گنجینه سوال رایـگان

+پاسخ تشریحی

یاوران دانش

راه های ارتباطی با ما:

www.Dyavari.com

۰۲۱-۷۶۷۰۳۸۵۸

۰۹۱۲-۳۴ ۹۴ ۱۳۴

پاسخ کلیدی سوالات تستی (آزمایشی)

ریاضی - معادله درجه دوم و تابع درجه دوم

	۱	۲	۳	۴
۱ -			■	
۲ -				■
۳ -				■
۴ -			■	
۵ -		■		
۶ -		■		
۷ -		■		
۸ -	■			
۹ -	■			
۱۰ -			■	
۱۱ -		■		
۱۲ -	■			
۱۳ -	■			
۱۴ -				■
۱۵ -	■			
۱۶ -				■
۱۷ -				■
۱۸ -	■			
۱۹ -		■		
۲۰ -			■	
۲۱ -				■
۲۲ -		■		
۲۳ -		■		
۲۴ -			■	
۲۵ -				■
۲۶ -				■
۲۷ -				■
۲۸ -				■
۲۹ -	■			
۳۰ -		■		
۳۱ -	■			
۳۲ -		■		
۳۳ -				■
۳۴ -				■
۳۵ -		■		
۳۶ -	■			
۳۷ -			■	
۳۸ -	■			
۳۹ -		■		
۴۰ -		■		
۴۱ -		■		
۴۲ -	■			
۴۳ -		■		
۴۴ -			■	
۴۵ -				■
۴۶ -	■			
۴۷ -			■	
۴۸ -		■		
۴۹ -	■			
۵۰ -			■	

۱- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{-x^{۲}}{۸}+۲۵x-۸۰۰=۰\Rightarrow -x^{۲}+۲۰۰x-۶۴۰۰=۰$$

$$x^{۲}-۲۰۰x+۶۴۰۰۰=۰\Rightarrow (x-۴۰)(x-۱۶۰)=۰\Rightarrow \begin{cases}x=۴۰ & \text{ق ق}\\ x=۱۶۰\end{cases}\Rightarrow \text{حداقل بطری}=\text{۴۰ عدد}$$

۲- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. شرط قرینه و معکوس بودن ریشه‌ها $a=-c$ و $\Delta>۰$ است.

$$\Rightarrow m^{۲}-۱۵=۲m\Rightarrow m^{۲}-۲m-۱۵=۰\Rightarrow \begin{cases}m=۵\\ m=-۳\end{cases}$$

۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۲(x-۲)^{۴}-۶\left(x^{۲}-۴x+۴\right)+۴=۰\Rightarrow ۲(x-۲)^{۴}-۶(x-۲)^{۲}+۴=۰\,,\ (x-۲)^{۲}=A$$

$$۲A^{۲}-۶A+۴=۰\Rightarrow A^{۲}-۳A+۲=۰$$

$$A=۱\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۱\Rightarrow x-۲=\pm۱\Rightarrow \begin{cases}x_{۱}=۳\\ x_{۲}=۱\end{cases}$$

$$A=۲\Rightarrow (x-۲)^{۲}=۲\Rightarrow x-۲=\pm\sqrt{۲}\Rightarrow \begin{cases}x_{۱}=۲+\sqrt{۲}\\ x_{۲}=۲-\sqrt{۲}\end{cases}$$

$$\text{حاصل جمع ریشه‌ها}=۳+۱+۲+\sqrt{۲}+۲-\sqrt{۲}=۸$$

۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{cases}x_{۱}+x_{۲}=\frac{-b}{a}=۳\\ ۲x_{۱}-۳x_{۲}=۱۶\end{cases}\Rightarrow x_{۱}=۵\,,\ x_{۲}=-۲$$

$$x_{۱}\cdot x_{۲}=\frac{c}{a}\rightarrow ۵\times(-۲)=\frac{۱-۲m}{۱}\Rightarrow \boxed{m=\frac{۱۱}{۲}}$$

$$x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}+۳۰m=۵^{۳}+(-۲)^{۳}+۳۰\left(\frac{۱۱}{۲}\right)=۲۸۲$$

۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = -\frac{-2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \\ (2, -1) \in g \Rightarrow -1 = 4a - 4b + 3 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 4a - 4b = -4 \end{cases} \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$g(x) = -2x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = 2x^2 - x + c$$

$$(2, -1) \in f \Rightarrow -1 = 2(2)^2 - 2 + c \Rightarrow c = -7$$

$$f(x) = 2x^2 - x - 7$$

یادآوری: $P = \frac{c}{a}$ (حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم)

g حاصل‌ضرب ریشه‌های $= -\frac{3}{2}$

f حاصل‌ضرب ریشه‌های $= -\frac{7}{2}$

اختلاف $= \left| -\frac{3}{2} - \left(-\frac{7}{2}\right) \right| = 2$

۶- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. چون $\alpha + 1$ و $\beta + 1$ ریشه‌های معادله $x^2 - 6x + 7 = 0$ هستند. داریم:

$$\begin{cases} S = \text{جمع ریشه ها} = 6 \Rightarrow (\alpha + 1) + (\beta + 1) = 6 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \\ P = \text{ضرب ریشه ها} = 7 \Rightarrow (\alpha + 1)(\beta + 1) = 7 \Rightarrow \alpha\beta + \alpha + \beta + 1 = 7 \xrightarrow{\alpha + \beta = 4} \alpha\beta = 2 \end{cases}$$

بنابراین $\alpha = \frac{2}{\beta}$ و $\beta = \frac{2}{\alpha}$ هستند، پس داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{2^\alpha \alpha^\beta}{\beta^\alpha} = \dfrac{2^\alpha \alpha^\beta}{\left(\frac{2}{\alpha}\right)^\alpha} = \alpha^\alpha \alpha^\beta = \alpha^{\alpha + \beta} = \alpha^4 \\ \dfrac{2^\beta \beta^\alpha}{\alpha^\beta} = \dfrac{2^\beta \beta^\alpha}{\left(\frac{2}{\beta}\right)^\beta} = \beta^\alpha \times \beta^\beta = \beta^{\alpha + \beta} = \beta^4 \end{cases}$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\alpha^4 + \beta^4 = \left(\alpha^2 + \beta^2\right)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \left((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\right)^2 - 2(\alpha\beta)^2$$

$$\xrightarrow[\alpha\beta = 2]{\alpha + \beta = 4} = \left(4^2 - 2(2)\right)^2 - 2(2)^2 = 144 - 8 = 136$$

۷- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای آن‌که این تابع، با محور xها فقط در یک نقطه تلاقی کند، باید معادله $f(x)=0$ فقط دارای یک ریشه باشد:
$$(x+1)\left(2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2\right)=0$$

$x=-1$ قطعاً یک جواب این معادله می‌باشد، پس عبارت درجه دوم $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2$ یا باید فاقد ریشه باشد یا اینکه دارای ریشه تکراری $x=-1$ باشد:

حالت اول : $\Delta<0 \Rightarrow (m+1)^2-4(2)\left(\frac{1}{2}m+2\right)<0 \Rightarrow (m+1)^2-(4m+16)<0$

$\Rightarrow m^2-2m-15<0 \Rightarrow -3<m<5$

حالت دوم : $2x^2+(m+1)x+\frac{1}{2}m+2=0 \xrightarrow{x=-1} 2-m-1+\frac{1}{2}m+2=0$

$\Rightarrow 3=\frac{m}{2} \Rightarrow m=6$

با قرار دادن $m=6$، عبارت درجه دوم موردنظر به صورت $2x^2+7x+5$ خواهد بود که به‌جز ریشه $x=-1$، یک ریشه $x=\frac{-5}{2}$ نیز دارد. پس $m=6$ غیرقابل قبول بوده و مقادیر m برابر است با: $(-3,5)$

با توجه به اینکه m عدد ظاهر شده در پرتاب تاس است، $m=1,2,3,4$ قابل قبول است که با احتمال $\frac{4}{6}$ یا $\frac{2}{3}$ اتفاق می‌افتد.

۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر حاصل‌جمع دو مقدار مثبت برابر عددی ثابت باشد، حاصل‌ضرب آن‌ها وقتی ماکزیمم است که آن دو مقدار با هم برابر باشند.

$$2a+3b=120 \Rightarrow 2a=3b=\frac{120}{2}=60 \Rightarrow \begin{cases} a=30 \\ b=20 \end{cases} \Rightarrow a+b=50$$

راه حل دوم:
$$2a+3b=120 \Rightarrow b=\frac{120-2a}{3}$$

ماکزیمم $M=6ab=6a\left(\frac{120-2a}{3}\right)=-4a^2+240a$ تابع درجه دوم (سهمی)

$$a_0=\frac{-240}{2(-4)}=30 \Rightarrow b=\frac{120-60}{3}=20 \Rightarrow a+b=50$$

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اندازهٔ قاعده مثلث x و ارتفاع وارد بر آن را h فرض می‌کنیم:

$$S=\frac{۱}{۲}x.h \xrightarrow{x+h=۲۴} S=\frac{۱}{۲}x(۲۴-x)=-\frac{۱}{۲}x^{۲}+۱۲x$$

رابطه نهایی برای مساحت مثلث‌ها، یک تابع درجه دوم است که ماکزیمم دارد. (ضریب $x^{۲}$ منفی است):

$$x_{max}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲}{۲\left(\frac{-۱}{۲}\right)}=۱۲ \Rightarrow h=۲۴-x=۱۲$$

$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}x.h=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۲=۷۲$$

۱۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{c}{a}<۰ \Rightarrow \frac{m^{۲}-m-۶}{۱}<۰$$

	-۲		۳	
+		-		+

پس به ازای $-۲<m<۰$ دارای ۲ ریشه قرینه است.

چون مقادیر $\Delta=۰$ در گزینه‌ها نیامده لازم به بررسی نیست.

۱۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. روابط بین ریشه‌ها به صورت مقابل است:

$$\begin{cases} S=\alpha+\beta=۲ \\ P=\alpha\beta=\frac{b}{a} \end{cases}$$

از طرفی β ریشه معادله است؛ بنابراین:

$$a\beta^{۲}-۲a\beta+b=۰ \xrightarrow{\div a} \beta^{۲}-۲\beta=\frac{-b}{a}=-P$$

$$۲\alpha^{۲}+۳\beta^{۲}-۲\beta=۱۸ \Rightarrow ۲\left(\alpha^{۲}+\beta^{۲}\right)+\beta^{۲}-۲\beta=۱۸$$

$$\Rightarrow ۲\left(S^{۲}-۲P\right)-\frac{b}{a}=۱۸ \Rightarrow ۲(۴-۲P)-P=۱۸ \Rightarrow P=-۲$$

پس α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^{۲}-۲x-۲=۰$ هستند.

$$۲x^{۲}-۴x-۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=-۴ \end{cases} \Rightarrow a-b=۶$$

۱۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. β به عنوان ریشه در معادله صدق می‌کند. پس:

$$۲\beta^۲ - ۹\beta + ۶ = ۰ \Rightarrow ۲\beta^۲ + ۶ = ۹\beta \xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} \beta^۲ + ۳ = \frac{۹}{۲}\beta$$

از طرفی در معادله موردنظر داریم:

$$P = \frac{c}{a} = \frac{۶}{۲} = ۳ \Rightarrow \alpha\beta = ۳ \Rightarrow \alpha = \frac{۳}{\beta}$$

پس ریشه‌های $(\beta^۲ + ۳)$ و $\left(\alpha + \frac{۳}{\beta}\right)$ به صورت $\left(\frac{۹}{۲}\beta\right)$ و (۲α) درمی‌آیند و در واقع دنبال معادله درجه دومی هستیم که ریشه‌هایش $\left(\frac{۹}{۲}\beta\right)$ و (۲α) هستند:

$$S = (۲\alpha) + \left(\frac{۹}{۲}\beta\right)$$

تلاش می‌کنیم که ضرایب β , α یکی شوند، برای این منظور از طریق میانگین ضرایب یعنی $\frac{۲ + \frac{۹}{۲}}{۲} = \frac{۱۳}{۴}$ می‌نویسیم:

$$(۲\alpha) + \left(\frac{۹}{۲}\beta\right) = \left(\frac{۱۳}{۴}\alpha - \frac{۵}{۴}\alpha\right) + \left(\frac{۱۳}{۴}\beta + \frac{۵}{۴}\beta\right) = \left(\frac{۱۳}{۴}\alpha + \frac{۱۳}{۴}\beta\right) + \left(\frac{۵}{۴}\beta - \frac{۵}{۴}\alpha\right)$$

$$= \frac{۱۳}{۴}\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\text{جمع ریشه ها}} + \frac{۵}{۴}\underbrace{(\beta - \alpha)}_{\text{تفاضل ریشه ها}} = \frac{۱۳}{۴}S + \frac{۵}{۴}\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

$$\xrightarrow[\Delta = ۳۳]{S = \frac{۹}{۲}} \frac{۱۳}{۴}\left(\frac{۹}{۲}\right) + \frac{۵}{۴}\left(\frac{\sqrt{۳۳}}{۲}\right) = \frac{۱۱۷}{۸} + \frac{۵\sqrt{۳۳}}{۸} = \frac{۱۱۷ + ۵\sqrt{۳۳}}{۸}$$

$$p = (۲\alpha)\left(\frac{۹}{۲}\beta\right) = ۹\underbrace{(\alpha\beta)}_{\text{ضرب ریشه ها}} = ۹(۳) = ۲۷$$

با توجه به اینکه در معادله جدید، $S = \frac{۱۱۷ + ۵\sqrt{۳۳}}{۸}$ و $P = ۲۷$ است، پس این معادله به صورت زیر می‌شود:

$$x^۲ - \left(\frac{۱۱۷ + ۵\sqrt{۳۳}}{۸}\right)x + ۲۷ = ۰ \Rightarrow ۸x^۲ - \left(۱۱۷ + ۵\sqrt{۳۳}\right)x + ۲۱۶ = ۰$$

از مقایسه این معادله با معادله داده شده در صورت سؤال داریم:

$$\begin{cases} a = ۱۱۷ \\ b = ۵ \\ c = ۲۱۶ \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a + b} = \frac{۲۱۶}{۱۲۲} = \frac{۱۰۸}{۶۱} = ۱/۷$$

۱۳- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$a = c \Rightarrow$ دو ریشه معکوس یکدیگرند.

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow b = \frac{۵a}{۲}$$

$$ax^{۲} + \frac{۵a}{۲}x + a = ۰$$

$$x = \frac{-\frac{۵a}{۲} \pm \sqrt{\frac{۲۵a^{۲}}{۴} - ۴a^{۲}}}{۲a} = \frac{-\frac{۵a}{۲} \pm \frac{۳a}{۲}}{۲a} = \begin{cases} -۲ \\ -\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$-\frac{۱}{۲} - (-۲) = ۲ - \frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۲}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۱۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$a < ۰ \Leftarrow$ سهمی دارای ماکزیمم است (دهانه سهمی رو به پایین است)

$c < ۰ \Leftarrow$ نمودار سهمی محور yها را در قسمت منفی قطع کرده است.

$b < ۰ \Leftarrow x_۰ = \frac{-b}{۲a} < ۰ \Leftarrow$ رأس سهمی در ناحیه دوم قرار دارد.

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت درجه سوم را تجزیه می‌کنیم.

$$۲x^{۳} - ۱۷x^{۲} - ۱۵x + ۱۲ = ۲(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$$

حال به جای x، ۱- را جایگزین می‌کنیم:

$$-۲ - ۱۷ + ۱۵ + ۱۲ = ۲(-۱ - \alpha)(-۱ - \beta)(-۱ - \gamma) \Rightarrow ۸ = -۲(۱ + \alpha)(۱ + \beta)(۱ + \gamma)$$
$$\Rightarrow -۴ = (۱ + \alpha)(۱ + \beta)(۱ + \gamma)$$

۱۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. طول نقطه رأس $۲ = \frac{-۱ + ۵}{۲} = -\frac{b}{۲a}$ و در نتیجه دو نقطه برخورد با محور xها به‌ترتیب $\alpha = ۳$ و $\beta = ۲ \times ۲ - ۳ = ۱$ قطع کرده و ضابطه تابع $f(x) = a(x - ۱)(x - ۳)$ و $f(۰) = ۱$ است.

$$a(-۱)(-۳) = ۱ \Rightarrow a = \frac{۱}{۳} \Rightarrow f(۴) = ۱$$

۱۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. نمودار تابع یک سهمی رو به پایین است، بنابراین $x = -۴$ و $x = ۱$ صفرهای تابع هستند:

$$f(x) = -۳(x - ۱)(x + ۴) = -۳x^{۲} - ۹x + ۱۲$$
$$a = -۹ \quad b = ۱۲$$

$$b - a = ۱۲ - (-۹) = ۲۱$$

۱۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \alpha + \beta = ۶$$

$$\text{ریشه معادله } x = \alpha \xrightarrow{\text{جاگذاری}} \alpha^۲ - ۶\alpha - ۲ = ۰ \rightarrow \alpha^۲ = ۶\alpha + ۲ \xrightarrow{\times\alpha} \boxed{\alpha^۳ = ۶\alpha^۲ + ۲\alpha} \ (۱)$$

$$\alpha^۲ = ۶\alpha + ۲ \xrightarrow{\times ۶} \boxed{۶\alpha^۲ = ۳۶\alpha + ۱۲} \ (۲)$$

$$\text{عبارت مورد نظر طبق ۱} = \left(۶\alpha^۲ + ۲\alpha\right) + ۳۸\beta \ \underline{\underline{\text{طبق (۲)}}}\ ۳۶\alpha + ۱۲ + ۲\alpha + ۳۸\beta = ۳۸(\alpha + \beta) + ۱۲$$
$$= ۳۸(۶) + ۱۲ = ۲۴۰$$

۱۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$\alpha\beta = P = ۱$ ضرب دو ریشه و $\alpha + \beta = S = ۹$ جمع دو ریشه

α ریشه معادله است $\Rightarrow \alpha^۲ - ۹\alpha + ۱ = ۰ \Rightarrow \alpha^۲ = ۹\alpha - ۱$

$$(۱)\ \alpha^۲ + ۹\beta = ۹\alpha - ۱ + ۹\beta = ۹(\alpha + \beta) - ۱ = ۹(۹) - ۱ = ۸۰$$

$$(۲)\ \frac{\alpha}{\alpha + ۱} + \frac{\beta}{\beta + ۱} = \frac{۲\alpha\beta + \alpha + \beta}{\alpha\beta + \alpha + \beta + ۱} = \frac{۲(۱) + ۹}{۱ + ۹ + ۱} = ۱$$

$$(۱) + (۲) = ۸۰ + ۱ = ۸۱$$

۲۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\begin{matrix} \\ ۳\times \end{matrix}\begin{cases} ۲x_۱ - ۳x_۲ = ۱۶ \\ x_۱ + x_۲ = ۳ \end{cases} \Rightarrow x_۱ = ۵,\ x_۲ = -۲$$

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ = ۵^۳ + (-۲)^۳ = ۱۱۷$$

۲۱- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$S = x' + x'' = -\frac{b}{۲} = ۳ + ۲\sqrt{۲} + ۳ - ۲\sqrt{۲} = ۶ \Rightarrow b = -۱۲$$

$$P = x'.x'' = \frac{c}{۲} = \left(\sqrt{۲} + ۱\right)^۲.\left(\sqrt{۲} - ۱\right)^۲ = (۲ - ۱)^۲ = ۱ \Rightarrow c = ۲$$

$$y_۰ = \frac{-b^۲ + ۴ac}{۴a} = \frac{-(-۱۲)^۲ + ۴(۲)(۲)}{۴(۲)} = \frac{-۱۴۴ + ۱۶}{۸} = \frac{-۱۲۸}{۸} = -۱۶$$

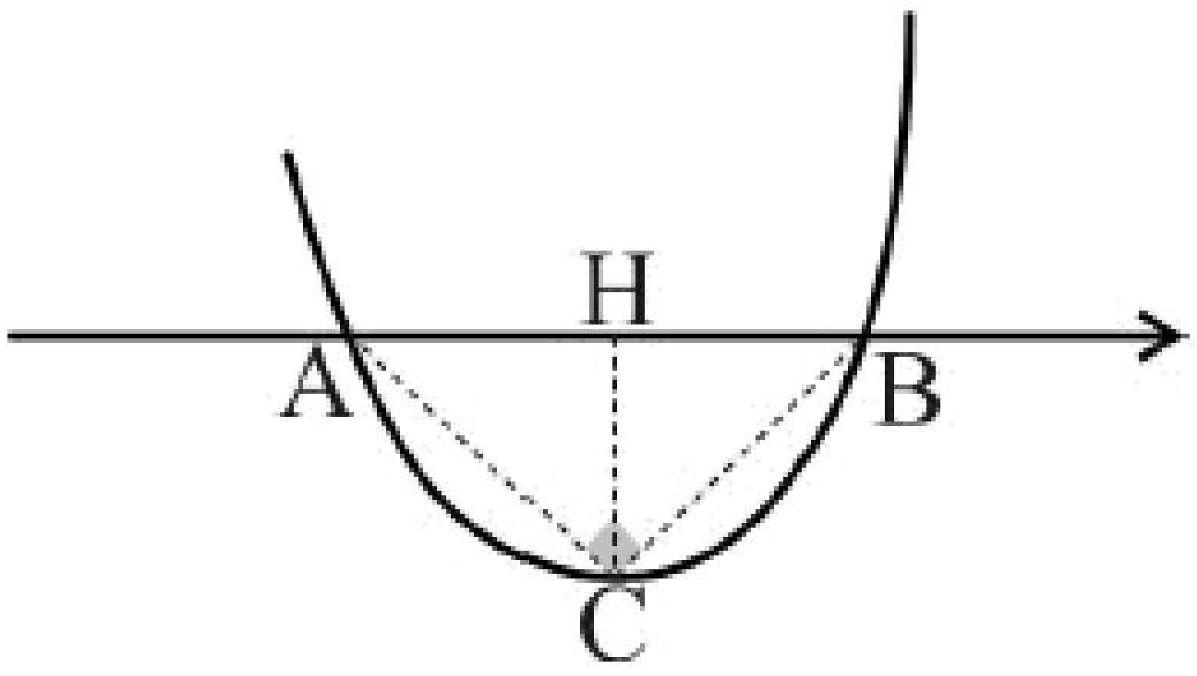
۲۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. در صورتی که $\Delta > ۰$ و $\frac{c}{a} \geq ۰$ باشد، یعنی نمودار در دو نقطه با طول هم علامت محور xها را قطع کند.

$$\frac{m + ۳}{m - ۲} \geq ۰ \Rightarrow m > ۲ \text{ یا } m \leq -۳$$

$$\Delta > ۰ \Rightarrow ۳۶ - (m - ۲)(m + ۳) > ۰ \Rightarrow -۷ < m < ۶ \Rightarrow -۷ < m \leq -۳ \text{ یا } ۲ < m < ۶$$

به ازاء ۷ مقدار صحیح $m = ۵, ۴, ۳, -۳, -۴, -۵, -۶$ برقرار است.

۲۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. مثلث ABC در رأس C قائم است و ارتفاع CH میانهٔ وارد بر وتر AB و نصف آن است.



$$CH = \frac{۱}{۲}AB \Rightarrow \left|\frac{-\Delta}{۴a}\right| = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \xrightarrow{\times |a|} \left|\frac{\Delta}{۴}\right| = \frac{۱}{۲}\sqrt{\Delta}$$

$$\Rightarrow |\Delta| = ۲\sqrt{\Delta} \xrightarrow[\text{دو}]{\text{توان}} \Delta^۲ = ۴\Delta \Rightarrow \Delta = ۴$$

$$\Rightarrow b^۲ - ۴(۲)(+۳) = ۴ \Rightarrow b - ۲۴ = ۴ \Rightarrow b^۲ = ۲۸$$

$$\Rightarrow b = \pm ۲\sqrt{۷}$$

۲۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$S = -k = \alpha + \beta \ , \ P = L = \alpha\beta$$

$$S' = \alpha^۲ + ۱ + \beta^۲ + ۱ = ۱۳ \Rightarrow k^۲ - ۲L = ۱۱$$

$$P' = (\alpha^۲ + ۱)(\beta^۲ + ۱) = L^۲ + k^۲ - ۲L + ۱ = ۱۳ \Rightarrow L^۲ + ۱۱ = ۱۲ \Rightarrow L = -۱$$

$$\Rightarrow k^۲ = ۹ \Rightarrow k = \pm ۳$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۲۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. با فرض $x^۲ - ۳x = t$ داریم:

$$t^۲ + ۵t + ۴ = ۰ \Rightarrow (t+۱)(t+۴) = ۰ \Rightarrow t = -۱ \ , \ t = -۴$$

$$\begin{cases} x^۲ - ۳x = -۱ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta > ۰} \text{حاصل ضرب ریشه ها} = ۱ \\ x^۲ - ۳x = -۴ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۴ = ۰ \xrightarrow{\Delta < ۰} \text{ریشه ندارد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها} = ۱$$

۲۶- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$۴x^۲ + ۶x - ۱ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -\frac{۳}{۲} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

$ax^۲ + bx + c = ۰$ جمع ریشه‌های معادله $S = (\alpha + ۳\beta) + (\beta + ۳\alpha) = ۴(\alpha + \beta) = ۴\left(-\frac{۳}{۲}\right) = -۶$

$ax^۲ + bx + c = ۰$ ضرب ریشه‌های معادله $P = (\alpha + ۳\beta)(\beta + ۳\alpha) = ۳\left(\alpha^۲ + \beta^۲\right) + ۱۰\alpha\beta$

$$= ۳\left((\alpha + \beta)^۲ - ۲\alpha\beta\right) + ۱۰\alpha\beta = ۳(\alpha + \beta)^۲ + ۴\alpha\beta = ۳\left(-\frac{۳}{۲}\right)^۲ + ۴\left(-\frac{۱}{۴}\right) = \frac{۲۳}{۴}$$

$$x^۲ - sx + P = ۰$$

$$x^۲ - (-۶)x + \frac{۲۳}{۴} = ۰ \Rightarrow \boxed{۴x^۲ + ۲۴x + ۲۳ = ۰}$$

$$a = ۴ \quad b = ۲۴ \quad c = ۲۳$$

$$a + b + c = ۵۱$$

۲۷- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. در معادله درجه سوم $ax^۳ + bx^۳ + cx + d = ۰$ در صورت داشتن سه ریشه داریم:

$$S = \frac{-b}{a} \qquad P = \frac{-d}{a}$$

در اینجا:

$$S = \frac{-b}{a} = ۳ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = ۳$$

از طرفی چون α و β و γ تشکیل دنباله عددی (حسابی) می‌دهند، β واسطه حسابی میان α و γ است، یعنی:

$$۲\beta = \alpha + \gamma$$

با جایگذاری در $\alpha + \underbrace{\beta + \gamma}_{۲\beta} = ۳$ داریم:

$$۳\beta = ۳ \Rightarrow \beta = ۱$$

با جایگذاری $\beta = ۱$ در معادله، مقدار پارامتر m به دست می‌آید:

$$x^۳ - ۳x^۲ + (m - ۴)x + m = ۰ \xrightarrow[\text{صدق می کند}]{x = ۱} ۱ - ۳ + m - ۴ + m = ۰ \Rightarrow m = ۳$$

پس معادله به صورت $x^۳ - ۳x^۲ - x + ۳ = ۰$ بوده و داریم:

$$P = \frac{-d}{a} = -۳ \Rightarrow \alpha\beta\gamma = -۳ \xrightarrow{\beta = ۱} \alpha\gamma = -۳$$

۲۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

مطابق ضرایب معادله $x^{۲}+۲x-۴=۰$:

$$x_{۱}+x_{۲}=-\frac{b}{a}=-۲\,,\; x_{۱}x_{۲}=\frac{c}{a}=-۴$$

ریشهٔ $x_{۱}$ در معادله صدق می‌کند $\Rightarrow x_{۱}^{۲}+۲x_{۱}-۴=۰ \xrightarrow{\times x_{۱}} x_{۱}^{۳}+۲x_{۱}^{۲}-۴x_{۱}=۰$

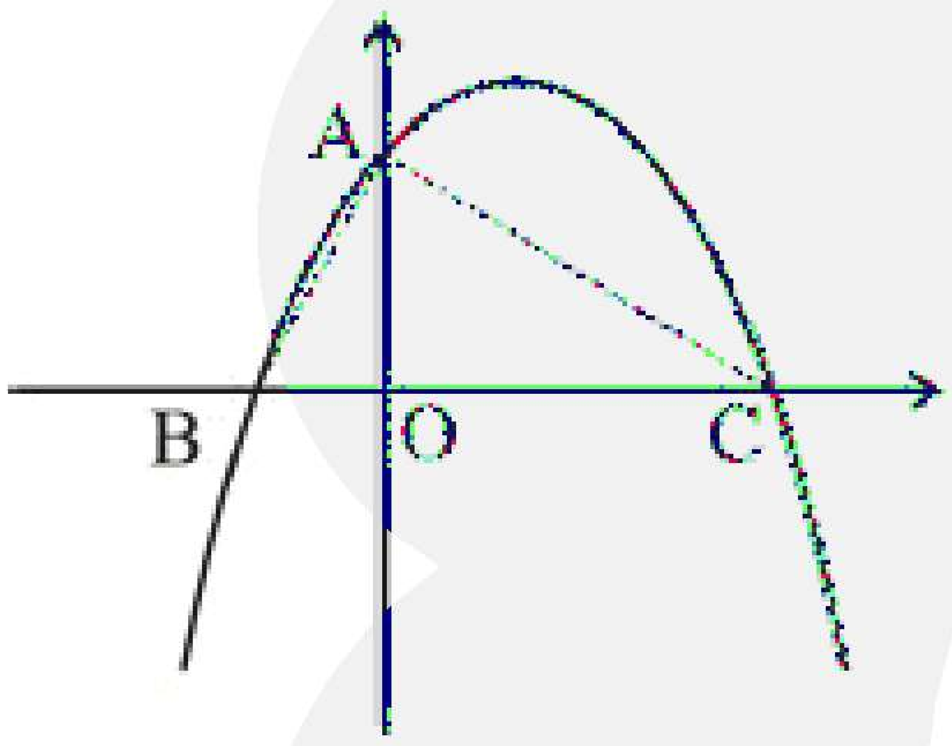
$$\Rightarrow x_{۱}^{۳}=-۲x_{۱}^{۲}+۴x_{۱} \quad (۱)$$

عبارت موردنظر سؤال $= x_{۱}^{۳}-۲x_{۲}^{۲}+۴x_{۲} \xrightarrow{\text{طبق ۱}} \left(-۲x_{۱}^{۲}+۴x_{۱}\right)-۲x_{۲}^{۲}+۴x_{۲}$

$$=-۲\left(x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}\right)+۴(x_{۱}+x_{۲})=-۲\left[(x_{۱}+x_{۲})^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}\right]+۴(x_{۱}+x_{۲})$$

$$=-۲\left[(-۲)^{۲}-۲(-۴)\right]+۴(-۲)=-۳۲$$

۲۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عرض از مبدأ تابع برابر k و ریشه‌های آن را به‌ترتیب $x_{۱}$ و $x_{۲}$ فرض می‌کنیم. طبق روابط طولی موجود در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$OA^{۲}=OB.OC \Rightarrow k^{۲}=|x_{۱}|.\,x_{۲} \xrightarrow{x_{۱}<۰}$$

$$k^{۲}=-x_{۱}x_{۲} \Rightarrow k^{۲}=-\frac{c}{a} \Rightarrow k^{۲}=-\frac{k}{(-۱)}$$

$$\Rightarrow k^{۲}=k \Rightarrow \begin{cases} k=۰ \\ k=۱ \end{cases}$$

۳۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(\frac{x-۱}{x}\right)^{۲}+۳-\frac{۲}{x}=۰ \Rightarrow \left(۱-\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۲\left(۱-\frac{۱}{x}\right)+۱=۰$$

$$۱-\frac{۱}{x}=t \Rightarrow t^{۲}+۲t+۱=۰ \Rightarrow (t+۱)^{۲}=۰ \Rightarrow t=-۱ \Rightarrow ۱-\frac{۱}{x}=-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=\frac{۱}{۲}$$

$$\left(۸\alpha^{-۱}\right)^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۸\times ۲}=۴$$

۳۱- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$y = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

$$y = a\left(x - \sqrt{۷} - \sqrt{۵} + \sqrt{۲}\right)\left(x - \sqrt{۷} + \sqrt{۵} - \sqrt{۲}\right) = a\left[\left(x - \sqrt{۷}\right)^۲ - \left(\sqrt{۵} - \sqrt{۲}\right)^۲\right]$$

$$= a\left(x^۲ - ۲\sqrt{۷}x + ۲\sqrt{۱۰}\right)$$

$$x = ۰ \Rightarrow ۱۰ = ۲a\sqrt{۱۰} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲} \Rightarrow x_s = \frac{\alpha + \beta}{۲} = \sqrt{۷} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{۱۰}}{۲}\left(۷ - ۱۴ + ۲\sqrt{۱۰}\right)$$

$$y = \min = \frac{۲۰ - ۷\sqrt{۱۰}}{۲} = ۱۰ - ۳/۵\sqrt{۱۰}$$

۳۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\left(x - \frac{۱}{x}\right)^۲ - ۲\left(x - \frac{۱}{x}\right) + ۱ = ۰ \xrightarrow{x - \frac{۱}{x} = t} t^۲ - ۲t + ۱ = ۰ \Rightarrow (t - ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow t = ۱$$

$$\alpha - \frac{۱}{\alpha} = ۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} \alpha^۲ + \frac{۱}{\alpha^۲} - ۲\alpha\left(\frac{۱}{\alpha}\right) = ۱ \Rightarrow \alpha^۲ + \frac{۱}{\alpha^۲} = ۳ \Rightarrow \frac{\alpha^۴ + ۱}{\alpha^۲} = ۳$$

۳۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x = ۲ \Rightarrow ۲^۲ + ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۵}{۲}$$

$$\Delta = ۰ \Rightarrow a^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow a = ۲ \text{ یا } -۲ \Rightarrow ۲ \times (-۲) \times \left(-\frac{۵}{۲}\right) = ۱۰$$

۳۴- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x \in \left(-\infty , \frac{۱}{۲}\right) \Rightarrow |۲x - ۱| = ۱ - ۲x \Rightarrow f(x) = ax + ۳(۱ - ۲x) + b$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} f(x) = (a - ۶)x + ۳ + b \\ f(x) = x \quad \text{تابع همانی} \end{array}\right\} \Rightarrow a = ۷ , b = -۳$$

بنابراین $S(۷ , -۳)$ رأس سهمی است. می‌دانیم هر سهمی به صورت $y = m(x - h)^۲ + K$ با شرط $m \neq ۰$ دارای رأس به مختصات (h , K) و خط تقارن $x = h$ است:

$$y = m(x - ۷)^۲ - ۳ \xrightarrow{\text{گذرا بر } (۰ , ۴۶)} ۴۶ = m(۰ - ۷)^۲ - ۳ \Rightarrow m = ۱$$

$$\Rightarrow y = ۱(x - ۷)^۲ - ۳ \Rightarrow y = x^۲ - ۱۴x + ۴۶$$

$x_۱$ و $x_۲$ محل برخورد با محور xها از معادله $y = ۰$ یعنی $x^۲ - ۱۴x + ۴۶ = ۰$ حاصل می‌شود که با استفاده از جمع و ضرب ریشه‌ها بدون حل معادله حاصل $x_۱^۳ + x_۲^۳$ را به دست می‌آوریم:

$$x_۱ + x_۲ = \frac{-b}{a} = ۱۴ = S$$

$$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} = ۴۶ = P$$

$$x_۱^۳ + x_۲^۳ = S^۳ - ۳PS = ۱۴^۳ - ۳(۴۶)(۱۴) = ۸۱۲$$

۳۵- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. با داشتن ریشه‌های $x_۱$ و $x_۲$ یعنی صفرهای تابع درجه ۲ می‌توان معادله سهمی را به صورت $f(x) = k(x - x_۱)(x - x_۲)$ درنظر گرفت:

$$f(x) = k(x + ۳)(x - ۵)$$

از طرفی با توجه به تقارن نمودار سهمی، طول ماکزیمم تابع وسط دو ریشه را $x_{max} = \frac{-۳ + ۵}{۲} = ۱$ درنظر بگیریم.

با توجه به صورت تست:

$$f(۱) = ۳۲ \Rightarrow ۳۲ = k(۱ + ۳)(۱ - ۵) \Rightarrow k = -۲$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع $f(x) = -۲(x + ۳)(x - ۵)$ یا به طور خلاصه $f(x) = -۲x^۲ + ۴x + ۳۰$ می‌شود و $a = -۲$ و $b = ۴$ و $c = ۳۰$ و در نهایت حاصل $a + ۲b + ۳c$ برابر ۹۶ خواهد شد.

«بانک سوال یاوران دانش»

۳۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$\beta^۲ - ۳\beta - ۱ = ۰ \Rightarrow \beta^۲ - ۲\beta = \beta + ۱ \Rightarrow \frac{۱}{\beta + ۲} + \frac{۱}{\alpha + ۲} = \frac{\alpha + \beta + ۴}{\alpha\beta + ۲(\alpha + \beta) + ۴}$$

$$= \frac{۳ + ۴}{-۱ + ۶ + ۴} = \frac{۷}{۹}$$

۳۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. وقتی ریشه‌های معادله، دو عدد فرد متوالی هستند، حتماً اختلاف ریشه‌ها برابر با ۲ است.

پس:
$$\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=۲\xrightarrow{a=۲}\frac{\sqrt{\Delta}}{۲}=۲\Rightarrow\sqrt{\Delta}=۴\Rightarrow\Delta=۱۶$$

$$(-۲m)^{۲}-۴(۲)(۷m-۲۶)=۱۶\Rightarrow ۴m^{۲}-۵۶m+۲۰۸=۱۶\Rightarrow ۴m^{۲}-۵۶m+۱۹۲=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۴} m^{۲}-۱۴m+۴۸=۰\Rightarrow m=۶\,,\,۸$$

امّا دقت کنید که دو عدد با اختلاف ۲ لزوماً دو عدد فرد متوالی نیستند، شاید دو عدد زوج متوالی باشند! پس مقادیر به دست آمده برای m را چک می‌کنیم:

$m=۶\Rightarrow$ معادله : $۲x^{۲}-۱۲x+۱۶=۰\Rightarrow x^{۲}-۶x+۸=۰\Rightarrow x=۲\,,\,۴$ غ ق ق (دو عدد زوج متوالی)

$m=۸\Rightarrow$ معادله : $۲x^{۲}-۱۶x+۳۰=۰\Rightarrow x^{۲}-۸x+۱۵=۰\Rightarrow x=۳\,,\,۵$ ق ق (دو عدد فرد متوالی)

پس فقط $m=۸$ قابل قبول است، یعنی مجموع دو تاس ریخته شده باید برابر با ۸ باشد:

تاس ها $\Rightarrow (۲\,,\,۶)(۶\,,\,۲)(۳\,,\,۵)(۵\,,\,۳)(۴\,,\,۴)$: ۵ حالت

پس احتمال موردنظر برابر با $\frac{۵}{۳۶}$ است.

۳۸- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$۲^{۳}\times\frac{۱}{۲^{۲x}}+۲^{۳}\times ۲^{۲x}=۲۰$$

با فرض : $۲^{۲x}=t$ و ۴ تقسیم طرفین معادله بر $\Rightarrow\frac{۲}{t}+۲t=۵\xrightarrow{\times t}۲t^{۲}-۵t+۲=۰$

$$\Delta=۹\ ,\ t_{۱}=۲\ ,\ t_{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$۲^{۲x}=۲\Rightarrow x_{۱}=\frac{۱}{۲}=\alpha \qquad ۲^{۲x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x_{۲}=-\frac{۱}{۲}=\beta$$

$$\frac{۲}{\alpha^{۲}}+\frac{۳}{\beta^{۲}}=۲(۴)+۳(۴)=۲۰$$

۳۹- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\Delta=m^{۲}-۴(۱-m)(-۱)>۰\Rightarrow m^{۲}-۴m+۴>۰$$

$$(m-۲)^{۲}>۰\Rightarrow m\neq ۲$$

$$S=\frac{-(-m)}{۱-m}<۰\Rightarrow m<۰\cup m>۱$$

$$P=\frac{-۱}{۱-m}>۰\Rightarrow ۱-m<۰\Rightarrow m>۱$$

$$(۱,+\infty)-\{۲\}=(۱,۲)\cup(۲,+\infty)$$

۴۰- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. ابتدا عبارت داده شده را برحسب $\alpha + \beta$ و $\alpha\beta$ مرتب می‌کنیم. کافی است طرفین تساوی را به توان ۲ برسانیم:

$$\alpha^۲(m+\beta)+\beta^۲(m+\alpha)+۲\alpha\beta\sqrt{(m+\alpha)(m+\beta)}=۵$$

$$\Rightarrow m\left(\alpha^۲+\beta^۲\right)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+۲\alpha\beta\sqrt{m^۲+m(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=۵$$

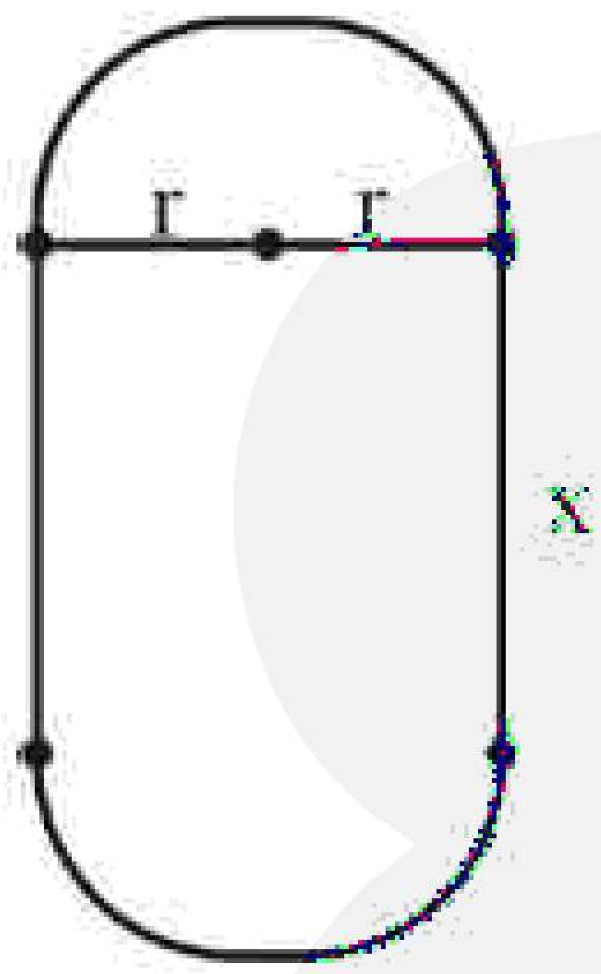
حال داریم:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-۱\\ \alpha\beta=-۱\end{cases}\Rightarrow m(-۱)^۲-۲(-۱)+(-۱)(-۱)+۲(-۱)\sqrt{m^۲-m-۱}=۵$$

$$\Rightarrow ۳m+۱-۲\sqrt{m^۲-m-۱}=۵\Rightarrow ۹m^۲-۲۴m+۱۶=۴\left(m^۲-m-۱\right)$$

$$\Rightarrow ۵m^۲-۲۰m+۲۰=۰\Rightarrow m^۲-۴m+۴=۰\Rightarrow (m-۲)^۲=۰\Rightarrow m=۲$$

۴۱- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.



بیشترین نوردهی موقعی ممکن است که پنجره بیشترین مساحت را داشته باشد:

$$S=۲S_{\text{نیم دایره}}+S_{\text{مستطیل}}=S_{\text{دایره}}+S_{\text{مستطیل}}\Rightarrow S=\pi r^۲+x(۲r)\ (۱)$$

تابع مربوط به محیط پنجره را هم می‌نویسیم:

$$p=۲p_{\text{نیم دایره}}+۲x=p_{\text{دایره}}+۲x=۲\pi r+۲x$$

پس:

$$۲\pi r+۲x=۱۲۰\Rightarrow \pi r+x=۶۰\Rightarrow x=۶۰-\pi r\ \ (۲)$$

حالا از رابطه ۲ در رابطه ۱ جایگذاری می‌کنیم:

$$S=\pi r^۲+x(۲r)\xrightarrow{x=۶۰-\pi r}\pi r^۲+(۶۰-\pi r)(۲r)=\pi r^۲+۱۲۰r-۲\pi r^۲\Rightarrow S=-\pi r^۲+۱۲۰r$$

بیشترین مقدار این تابع درجه دو در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، پس:

$$r=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۱۲۰}{۲(-\pi)}=\frac{۶۰}{\pi}$$

$$\text{محیط نیم‌دایره}=\pi r=\pi\left(\frac{۶۰}{\pi}\right)=۶۰$$

۴۲- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

$$f(x)=۰\Rightarrow ۲^{۳-۲x}+۲^{۳+۲x}-۲۰=۰ \xrightarrow{\text{با فرض } ۲^{۲x}=t} \frac{۸}{t}+۸t-۲۰=۰$$

$$\xrightarrow{\times t} ۸t^{۲}-۲۰t+۸=۰ \xrightarrow{\Delta=۱۴۴} t=\frac{۲۰\pm ۱۲}{۱۶}\begin{cases} t=۲\Rightarrow ۲^{۲x}=۲\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \\ t=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲^{۲x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow x=\frac{-۱}{۲}\end{cases}$$

$$\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\frac{۲}{\alpha^{۲}}+\frac{۳}{\beta^{۲}}=\underbrace{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳}+\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}}_{\downarrow}+\frac{۲}{\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}+\frac{۳}{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}}$$

$$=۰+۸+۱۲=۲۰$$

یادآوری: با توجه به عبارات خواسته شده، تفاوتی ندارد که α و β کدام‌یک از ریشه‌های $\frac{۱}{۲}$ و $-\frac{۱}{۲}$ باشند.

۴۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\alpha\beta^{۲}+\alpha\beta^{۲}=\alpha\beta\ (\alpha+\beta)=PS$$

$$PS<۰\Rightarrow\left(\frac{m-۳}{۱}\right)\left(\frac{۲-m}{۱}\right)<۰\Rightarrow (m-۳)(m-۲)<۰\Rightarrow ۲<m<۳\Rightarrow (a,b)=(۲,۳)$$

$$\Rightarrow a+b=۵$$

توجه کنید در این بازه همواره $\Delta>۰$ است.

۴۴- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^{۲}+bx+c=۰$ حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ و حاصل جمع آن‌ها $-\frac{b}{a}$ است، پس:

$$\begin{cases}\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Cos}\alpha=\frac{۲m}{۴}=\frac{m}{۲} \\ \operatorname{Sin}\alpha\times\operatorname{Cos}\alpha=-\frac{۱}{۴}\end{cases}\Rightarrow(\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Cos}\alpha)^{۲}=\frac{m^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Sin}^{۲}\alpha+\operatorname{Cos}^{۲}\alpha+۲\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha=\frac{m^{۲}}{۴}\Rightarrow ۱+۲\times\left(-\frac{۱}{۴}\right)=\frac{m^{۲}}{۴}\Rightarrow\frac{m^{۲}}{۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow m^{۲}=۲\Rightarrow m=\pm\sqrt{۲}$$

از آن‌جایی که $\frac{۳\pi}{۴}<\alpha<\pi$ است، پس حاصل $\operatorname{Sin}\alpha+\operatorname{Cos}\alpha$ منفی بوده و $m=-\sqrt{۲}$ قابل قبول است.

۴۵- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$x^۲ = t \Rightarrow t^۲ + (a^۲ + ۲a + ۲)t - a^۲ - ۲a - ۳ = ۰ \Rightarrow t = ۱ \Rightarrow x = ۱ , -۱$$

$t = -a^۲ - ۲a - ۳ \Rightarrow ۴ - ۱۲ < ۰$ همواره منفی

پس همواره عبارت فوق ۲ ریشه دارد.

۴۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. اگر $x_۱$ و $x_۲$ محل برخورد با محور xها باشند:

ضابطه سهمی $y = a(x - x_۱)(x - x_۲)$

$$y = a\left(x - \left(۳ + \sqrt{۲}\right)\right)\left(x - \left(۳ - \sqrt{۲}\right)\right)$$

محل برخورد با محور yها $(۰,-۱۴) \xrightarrow{\text{جاگذاری در تابع}} -۱۴ = a\left(۰ - \left(۳ + \sqrt{۲}\right)\right)\left(۰ - \left(۳ - \sqrt{۲}\right)\right)$

$$\Rightarrow a = -۲$$

$$y = -۲\left(x - \left(۳ + \sqrt{۲}\right)\right)\left(x - \left(۳ - \sqrt{۲}\right)\right)$$

$$y = -۲x^۲ + ۱۲x - ۱۴ \Rightarrow a^۲ + b^۲ + c^۲ = (-۲)^۲ + ۱۲^۲ + (-۱۴)^۲ = ۳۴۴$$

۴۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$x = \frac{-b}{۲a} = ۲ \Rightarrow b = -۴a \quad (۱)$$

$$(۲ , ۰) \xrightarrow{\text{صدق در ضابطه}} ۰ = ۴a + ۲b + c \quad (۲)$$

محور yها $(۰ , ۴) = ۰ + ۰ + c \Rightarrow c = ۴ \quad (۳)$

$$۱ , ۲ , ۳ \Rightarrow ۰ = ۴a + ۲(-۴a) + ۴ \Rightarrow a = ۱ , b = -۴$$

$$f(x) = x^۲ - ۴x + ۴$$

$$f(a + b + c - ۴) = f(۱ - ۴ + ۴ - ۴) = f(-۳) = (-۳)^۲ - ۴(-۳) + ۴ = ۲۵$$

۴۸- گزینه ۲ پاسخ صحیح است. برای سهمی $g(x) = -x^{۲} + ۴x + k$ داریم:

$$\begin{cases} x_{\text{راس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \\ y_{\text{راس}} = g(۲) = -۴ + ۸ + k = k + ۴ \end{cases}$$

برای سهمی $f(x) = ۲x^{۲} + bx + c$ داریم:

$$\begin{cases} x_{\text{راس}} = \frac{-b}{۲a} = \frac{-b}{۴} \xrightarrow{\text{باید}} \frac{-b}{۴} = ۲ \Rightarrow b = -۸ \\ y_{\text{راس}} = f(۲) = ۸ + ۲b + c \xrightarrow{b=-۸} f(۲) = c - ۸ \xrightarrow{\text{باید}} c - ۸ = k + ۴ \Rightarrow c = k + ۱۲ \end{cases}$$

با جایگذاری مقادیر b و c از بالا، ضابطه منحنی $y = (۲c - ۴)x^{۲} + ۲bx + ۶$ به صورت زیر می‌شود:

$$y = (۲k + ۲۴ - ۴)x^{۲} - ۱۶x + ۶ \Rightarrow y = (۲k + ۲۰)x^{۲} - ۱۶x + ۶$$

حالا برای آنکه این منحنی، خط $y = ۲$ را قطع نکند، باید معادله زیر جواب نداشته باشد:

$$(۲k + ۲۰)x^{۲} - ۱۶x + ۶ = ۲ \Rightarrow (۲k + ۲۰)x^{۲} - ۱۶x + ۴ = ۰ \Rightarrow (k + ۱۰)x^{۲} - ۸x + ۲ = ۰$$
$$\Delta < ۰ \Rightarrow ۶۴ - ۴(k + ۱۰)(۲) < ۰ \Rightarrow ۸ - (k + ۱۰) < ۰ \Rightarrow -۲ < k$$

این بازه، فقط شامل یک عدد صحیح منفی یعنی $k = -۱$ است.

۴۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. محور xها بر رأس سهمی مماس است:

$$۹ - ۴(-۲)(۲a) = ۰ \Rightarrow ۹ + ۱۶a = ۰ \Rightarrow a = \frac{-۹}{۱۶}$$

$$x_{۰} = \frac{-۳}{۲(-۲)} = \frac{۳}{۴}$$

$$x_{۰} + a = \frac{۳}{۴} - \frac{۹}{۱۶} = \frac{۳}{۱۶}$$

«بانک سوال یاوران دانش»

۵۰- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. با استاندارد کردن معادله‌ی درجه ۲:

$$x^{۲} + (۲m - ۲)x + m^{۲} - n = ۰$$

ریشه مضاعف $x = ۳ = \frac{-b}{۲a} \Rightarrow ۳ = \frac{-۲m + ۲}{۲} \Rightarrow \boxed{m = -۲}$

صدق کردن ریشه در معادله : $۳^{۲} + (۲(-۲) - ۲)(۳) + (-۲)^{۲} - n = ۰ \Rightarrow \boxed{n = -۵}$

ریشه‌های معادله جدید m , n : $\left.\begin{matrix} S = m + n = -۷ \\ P = m.n = ۱۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^{۲} - sx + p = ۰$

$$\Rightarrow \boxed{x^{۲} + ۷x + ۱۰ = ۰}$$