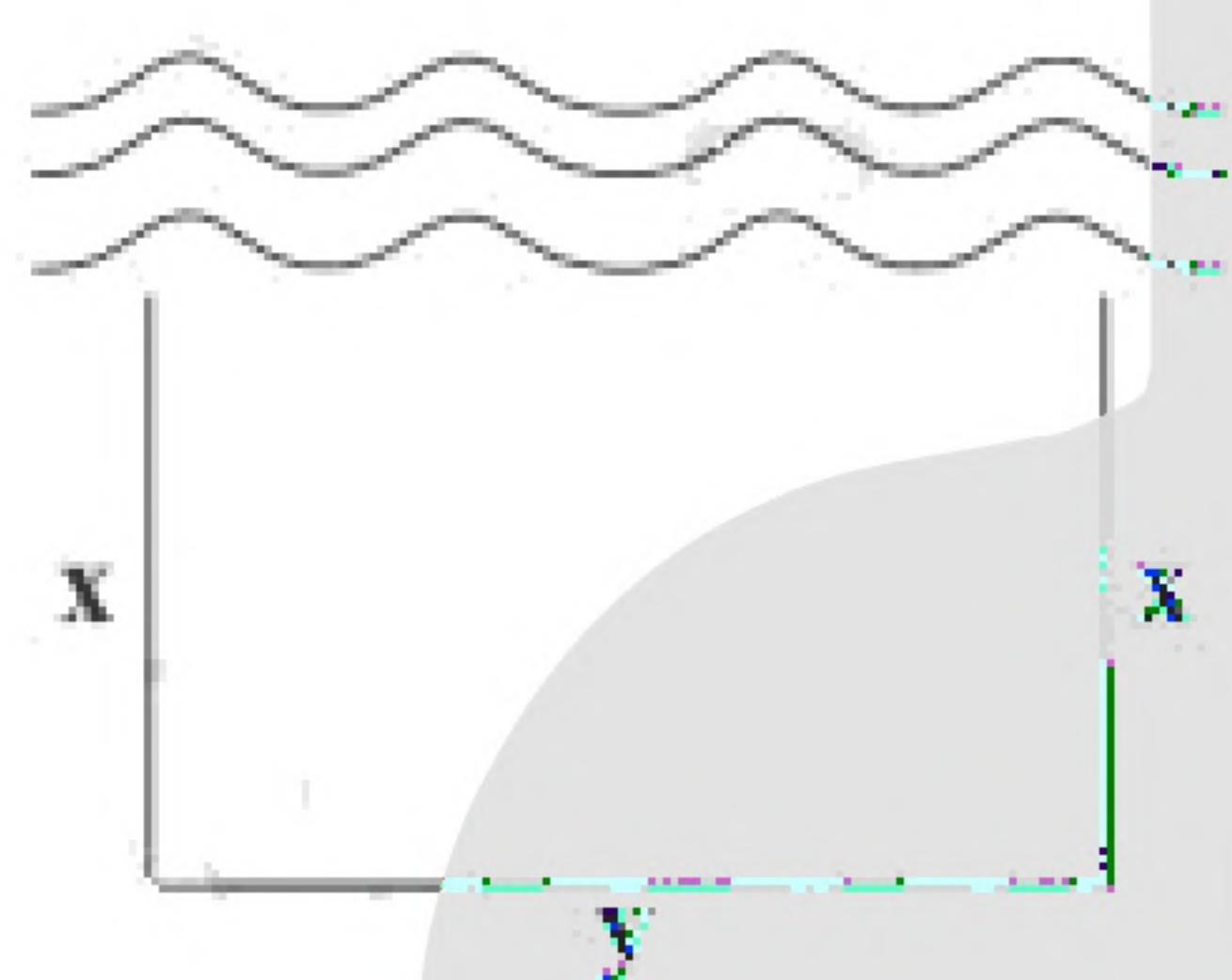
۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{17}{8} \times \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{2x+2}{x(x+2)} = \frac{17}{8(x+2)} \xrightarrow[\text{در } (x+2) \text{ ضرب طرفین}]{\text{ضرب طرفین}} 16x + 16 = 17x \Rightarrow x = 16 \Rightarrow x + 2 = 18$$

$$16 = 1 + 6 + 1 + 8 = \text{مجموع ارقام } 2 \text{ عدد}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ابعاد زمین x و y باشد، طبق شکل داریم:



$$\begin{aligned} \text{مساحت دیوارها} &= (x + x + y) \times 2 = 24 \\ \Rightarrow 2x + y &= 12 \Rightarrow y = 12 - 2x \quad (*) \end{aligned}$$

$$S = xy \stackrel{(*)}{=} x(12 - 2x) = -2x^2 + 12x$$

حال برای آن که مساحت زمین ماکزیمم باشد، داریم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-2)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$\Rightarrow S_{\max} = -2(3)^2 + 12(3) = -18 + 36 = 18$$

۲۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$((1 - x^2) - 1)^2 = 9$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{جذر}} \begin{cases} (1 - x)^2 - 1 = 3 \Rightarrow (1 - x)^2 = 4 \\ (1 - x)^2 - 1 = -3 \Rightarrow (1 - x)^2 = -2 \quad (\text{غ ق ق}) \end{cases} \Rightarrow (1 - x)^2 = 4$$

$$\xrightarrow[\text{می گیریم}]{\text{جذر}} \begin{cases} 1 - x = 2 \Rightarrow x = -1 \\ 1 - x = -2 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{مجموع جواب ها} = 2$$



۲۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

مساحت مستطیل $\times \frac{1}{4} =$ مساحت مثلث

$$\Rightarrow \frac{1}{4}x(x+1) = \frac{1}{4} \times \overset{\text{عرض}}{\uparrow} 2x \times \overset{\text{طول}}{\uparrow} (2x-2)$$

$$\Rightarrow x(x+1) = \frac{2}{4} \times 2x(2x-2)$$

$$\Rightarrow x(x+1) - x(2x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1-2x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ (غ ق ق)} \\ -x+3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = 4 \times 6 = 24 \Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{1}{4} \times 3 \times 4 = 6$$

$$\Rightarrow \text{مساحت پنج ضلعی} = 24 - 6 = 18$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^2 + ax - b^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=a \\ c=-b^2-1 \end{cases}$$

شرط داشتن دو
ریشه ی حقیقی متمایز $\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow a^2 - 4(1)(-b^2-1) > 0$

$$\Rightarrow a^2 + 4b^2 + 4 > 0$$

عبارت $a^2 + 4b^2 + 4$ همواره مثبت است چرا که عبارت a^2 و b^2 همواره غیرمنفی هستند، پس به ازای همه ی مقادیر a و b رابطه ی فوق برقرار است.



۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. باید معادله به صورت $(ax + b)^2 = 0$ درآید تا ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.
بررسی گزینه‌ها:

۱) $4x^2 = 4x + 1 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 1 = 0$ $\xrightarrow{\text{مربع کامل نیست.}}$

ریشه‌ی مضاعف ندارد.

در واقع داریم:

$$4x^2 - 4x = 1 \xrightarrow{+1} 4x^2 - 4x + 1 = 2 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز}$$

۲) $4x^2 + 4x = -1 \xrightarrow{+1} 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 = 0$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ دارای ریشه‌ی مضاعف است.}$$

۳) $x^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$: دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز

۴) $x^2 = x - \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \checkmark \text{ دارای ریشه‌ی مضاعف}$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

مساحت دایره - مساحت مربع = مساحت سایه‌خورده



$$\Rightarrow 25 = (2r)^2 - \pi r^2 = 4r^2 - \pi r^2 = (4 - \pi)r^2$$

$$\Rightarrow 25 = (4 - \pi)r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{25}{4 - \pi} \xrightarrow{r > 0} r = \frac{5}{\sqrt{4 - \pi}} \Rightarrow a = 2r = \frac{10}{\sqrt{4 - \pi}}$$



۳۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. سن ندا را x و سن دختر خاله‌اش نرگس را $(x + 2)$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$5 \text{ سال قبل: } \begin{cases} x - 5 : \text{سن ندا} \\ x + 2 - 5 = x - 3 : \text{سن نرگس} \end{cases}$$

$$x - 5 + x - 3 = 3(x - 3) - 5$$

$$\Rightarrow 2x - 8 = 3x - 9 - 5 \Rightarrow 2x - 8 = 3x - 14 \Rightarrow 2x - 3x = -14 + 8 \Rightarrow -x = -6 \Rightarrow x = 6$$

بنابراین سه سال دیگر داریم:

$$\begin{aligned} 3 \text{ سال دیگر: } & \begin{cases} x + 3 = 6 + 3 = 9 : \text{سن ندا} \\ x + 2 + 3 = x + 5 = 6 + 5 = 11 : \text{سن نرگس} \end{cases} \\ & \xrightarrow{+} 11 + 9 = 20 \end{aligned}$$

